# KOMPETENZHEFT - EXPONENTIAL- UND LOGARITHMUSFUNKTIONEN

#### Inhaltsverzeichnis

1.	Exponentialfunktionen	2
2.	Exponentialgleichungen & Logarithmus	3
3.	Logarithmusfunktionen & Logarithmusgleichungen	6
4.	Sättigungs-, Abkling- und logistische Wachstumsvorgänge	8
5.	Logarithmische Skalierung	12



### Kompetenzmaterialien – Exponential- und Logarithmusfunktionen



In diesem Kompetenzheft wird ein möglicher Einstieg ins Thema "Exponential- und Logarithmusfunktionen" vorgestellt.

Die mit 🖈 markierten Inhalte sind für besonders interessierte Personen gedacht.

Die folgenden Materialien sind für den Einsatz im Unterricht konzipiert:

- ✓ Arbeitsblatt Potenzen und Wurzeln (Ausarbeitung)
- ✓ Arbeitsblatt Exponentialfunktionen (Ausarbeitung)
- ✓ Arbeitsblatt Logarithmusfunktionen (Ausarbeitung)
- ✓ Arbeitsblatt Logarithmische Skalierung (Ausarbeitung)

In der Aufgabensammlung – Exponential- und Logarithmusfunktionen befinden sich passende Übungsaufgaben.

Wir freuen uns über Feedback an mmf@univie.ac.at.

## 1. Exponentialfunktionen

### Arbeitsblatt – Potenzen und Wurzeln



Auf dem Arbeitsblatt – Potenzen und Wurzeln behandeln wir Potenzen mit natürlichen, ganzzahligen und rationalen Exponenten. Welche Zahlen sind also mit  $2^3$ ,  $2^{-3}$  und  $2^{\frac{3}{2}}$  gemeint?

## ${\bf Arbeits blatt-Exponential funktionen}$



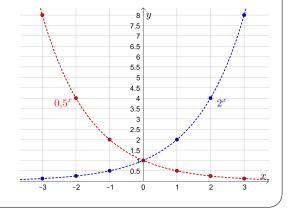
Auf dem Arbeitsblatt – Exponentialfunktionen behandeln wir die folgenden Fragen:

Was sind **Exponentialfunktionen**?

Welche Eigenschaften haben Exponentialfunktionen?

Was ist mit der Schreibweise  $\lim_{n\to\infty} 0.5^n = 0$  gemeint?

Was ist die Eulersche Zahl e?



## Exponential funktion oder Potenz funktion?





Bei der **Exponentialfunktion**  $f(x) = a^x$  ist also die Basis a eine feste, positive Zahl. Die Variable x befindet sich im Exponenten.

Bei der **Potenzfunktion**  $g(x) = x^a$  ist es genau umgekehrt. Der Exponent a ist eine feste Zahl. Die Variable x ist die Basis der Potenz.

Vergleiche 30<sup>2</sup> mit 2<sup>30</sup>. Wie sieht es mit 100<sup>2</sup> und 2<sup>100</sup> aus? Darum ist uns diese Unterscheidung so wichtig.

# 2. Exponentialgleichungen & Logarithmus

### ${\bf Arbeits blatt-Logarithmus funktionen}$



Auf dem Arbeitsblatt – Logarithmusfunktionen behandeln wir die folgenden Fragen:

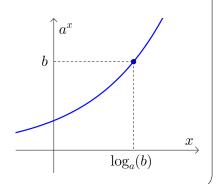
Warum ist  $\log_2(16) = 4$ ?

Wie ist der **Logarithmus von b zur Basis a** definiert?

Wie berechnet man Logarithmen mit dem Taschenrechner?

Welche **Rechenregeln** gelten für Logarithmen?

Wie löst man die **Exponentialgleichung**  $7 \cdot 2^{3 \cdot x - 1} = 350$ ?



Logarithmentafel





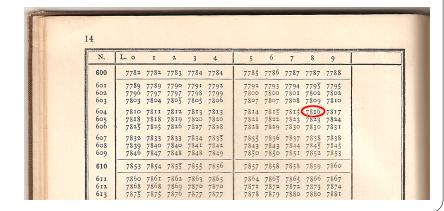
Wie groß ist zum Beispiel  $\log_{10}(604,8)$ ?

Wir wissen, dass  $\log_{10}(100) = 2$  und  $\log_{10}(1000) = 3$ , also liegt  $\log_{10}(604.8)$  zwischen 2 und 3.

Bis vor nicht allzu langer Zeit suchte man dann auf einer sogenannten Logarithmentafel nach der richtigen Stelle.

Im Buch rechts finden wir auf Seite 14 einen Näherungswert:

 $\log_{10}(604.8) \approx 2.7816$ 



False Friends beim Rechnen mit Logarithmen





Im Allgemeinen gilt:  $\log_a(x+y) \neq \log_a(x) + \log_a(y)$  bzw.  $\log_a(x-y) \neq \log_a(x) - \overline{\log_a(y)}$ .



Gibt es überhaupt positive Zahlen x und y, für die  $\log_a(x+y) = \log_a(x) + \log_a(y)$  gilt?

**Aufgabe 2.1.** Ahmed, Birgit, Carina und Dino formen widmen sich dem Term  $\lg (4 \cdot (x^2 - 3)^5)$ . Wer hat richtig umgeformt? Hast du eine Idee, welchen Fehler die anderen gemacht haben könnten?

1) 
$$\lg (4 \cdot (x^2 - 3)^5) = 5 \cdot \lg(4) + 5 \cdot \lg(x^2 - 3)$$
  
2)  $\lg (4 \cdot (x^2 - 3)^5) = \lg(4) + 5 \cdot \lg(x^2 - 3)$ 

2) 
$$\lg (4 \cdot (x^2 - 3)^5) = \lg(4) + 5 \cdot \lg (x^2 - 3)$$

3) 
$$\lg (4 \cdot (x^2 - 3)^5) = \lg(4) + 10 \cdot \lg(x) - 5 \cdot \lg(3)$$

4) 
$$\lg(4 \cdot (x^2 - 3)^5) = 20 \cdot \lg(x^2 - 3)$$

#### Logarithmus mit beliebiger Basis berechnen





Auf Michaels Taschenrechner gibt es keine Funktion, die  $\log_{1.02}$  berechnet.

Er würde trotzdem gerne Gleichungen der Bauart

$$a^x = b$$
,  $a, b > 0$ ,  $a \neq 1$ 

lösen können. Schau dir an, was er macht, um  $x = \log_a(b)$  nur mit LN zu berechnen:

$$a^x = b$$

$$\ln\left(a^x\right) = \ln(b)$$

$$x \cdot \ln(a) = \ln(b)$$

$$x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

Es gilt also: 
$$\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$
  $(a > 0, a \neq 1)$ 

#### Exponentieller Wachstumsprozess





Exponentieller Wachstumsprozess (z. B. Vermehrung von Bakterien):

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}, \quad \lambda > 0.$$
 Warum soll hier  $\lambda$  größer als 0 sein?

$$N(t) = N_0 \cdot a^t$$
,  $a > 1$ . Warum soll hier  $a$  größer als 1 sein?

 $N(t)\dots$  Anzahl Bakterien nach t Zeiteinheiten

 $N(0) = N_0 \dots$  Anzahl Bakterien zu Beginn

Die **Verdopplungszeit** ist jene Zeitdauer, bis sich die untersuchte Größe (Anzahl der Bakterien) verdoppelt hat.

## ${\bf Verdopplung szeit}$





Erkläre, warum die **Verdopplungszeit** die Lösung t der folgenden Gleichung ist:

$$N(t) = 2 \cdot N_0$$

Wir lösen die Gleichung nach t auf:

$$N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t} = 2 \cdot N_0 \quad \stackrel{N_0 \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad e^{\lambda \cdot t} = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \cdot t = \ln(2) \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

Diese Formel brauchst du nicht auswendig wissen. Es reicht der Ansatz  $N(t) = 2 \cdot N_0$ .

Beispiel 2.2. Die Populationsgröße eines Heuschreckenschwarms wird näherungsweise durch die folgende Funktion beschrieben:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{0,185 \cdot t}$$
  $t \dots$  Zeit in Tagen  $N(t) \dots$  Größe der Population

- a) Um wie viel Prozent wächst der Heuschreckenschwarm pro Tag?
- b) Berechne die Verdopplungszeit.
- c) Wie viele Stunden dauert es, bis die Population um 35 % gewachsen ist?

Lösung.

a) Wir schreiben die Funktionsgleichung in der Form  $N(t) = N_0 \cdot a^t$ 

$$N(t) = N_0 \cdot (e^{0.185})^t = N_0 \cdot 1,2032...^t$$

Pro Tag wächst der Heuschreckenschwarm also um 20,32...%.

b) Die Verdopplungszeit ist die Lösung der Gleichung  $N(t) = 2 \cdot N_0$ .

$$N_0 \cdot e^{0,185 \cdot t} = 2 \cdot N_0 \iff e^{0,185 \cdot t} = 2 \iff 0,185 \cdot t \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1} = \ln(2) \iff t = \frac{\ln(2)}{0.185} = 3,746... \text{ Tage}$$

c) Wir lösen die Gleichung  $N(t) = N_0 \cdot 135 \%$ .

$$N(t) = N_0 \cdot 1,35$$
  
 $N_0 \cdot e^{0,185 \cdot t} = N_0 \cdot 1,35$   
 $e^{0,185 \cdot t} = 1,35$   
 $0,185 \cdot t \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1} = \ln(1,35)$   
 $t = \frac{\ln(1,35)}{0.185} = 1,622... \text{ Tage} = 38,93... \text{ Stunden}$ 

Dezimalsystem und Zehnerlogarithmus





Wie viele Stellen hat die natürliche Zahl  $n = 42^{42}$ ?

Du kannst jede natürliche Zahl n in der Form  $n = 10^x$  mit einer passenden Zahl x schreiben. Überlege dir, wie groß x ist, wenn n eine zweistellige Zahl ist. Wie groß ist x bei dreistelligen Zahlen? Wie viele Stellen hat die Zahl n, wenn x = 31,17 ist? Erkläre damit die folgende Aussage:

"Die Anzahl an Stellen der natürlichen Zahl <br/>n beträgt  $\lfloor \lg(n) \rfloor + 1.$ "

 $\lfloor a \rfloor$  ist die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich a ist. Zum Beispiel:  $\lfloor 7,9235 \rfloor = 7, \, \lfloor 8 \rfloor = 8.$ 

Die Zahl  $n = 42^{42}$  hat also  $\lfloor 42 \cdot \lg(42) \rfloor + 1 = 69$  Stellen.

# 3. Logarithmusfunktionen & Logarithmusgleichungen

## ${\bf Arbeits blatt-Logarithmus funktionen}$

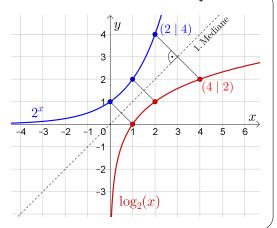
MATHEMATIK macht FREU(N)DE

Auf dem Arbeitsblatt – Logarithmusfunktionen behandeln wir außerdem die folgenden Fragen:

Was sind Logarithmusfunktionen?

Warum gilt  $a^{\log_a(b)} = b$ ?

Wie kann man Logarithmusgleichungen lösen?



Rechenregeln für Logarithmen





Beim Lösen von Logarithmusgleichungen können die folgenden Rechenregeln helfen:

1) 
$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

Aus "mal" wird "plus".

$$2) \ \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

Aus "durch" wird "minus".

$$3)\, \log_a{(x^r)} = r \cdot \log_a(x)$$

Aus "hoch r" wird "mal r".

Achte beim Verwenden der Rechenregeln darauf, dass beide Seiten definiert sind.

Zum Beispiel:  $ln(4 \cdot 2) = ln(4) + ln(2)$ 

Aber: 
$$\ln((-4) \cdot (-2)) \neq \ln(-4) + \ln(-2)$$

ln(x) ist nur für x > 0 definiert.

Definitionsmenge





Löse die Logarithmusgleichung  $\ln(x^2) = 0$  über der Grundmenge  $\mathbb{R}$ .

1) Lukas rechnet sofort los:

$$ln(x^2) = 0$$

$$2 \cdot \ln(x) = 0$$

$$ln(x) = 0$$

$$x = 1$$

Lukas meint: "Die Lösung der Gleichung ist 1."

2) Michael antwortet: "-1 ist aber auch eine Lösung der Gleichung, weil  $\ln((-1)^2) = \ln(1) = 0$ ." In welchem Schritt hat Lukas diese zweite Lösung verloren?

**Beispiel 3.1.** Löse die Gleichung  $\ln(x^2) = 0$  über der Grundmenge  $\mathbb{R}$ .

Lösung. Zuerst ermitteln wir die Definitionsmenge:

$$x^2 > 0 \iff x \neq 0$$

Die Definitionsmenge ist also  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Lösungsweg** 1: Die Rechenregel  $\ln(x^2) = 2 \cdot \ln(x)$  gilt nur für x > 0.

Fall 1: x > 0

$$\ln(x^2) = 0 \iff 2 \cdot \ln(x) = 0 \iff x = 1$$

Fall 2: x < 0

$$\ln(x^2) = 0 \iff \ln((-x)^2) = 0 \iff 2 \cdot \ln(-x) = 0 \iff -x = 1 \iff x = -1$$

Lösungsweg 2:

$$\ln(x^2) = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist jedenfalls  $L = \{-1, 1\}$ .

**Beispiel 3.2.** Löse die Gleichung  $2 \cdot \lg(3 \cdot x) = \lg(8 \cdot x^2 + 4)$  über der Grundmenge  $\mathbb{R}$ .

Lösung. Zuerst ermitteln wir die Definitionsmenge:

$$3 \cdot x > 0 \iff x > 0$$
 
$$8 \cdot x^2 + 4 > 0 \iff x^2 > -\frac{1}{2} \iff x \in \mathbb{R}$$

Die Definitionsmenge ist also  $D = \mathbb{R}^+$ .

Die Rechenregel  $2 \cdot \lg(3 \cdot x) = \lg((3 \cdot x)^2)$  gilt für alle x > 0.

$$2 \cdot \lg(3 \cdot x) = \lg(8 \cdot x^2 + 4)$$
$$\lg(9 \cdot x^2) = \lg(8 \cdot x^2 + 4)$$
$$9 \cdot x^2 = 8 \cdot x^2 + 4$$
$$x^2 = 4$$

Die Gleichung  $x^2 = 4$  hat zwar die beiden Lösungen -2 und 2, aber nur 2 liegt in der Definitionsmenge. Die Lösungsmenge der Gleichung ist also  $L = \{2\}$ .

## 4. SÄTTIGUNGS-, ABKLING- UND LOGISTISCHE WACHSTUMSVORGÄNGE

Beispiel 4.1. Nimmst du ein Getränk aus dem Kühlschrank und lässt es geduldig vor dir stehen, nähert sich die Temperatur des Getränks immer mehr der Raumtemperatur an.

Der Temperaturverlauf des Getränks wird durch die Funktion f angenähert:

$$f(t) = 19 \cdot \left(1 - e^{-0.016 \cdot t}\right) + 6$$

# $t \dots$ Zeit in Minuten

f(t)... Temperatur in °C nach  $t \ge 0$  Minuten

- a) Berechne die Temperatur des Getränks bei Entnahme aus dem Kühlschrank.
- b) Berechne die Temperatur nach 30, 60, 90 und 120 Minuten.
- c) Begründe, welchem Wert sich die Temperatur des Getränks annähert.
- d) Skizziere den Funktionsgraphen.

Lösung.

a) Die Temperatur zu Beginn (t = 0) beträgt

$$f(0) = 19 \cdot (1 - e^{0}) + 6 = 19 \cdot 0 + 6 = 6$$
 °C.

b) Wir setzen in die Funktionsgleichung ein:

$$f(30) = 19 \cdot (1 - e^{-0.016 \cdot 30}) + 6 = 13.24...$$
°C

$$f(60) = 19 \cdot (1 - e^{-0.016 \cdot 60}) + 6 = 17.72...$$
°C

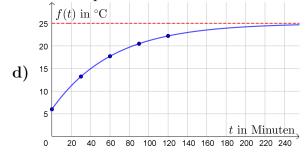
$$f(90) = 20.49...$$
 °C

$$f(120) = 22.21...$$
 °C

c) Wir überlegen uns, welchem Wert sich f(t) annähert, wenn t immer größer wird:

$$\lim_{t \to \infty} e^{-0.016 \cdot t} = \lim_{t \to \infty} 0.984...^{t} = 0 \implies \lim_{t \to \infty} f(t) = 19 \cdot (1 - 0) + 6 = 25 \, ^{\circ}\text{C}$$

Die Temperatur des Getränks nähert sich also der Raumtemperatur von 25 °C an.



#### Exponentialfunktionen & Verschiebungen



MATHEMATIK macht

Wir interessieren uns für das Verhalten der Funktion f mit  $f(x) = c \cdot a^x + d$ .

Ist die Funktion streng monoton wachsend oder streng monoton fallend?

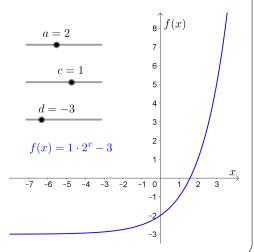
Was passiert mit den Funktionswerten, wenn wir für x immer größere Zahlen einsetzen?

Macht es für die Beantwortung der beiden Fragen einen Unterschied, ob . . .

... 
$$a > 1$$
 oder  $0 < a < 1$  ist?

... 
$$c > 0$$
 oder  $c < 0$  ist?

... 
$$d > 0$$
 oder  $d < 0$  ist?



#### ${\bf Exponentieller\ Abnahme prozess}$





Exponentieller Abnahmeprozess (z. B. radioaktiver Zerfall):

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}, \quad \lambda > 0.$$
 Warum soll hier  $\lambda$  größer als 0 sein?

$$m{N(t)} = m{N_0} \cdot m{a^t}, \qquad 0 < a < 1.$$
 Warum soll hier  $a$  zwischen 0 und 1 sein?

 $N(t)\ldots$  Anzahl Atomkerne nach t Zeiteinheiten

 $N(0) = N_0 \dots$  Anzahl Atomkerne zu Beginn

Die **Halbwertszeit** ist jene Zeitdauer, bis sich die untersuchte Größe (Anzahl Atomkerne) halbiert hat.

#### Halbwertszeit





Erkläre, warum die **Halbwertszeit** die Lösung t der folgenden Gleichung ist:

$$N(t)=rac{N_0}{2}$$

Wir lösen die Gleichung nach t auf:

$$N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = \frac{N_0}{2} \quad \stackrel{N_0 \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad e^{-\lambda \cdot t} = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -\lambda \cdot t = \ln(0.5) \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{t} = \frac{\ln(0.5)}{-\lambda}$$

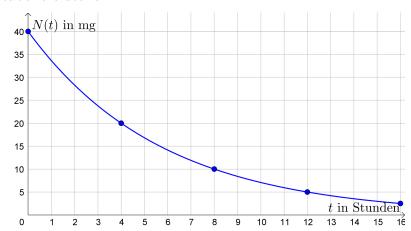
Diese Formel brauchst du nicht auswendig wissen. Es reicht der Ansatz  $N(t) = \frac{N_0}{2}$ .

Beispiel 4.2. Der Abbau von Koffein im Körper kann näherungsweise durch einen exponentiellen Abnahmeprozess mit einer Halbwertszeit von 4 Stunden beschrieben werden.

- a) Zu Beginn (t = 0 h) befinden sich 40 mg Koffein im Körper. Skizziere den Graphen der Funktion im Zeitintervall [0 h; 16 h].
- b) Berechne, nach wie viel Stunden sich nur mehr  $20\,\%$  der Anfangsmenge Koffein im Körper befinden
- c) Berechne, wie viel Prozent der Koffeinmenge alle 30 Minuten abgebaut werden.

Lösung. a) Beginnend von 40 mg halbiert sich die vorhandene Menge alle 4 Stunden. Mit diesen Informationen können wir eine Wertetabelle erstellen:

$t  ext{ (in h)}$	$N(t) \; ({ m in \; mg})$
0	40
4	20
8	10
12	5
16	2,5



**b)** Von der zugehörigen Funktionsgleichung  $N(t) = N_0 \cdot a^t$  kennen wir  $N_0 = N(0) = 40$ . Die Basis a können wir mit der Halbwertszeit berechnen:

$$N(4) = 20 \implies 40 \cdot a^4 = 20 \implies a^4 = 0.5 \implies a = \sqrt[4]{0.5} = 0.8408...$$

Wann sind nur mehr 20% von  $40\,\mathrm{mg}$  – also  $40\cdot0.2=8\,\mathrm{mg}$  – vorhanden?

Wir lösen die entsprechende Gleichung:

$$N(t) = 8 \implies 40 \cdot a^t = 8 \implies a^t = 0,2 \implies t \cdot \lg(a) = \lg(0,2) \implies t = \frac{\lg(0,2)}{\lg(a)} = 9,287...\,\mathrm{h}.$$

Nach 9,287... h sind nur mehr 20 % der Anfangsmenge vorhanden.

Um diese Aufgabe lösen zu können, musst du eigentlich nur die Halbwertszeit kennen. Weißt du warum?

c) Die vorhandene Menge nach  $t = 30 \,\mathrm{min} = 0.5 \,\mathrm{h}$  beträgt

$$N(0.5) = N_0 \cdot a^{0.5} = N_0 \cdot 0.9170... = N_0 \cdot 91.70...\%.$$

Nach einer halben Stunde sind also noch 91,70...% der Anfangsmenge vorhanden.

Alle 30 Minuten werden also  $100\% - 91{,}70...\% = 8{,}29...\%$  des Koffeins abgebaut.

Streng genommen sollten wir nachrechnen:  $N(t+0.5) = N_0 \cdot a^{t+0.5} = N_0 \cdot a^t \cdot a^{0.5} = N(t) \cdot 91.70...\%$ .

In Worten: Ganz egal bei welchem Zeitpunkt t du startest, eine halbe Stunde später sind nur mehr 91,70...% davon vorhanden.

Beispiel 4.3. Wir setzen in einem Teich 100 Fische aus. Die Fische finden dort beste Lebensbedingungen vor: Es gibt ausreichend Nahrung, keine Konkurrenz oder gar Raubfische. Was glaubst du, wie sich die Fischpopulation über einen längeren Zeitraum entwickeln würde?

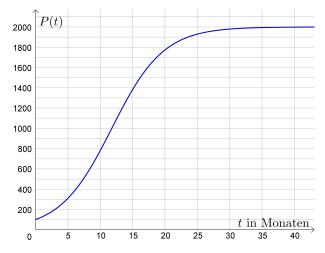
Die Fischpopulation kann durch einen logistischen Wachstumsprozess modelliert werden:

$$P(t) = \frac{P_0 \cdot K}{P_0 + (K - P_0) \cdot e^{-0.25 \cdot t}}$$

 $t \dots$  Zeit in Monaten

P(t)... Größe der Fischpopulation nach t Monaten

Der Funktionsgraph ist im folgenden Bild dargestellt:



- a) Begründe anhand der Funktionsgleichung, warum  $P_0 = P(0)$  ist.  $P_0$  ist also die Population zu Beginn.
- b) Begründe anhand der Funktionsgleichung, warum  $K = \lim_{t \to \infty} P(t) \text{ ist.} \qquad \qquad \textit{K} \text{ steht für "Kapazitätsgrenze".}$
- c) Lies die Parameter  $P_0$  und K aus der Grafik ab.
- d) Berechne die Größe der Fischpopulation nach 2 Jahren.

Lösung.

a) 
$$P(0) = \frac{P_0 \cdot K}{P_0 + (K - P_0) \cdot 1} = \frac{P_0 \cdot K}{K} = P_0.$$

**b)** 
$$\lim_{t \to \infty} e^{-\frac{1}{4} \cdot t} = \lim_{t \to \infty} 0.7788...^t = 0 \implies \lim_{t \to \infty} P(t) = \frac{P_0 \cdot K}{P_0} = K.$$

- c)  $P_0 = 100, K = 2000.$
- d)  $P(24) \approx 1910$ , also besteht die Fischpopulation nach 2 Jahren aus rund 1910 Fischen.

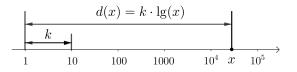
## 5. Logarithmische Skalierung

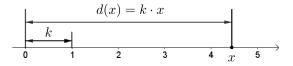
### Arbeitsblatt – Logarithmische Skalierung



Auf dem Arbeitsblatt – Logarithmische Skalierung behandeln wir die folgenden Fragen:

Was ist eine logarithmische Skala? Welche Unterschiede gibt es zu einer linearen Skala?



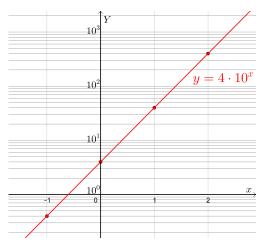


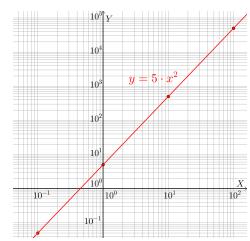
Was ist ein ordinatenlogarithmisches Koordinatensystem?

Warum ist der Graph jeder Exponentialfunktion in dieser Darstellung eine Gerade?

Was ist ein doppeltlogarithmisches Koordinatensystem?

Warum ist der Graph jeder Potenzfunktion in dieser Darstellung eine Gerade?





Was ist ein abszissenlogarithmisches Koordinatensystem?

Warum ist der Graph jeder Logarithmusfunktion in dieser Darstellung eine Gerade?

