KOMPETENZHEFT - FOLGEN UND REIHEN

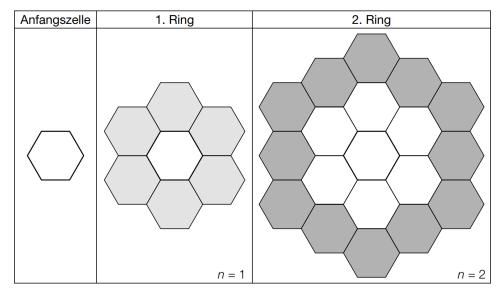
Inhaltsverzeichnis

L.	Diagnoseaufgaben	1	
2.	Zahlenfolgen	5	
3.	Arithmetische Folgen und Reihen	10	
1.	Geometrische Folgen und Reihen	15	
5	Weitere Aufgahenstellungen	19	



1. Diagnoseaufgaben

Aufgabe 1.1. Bienen bauen ihre Waben, indem sie mit einer einzigen sechseckigen Zelle (Anfangszelle) starten und dann weitere sechseckige Zellen ringförmig um die erste Zelle bauen.

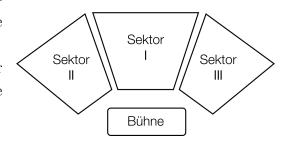


- a) Die Anzahlen der Zellen in den jeweiligen Ringen bilden eine arithmetische Folge. Die Anfangszelle wird dabei nicht als Ring gezählt.
 - Geben Sie die ersten 4 Glieder dieser arithmetischen Folge an.
 - Stellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz für diese arithmetische Folge auf.
 - Stellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für diese arithmetische Folge auf.
- b) Mit der Formel $s_n = 1 + 3 \cdot n + 3 \cdot n^2$ kann man berechnen, wie viele Zellen insgesamt bis zum n-ten Ring gebildet worden sind. Eine Wabe besteht aus insgesamt 271 Zellen.
 - Ermitteln Sie, aus wie vielen Ringen diese Wabe besteht.

Datum: 31. August 2018.

Aufgabe 1.2. Eine Schule plant eine Theateraufführung im Turnsaal. Der Schulwart hat die Idee, die Zuschauerstühle wie folgt um die Bühne aufzubauen (siehe nachstehende Abbildung).

- a) Im Sektor I stehen in der ersten Sitzreihe 8 Stühle. In jeder folgenden Sitzreihe erhöht sich die Anzahl der Stühle jeweils um 3.
 - Begründen Sie mathematisch, warum die Anzahlen der Stühle in den jeweiligen Sitzreihen eine arithmetische Folge a_n bilden.
 - Stellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz für a_n auf.



- b) Im Sektor II stehen in der ersten Sitzreihe 5 Stühle, in jeder folgenden Sitzreihe erhöht sich die Anzahl der Stühle jeweils um 1.
 - Stellen Sie ein explizites Bildungsgesetz auf, mit dem man die Anzahl der Stühle in der *n*-ten Sitzreihe berechnen kann.

Die Gesamtanzahl der Stühle in den ersten n Sitzreihen des Sektors II ist $\frac{(9+n)\cdot n}{2}$.

- Berechnen Sie, aus wie vielen Sitzreihen der Sektor II besteht, wenn 126 Stühle für diesen Sektor verwendet werden.
- c) Für den Sektor III ist eine Sitzordnung vorgesehen, bei der die Anzahl der Stühle in der n-ten Sitzreihe durch folgendes explizites Bildungsgesetz beschrieben wird: $a_n = 5 + (n-1) \cdot 4$
 - Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahlen 5 und 4 im gegebenen Sachzusammenhang.
 - Berechnen Sie, wie viele Stühle in der 7. Sitzreihe stehen.

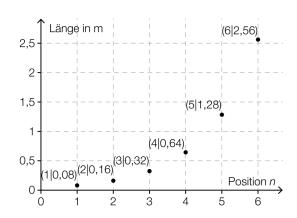
Aufgabe 1.3. Palisaden sind Pfähle, meist aus Holz, die früher zur Befestigung verwendet wurden und heute auch als Designelement und Sichtschutz eingesetzt werden.

- a) Ein Zaun wird aus zylinderförmigen Pfählen mit gleichem Durchmesser gebaut. Die Längen der Pfähle bilden eine arithmetische Folge. Der kürzeste Pfahl ist $0,40\,\mathrm{m}$ lang, der Pfahl daneben ist $0,55\,\mathrm{m}$ lang. Die Zaunpfähle kosten pro Meter $45\,$ €.
 - Erstellen Sie das explizite Bildungsgesetz der arithmetischen Folge.
 - Ermitteln Sie, aus wie vielen Pfählen der Zaun besteht, wenn der letzte Pfahl 2,20 m lang ist.
 - Berechnen Sie die Kosten für das Holz des gesamten Zaunes.

b) Als Designelement in einem Garten soll ein Zaun aus 6 Pfählen errichtet werden. Die nachgestellte Grafik stellt die Längen der Pfähle in Abhängigkeit von ihrer Position im Zaun dar.



- Geben Sie die Definitionsmenge der dargestellten Funktion an.
- Argumentieren Sie, warum die dargestellten Lösungen eine geometrische Folge bilden.



Aufgabe 1.4. Bundesministerium für bildung, wissenschaft und Forschung

- a) Sabine erbt von einer Tante Bargeld. Im ersten Monat gibt sie 600 € des geerbten Geldes aus. Sie plant, in jedem folgenden Monat um 100 € mehr auszugeben als im Monat davor, bis die gesamte Erbschaft ausgegeben ist. Die ausgegebenen Beträge bilden eine endliche arithmetische Folge (a₁; a₂; a₃; ...; a₁₅).
 - Stellen Sie das explizite Bildungsgesetz dieser Folge auf.
 - Berechnen Sie die Höhe der Erbschaft.
- b) Martin legt den Gesamtbetrag K_0 einer Erbschaft auf ein Sparkonto mit fixem Zinssatz. Die jährliche Kapitalentwicklung kann in rekursiver Form angegeben werden: $K_n = 1,015 \cdot K_{n-1}$
 - n ... Jahre nach Beginn der Verzinsung
 - Geben Sie die zugehörige explizite Darstellung an.
 - Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren sich das ursprüngliche Guthaben K_0 verdoppelt hat.
- c) Eine Erbschaft in Höhe von 100 000 € soll auf mehrere Erben aufgeteilt werden. Der erste Erbe erhält die Hälfte der Erbschaft, der zweite Erbe ein Viertel der Erbschaft, der dritte ein Achtel usw.

Das Erbe wird auf 9 Erben aufgeteilt, der Rest an eine karitative Einrichtung gespendet.

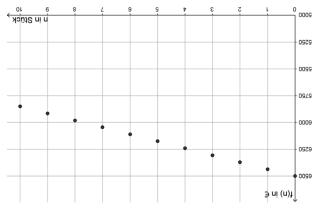
- Erklären Sie, warum es sich bei den vererbten Beträgen um eine geometrische Folge handelt.
- Berechnen Sie, welcher Betrag gespendet wird.
- d) Marco erbt Silbermünzen im Wert von $6500 \in$. Er kann jede Silbermünze um $65 \in$ verkaufen. Es wird folgende Funktion f aufgestellt:

$$f(n) = 6500 - 65 \cdot n$$

 $0 \leq n \leq 100, \, n \in \mathbb{N}$... Anzahl der verkauften Münzen

Die Funktion f ist eine endliche Folge.

- Beschreiben Sie, welche Bedeutung der Funktionswert f(n) im gegebenen Sachzusammenhang hat.
- Stellen Sie die Funktion f für $0 \le n \le 10$ in einem Koordinatensystem grafisch dar.
- Stellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz dieser Folge auf.



Rekursives Bildungsgesetz: $a_0 = 6500$, $a_n = a_{n-1} - 65$

d) f(n) gibt den Wert der Goldmünzen in Marcos Besitz an, wenn Marco n Stück Goldmünzen verkauft.

- Es bleiben etwa 195,31 € an Spenden übrig.
 - .(3,0 = p)
- c) Es handelt sich um eine geometrische Folge, da der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist
 - b) Das ursprüngliche Guthaben hat sich nach etwa 46,6 Jahren verdoppelt
 - - 1.4 a) Die Höhe der Erbschaft beträgt 19 $500 \in .$
 - q=2. (Das Bildungsgesetz lautet $b_n=a_1\cdot q^{n-1}.$

Bei einer geometrischen Folge ist der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant. Hier ist der Quotient

$$D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \qquad \text{oder} \qquad D = \{n \in \mathbb{N} | 1 \le n \le 6\}$$

 $^{1-n}\Omega \cdot 80,0 = (n)\Lambda$ (d

Das Holz für den Zaun kostet 760,50 €.

Der Zaun besteht aus 13 Pfählen.

 $32.0 + n \cdot 31.0 = nb$ (6 8.1

Es stehen 29 Stühle in der 7. Sitzreihe.

 4 mu
 sleder folgenden Sitzreihe erhöht sich die Anzahl der Stühle jeweils um 4

- c) 5 ... Anzahl der Stühle in der ersten Sitzreihe
 - Der Sektor II besteht aus 12 Sitzreihen.
 - u + v = uv (q
 - $a_1 = 8 \text{ and } a_{n+1} = a_n + 3$
- 1.2 a) Die Differenz der Anzahlen der Stühle zweier aufeinanderfolgender Sitzreihen ist konstant.
 - b) Diese Wabe besteht aus 9 Ringen.

Explizites Bildungsgesetz:
$$a_n = 6 + (n-1) \cdot 6$$
 oder $a_n = 6 \cdot n$

Rekursives Bildungsgesetz: $a_{n+1} = a_n + 6$

1.1 a)
$$a_1 = 6$$
, $a_2 = 12$, $a_3 = 18$, $a_4 = 24$

2. Zahlenfolgen

Du kennst vielleicht Rätsel, bei denen eine Zahlenfolge fortgesetzt werden soll:

- $\langle 1, 4, 7, 10, 13, \ldots \rangle$
- $\langle 3, -6, 12, -24, 48, \ldots \rangle$

Kannst du jeweils ein Muster erkennen?

- $\langle 3, 6, 12, 24, 48, \ldots \rangle$
- $\langle 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots \rangle$
- $\langle 1, 4, 9, 16, 25, \ldots \rangle$
- $\langle 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots \rangle$

Hier wirst du mit einer effizienten Formel berühmt.





Bei einer Zahlenfolge (kurz: Folge) befinden sich also Zahlen in einer festen Reihenfolge:

$$\langle a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$$

Die erste Zahl der Folge ist a_1 , die zweite Zahl ist a_2, \ldots

Die einzelnen Zahlen einer Folge nennen wir auch Folgenglieder.

Die kleine tiefgestellte Zahl 1 bei a_1 heißt auch **Index**. Der Index hilft uns beim Nummerieren der Folgenglieder.

Statt $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$ schreiben wir auch kürzer $\langle a_n \rangle_{n>1}$ oder noch kürzer $\langle a_n \rangle$.

Wir verwenden die Sprechweise: " a_{42} ist das 42. Glied der Folge $\langle a_n \rangle$."

Folgen können endlich sein, zum Beispiel ein vierstelliger Zahlencode am Fahrradschloss. Folgen können aber auch unendlich sein, zum Beispiel die Folge der Quadratzahlen (1, 4, 9, 16, 25, ...).

Die spitzen Klammern verwenden wir zur Unterscheidung von Folgen und Mengen.

Bei Mengen kommt es nämlich *nicht* auf die Reihenfolge der Zahlen an: Die Mengen $\{1, 2, 3, 4\}$ und $\{2, 1, 4, 3\}$ sind gleich. Bei Folgen ist die Reihenfolge aber wichtig: Die Folgen $\langle 1, 2, 3, 4 \rangle$ und $\langle 2, 1, 4, 3 \rangle$ sind voneinander verschieden.

 ${\bf Mehr deutigkeit}$



Wie geht die Folge (3, 5, 7, ...) weiter?

Lukas setzt fort: $\langle 3,5,7,9,11,13,15,17,19,\ldots\rangle$

Annika setzt fort: (3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...)

Was meinst du: Wer hat Recht?

Solche Aufgabenstellungen sind nicht eindeutig lösbar. Es gibt vielleicht Fortsetzungen, die naheliegender sind als andere. Von richtig oder falsch können wir aber jedenfalls nicht sprechen. Um wirklich alle Glieder einer Folge eindeutig festlegen zu können, sehen wir uns jetzt zwei verschiedene Möglichkeiten an:

Beispiel 2.1. Die Folge $\langle a_n \rangle$ mit

$$a_n = 2 \cdot n + 1$$

ist in **expliziter Darstellung** gegeben. Bei der expliziten Darstellung können wir jedes beliebige Folgenglied ausrechnen, indem wir die gewünschte Zahl für n einsetzen:

$$n=1 \implies a_1=2\cdot 1+1=3.$$

$$n=2 \implies a_2=2\cdot 2+1=5.$$

$$n=3 \implies a_3=2\cdot 3+1=7.$$

$$n = 42 \implies a_{42} = 2 \cdot 42 + 1 = 85.$$

Kurz geschrieben: $\langle a_n \rangle = \langle 3, 5, 7, \ldots \rangle$.

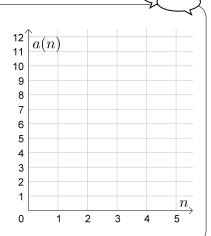
Mit der expliziten Darstellung wissen wir, wie es weiter geht.

Folge als Funktion

Erinnere dich, dass eine Funktion jedem Element der Definitionsmenge genau einen Wert in der Wertemenge zuordnet.

Eine Folge $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$ ist also eine Funktion a mit Definitionsmenge $\{1, 2, 3, \ldots\}$ und Funktionswerten $a(n) = a_n$.

Welche Art von Funktion steckt hinter $a_n = 2 \cdot n + 1$? Zeichne die ersten fünf Folgenglieder rechts ein.



Beispiel 2.2. Eine andere Möglichkeit zur eindeutigen Festlegung der Folge

ist die rekursive Darstellung. Die rekursive Darstellung besteht aus zwei Teilen:

- 1) Anfangsbedingung: $a_1 = 3$
- 2) Rekursionsvorschrift: $a_{n+1} = a_n + 2, n \ge 1$

Die Anfangsbedingung legt fest, bei welchem Wert die Folge startet. Die Rekursionsvorschrift enthält das Muster, wie wir von einem zum nächsten Folgenglied kommen ("immer +2 rechnen").

$$n = 1 \implies a_2 = a_1 + 2 = 3 + 2 = 5.$$
 $n = 2 \implies a_3 = a_2 + 2 = 5 + 2 = 7.$
 $n = 3 \implies a_4 = a_3 + 2 = 7 + 2 = 9.$
 \vdots

Um in der rekursiven Darstellung das 42. Folgenglied zu berechnen, müssen wir alle vorhergehenden Folgenglieder berechnen:

$$a_{42} = a_{41} + 2 = a_{40} + 4 = a_{39} + 6 = \dots = a_1 + 82 = 85.$$





Die Bezeichnungen "explizit" und "rekursiv" kommen ursprünglich aus dem Lateinischen: "recurrere" bedeutet zurücklaufen: Um ein Folgenglied zu berechnen, musst du bei der rekursiven Darstellung bis zur Anfangsbedingung "zurücklaufen".

Im Gegensatz dazu ist bei einer expliziten Darstellung das Folgenglied a_n direkt ("explizit") ausgedrückt. Wir müssen zur Berechnung nicht auf die vorherigen Glieder zurückgreifen.

Aufgabe 2.3. Übersetze die folgenden Beschreibungen jeweils in eine rekursive Folgendarstellung.

Kannst du auch eine explizite Darstellung finden?

- a) "Das erste Folgenglied ist 16. Von einem Glied zum nächsten wird immer 3 abgezogen."
- **b)** "Alle Folgenglieder sind 23."
- c) "Jedes Folgenglied ist doppelt so groß wie das vorherige. Das erste Glied ist 5."

Anfangsbedingungen



Es gibt auch Folgen, bei denen die Rekursionsvorschrift nicht nur auf das vorherige Folgenglied zurückgreift. Zum Beispiel:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n \ge 1.$$

Erkläre, warum du zur eindeutigen Festlegung dieser Folge mehr als nur a_1 kennen musst.

Beispiel 2.4. Die Folge $\langle f_n \rangle$ mit der rekursiven Darstellung

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, n \ge 1,$$

heißt Fibonacci-Folge¹ Jedes Folgenglied ist also die Summe der beiden vorherigen Folgenglieder:

$$n = 1 \implies f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2.$$
 $n = 2 \implies f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3.$
 $n = 3 \implies f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5.$
 $n = 4 \implies f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8.$
:

Es gibt (mathematisch fortgeschrittene) Methoden, um aus der rekursiven Darstellung einer Folge eine explizite Darstellung zu berechnen. Für die Fibonacci-Folge kann man damit folgende explizite Darstellung berechnen:

$$f_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$
 mit $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618...$ und $\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$

Die Zahl φ ist der sogenannte "Goldene Schnitt".

Probiere die Formel mit dem Taschenrechner aus.

Explizite Darstellung der Fibonacci-Zahlen



Rechne für $f_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$ nach, dass tatsächlich $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ und $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ gilt.

Hinweis: Überlege dir zuerst, dass $\varphi^2 = \varphi + 1$ und $\psi^2 = \psi + 1$.

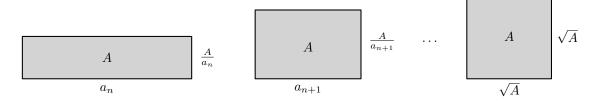
Babylonisches Wurzelziehen



Schon vor über 3000 Jahren kannte die Menschheit eine Methode nur mit den Grundrechnungsarten die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl A beliebig genau zu berechnen, nämlich:

- 1) Starte mit einer beliebigen positiven Zahl a_1 .
- 2) Berechne rekursiv $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{A}{a_n}\right)$, $n \ge 1$. a_{n+1} ist also der arithmetische Mittelwert von a_n und $\frac{A}{a_n}$. Probiere das Verfahren aus, um die Wurzel aus A = 2 zu berechnen.

Das wievielte Folgenglied ist schon auf 9 Nachkommastellen genau $\sqrt{2} = 1,414\,213\,562...$? Kannst du einen Zusammenhang zwischen dem folgenden Bild und dem Verfahren erkennen?

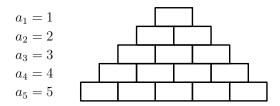


Erkläre, warum a_{n+1} und $\frac{A}{a_{n+1}}$ immer zwischen a_n und $\frac{A}{a_n}$ liegen.

Tatsächlich nähern sich die Rechtecke mit Flächeninhalt A dem Quadrat mit Flächeninhalt A beliebig genau an.

 $^{^1~}$ Diese wurde benannt nach Leonardo da Pisa (Sohn des Bonaccio \sim lateinisch "filius Bonacii" \sim "Fibonacci"), der im 12. und 13. Jhdt. n. Chr. in Italien lebte.

Aufgabe 2.5. Wir bauen aus Ziegelsteinen einen Turm auf. Die Anzahl der Ziegelsteine in der n-ten Reihe (von oben gezählt) ist a_n :



Gib ein Bildungsgesetz der Folge in expliziter und in rekursiver Darstellung an.

Wie viele Ziegelsteine sind notwendig, um einen Turm mit 100 Stockwerken zu bauen? Bei solchen Fragestellungen geht es um die Berechnung einer sogenannten **Teilsumme**. Für die obersten 5 Stockwerke sind zum Beispiel

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 15$$
 Ziegelsteine

notwendig.





Die Summe der ersten n Glieder einer Folge $\langle a_n \rangle$ heißt auch n-te Teilsumme der Folge.

Wir kürzen sie mit s_n ab, also

Es wird nur ein Teil der Folge aufsummiert.

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

Beispiel 2.6. Für die Folge der Ziegelsteine $\langle a_n \rangle = \langle 1, 2, 3, 4, \ldots \rangle$ gilt

$$s_1 = a_1 = 1$$

 $s_2 = a_1 + a_2 = 3$
 $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 6$
 $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10$
:

Die zugehörige Folge der Teilsummen $\langle s_n \rangle$ beginnt also mit

$$\langle s_n \rangle = \langle 1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots \rangle$$

Es gilt übrigens

$$s_{100} = 1 + 2 + \dots + 99 + 100 = 5050.$$

Hast du eine Idee warum?

3. Arithmetische Folgen und Reihen

Arithmetische Folge



Bei einer **arithmetischen Folge** $\langle a_n \rangle$ ist die Differenz d zweier aufeinander folgender Glieder immer gleich groß:

$$a_2 - a_1 = d$$
, $a_3 - a_2 = d$, $a_4 - a_3 = d$, ... $a_{n+1} - a_n = d$, $n \ge 1$.

Beispiel 3.1. Bei der Folge $\langle a_n \rangle$ mit expliziter Darstellung

$$a_n = 3 \cdot n - 1, \quad n > 1,$$

kommen wir von einem zum nächsten Folgenglied, indem wir 3 addieren:

Die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder ist also immer d=3.

Das können wir auch mit der expliziten Darstellung allgemein nachrechnen:

$$a_{n+1} - a_n = [3 \cdot (n+1) - 1] - [3 \cdot n - 1] = [3 \cdot n + 2] - 3 \cdot n + 1 = 3.$$

Es handelt sich also um eine arithmetische Folge. Eine rekursive Darstellung der Folge ist

$$a_1 = 2$$
, $a_{n+1} = a_n + 3$, $n \ge 1$.

Beispiel 3.2. Die Folge

$$<5, 3, 1, -1, -3, \ldots>$$

ist auch eine arithmetische Folge. Die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder ist konstant:

$$d = a_{n+1} - a_n = -2.$$





Erkläre, wie du mit a_1 und d direkt das 58. Folgenglied berechnen kannst.

Arithmetische Folge



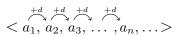
Rekursives Bildungsgesetz jeder arithmetischen Folge $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$ mit Differenz d:

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Explizites Bildungsgesetz der arithmetischen Folge $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$ mit Differenz d:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Kannst du die Formel erklären?



Beispiel 3.3. Eine arithmetische Folge enthält die beiden Folgenglieder $a_{11} = 2$ und $a_{27} = 10$.

- a) Gib ein Bildungsgesetz der Folge in expliziter Darstellung und in rekursiver Darstellung an.
- b) Berechne das 86. Folgenglied.
- c) Welches Folgenglied hat den Wert 23?

Lösung.

a) Vom 11. Folgenglied bis zum 27. Folgenglied sind es insgesamt 27 - 11 = 16 Schritte. Da es sich um eine arithmetische Folge handelt, gilt

$$a_{27} = a_{11} + 16 \cdot d \iff d = \frac{a_{27} - a_{11}}{16} = 0.5.$$

Mit der Differenz d können wir das erste Folgenglied berechnen:

$$a_{11} = a_1 + 10 \cdot d \iff a_1 = a_{11} - 10 \cdot d = -3.$$

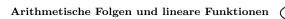
Explizite Darstellung: $a_n = -3 + (n-1) \cdot 0.5$

Rekursive Darstellung: $a_1 = -3$, $a_{n+1} = a_n + 0.5$, $n \ge 1$.

- **b)** $a_{86} = a_1 + 85 \cdot d = -3 + 85 \cdot 0.5 = 39.5.$
- c) Wir lösen die Gleichung $a_n = 23$ nach n auf:

$$-3 + (n-1) \cdot 0.5 = 23$$
 \iff $(n-1) \cdot 0.5 = 26$ \iff $n = 53$.

Es gilt also $a_{53}=23$. Das 53. Folgenglied hat den Wert 23.



Was wird mit

$$d = \frac{a_{27} - a_{11}}{27 - 11} = \frac{8}{16} = 0.5$$

im nebenstehenden Bild berechnet?

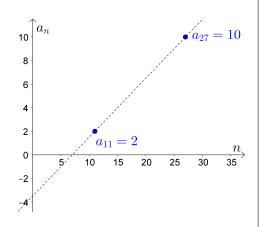
Die explizite Darstellung einer arithmetischen Folge ist

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = n \cdot d + a_1 - d.$$

Wie groß ist die Steigung der linearen Funktion a mit

$$a(n) = n \cdot d + a_1 - d,$$

und wo schneidet ihr Graph die vertikale Achse?



Warum arithmetische Folge?



Erkläre, warum jedes Folgenglied einer arithmetischen Folge der arithmetische Mittelwert der beiden Nachbarglieder ist. Kurz:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_n$$

Beispiel 3.4.

- a) Erkläre, warum $a_n = n$ eine arithmetische Folge ist.
- b) Berechne die Summe der ersten 100 Folgenglieder.

Lösung. a) Die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder ist immer gleich groß:

$$a_{n+1} - a_n = (n+1) - n = 1.$$

Es handelt sich also um eine arithmetische Folge mit Differenz d=1.

b) Wir schreiben die Summe einmal in normaler Reihenfolge und einmal in verkehrter Reihenfolge. Danach addieren wir die beiden Gleichungen:

$$s_{100} = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$$

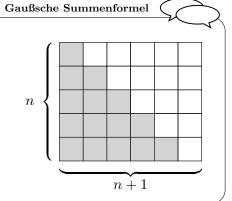
$$s_{100} = 100 + 99 + 98 + \dots + 1$$

$$2 \cdot s_{100} = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 \implies s_{100} = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050.$$

Versuche die gleiche Rechnung mit $s_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ durchzuführen. Tatsächlich beträgt die Summe der ersten n positiven, natürlichen Zahlen

$$s_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \, .$$

Die Formel ist rechts veranschaulicht. Versuche die Skizze in eigenen Worten zu erklären.



Der gleiche "Trick" funktioniert immer dann, wenn die Differenz aufeinander folgender Glieder konstant ist, also bei arithmetischen Folgen.

Beispiel 3.5. Berechne $2 + 5 + 8 + 11 + \cdots + 176$.

Lösung. Jeder Summand ist immer um 3 größer als sein Vorgänger. Es handelt sich also um eine Teilsumme einer arithmetischen Folge. Wie viele Summanden sind es insgesamt?

Ein möglicher Ansatz: $2+3\cdot x=176\implies x=58$ Schritte vom ersten bis zum letzten Summanden. Es sind also insgesamt 59 Summanden.

$$s = 2 + 5 + 8 + \dots + 176$$

$$s = 176 + 173 + 170 + \dots + 2$$

$$2 \cdot s = 178 + 178 + 178 + \dots + 178$$

$$s = \frac{59 \cdot 178}{2} = 5251.$$

Arithmetische Reihe



Kannst du die folgenden Rechenschritte nachvollziehen?

$$\begin{array}{c}
s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \\
s_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1
\end{array} + \\
2 \cdot s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)$$

Die Summe der ersten n Folgenglieder einer arithmetischen Folge $\langle a_n \rangle$ mit Differenz d beträgt

$$s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}.$$

Erstes und letztes Folgenglied der arithmetischen Folge addieren und mit der halben Anzahl multiplizieren.

Beispiel 3.6. Eine arithmetische Folge ist in rekursiver Darstellung gegeben:

$$a_1 = 49, \quad a_{n+1} = a_n - 4, \quad n > 1.$$

Berechne $a_{17} + a_{18} + a_{19} + \cdots + a_{38}$.

Lösung. Aus der Rekursionsvorschrift können wir ablesen, dass die Differenz aufeinander folgender Glieder d = -4 ist. Also ist

$$a_{17} = a_1 + 16 \cdot d = 49 + 16 \cdot (-4) = -15$$
 und
 $a_{38} = a_1 + 37 \cdot d = 49 + 37 \cdot (-4) = -99.$

Wie viele Summanden sind es insgesamt?



Es sind nicht 38 - 17 = 21 Summanden, sondern einer mehr:

Von den ersten 38 Folgenglieder sind die ersten 16 Folgenglieder nicht in der Summe dabei.

Die Summe besteht also aus insgesamt 38 - 16 = 22 Summanden.

Da es sich um eine arithmetische Folge handelt, beträgt die Summe

$$a_{17} + a_{18} + a_{19} + \dots + a_{38} = (a_{17} + a_{38}) \cdot \frac{22}{2} = -1254.$$

Beispiel 3.7. Berechne die Summe aller fünfstelligen Zahlen, die durch 4 teilbar sind.

Lösung.

Kleinste fünfstellige Zahl, die durch 4 teilbar ist: $10\,000:4=2500$

 $10\,004:4=2501$

 $10\,008:4=2502$

:

Größte fünfstellige Zahl, die durch 4 teilbar ist: $99\,996: 4 = 24\,999$

Insgesamt gibt es also $24\,999 - 2499 = 22\,500$ fünfstellige Zahlen, die durch 4 teilbar sind. Sie bilden eine arithmetische Folge mit Differenz d=4. Ihre Summe beträgt

$$10\,000 + 10\,004 + 10\,008 + \dots + 99\,996 = (10\,000 + 99\,996) \cdot \frac{22\,500}{2} = 1\,237\,455\,000.$$

4. Geometrische Folgen und Reihen

Beispiel 4.1. Bei der Folge $\langle b_n \rangle$ mit expliziter Darstellung

$$b_n = 3 \cdot 2^n, \quad n \ge 1$$

kommen wir von einem zum nächsten Folgenglied, indem wir mit 2 multiplizieren:

Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder ist bei dieser Folge also immer q=2. Das können wir auch mit der expliziten Darstellung allgemein nachrechnen:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3 \cdot 2^{n+1}}{3 \cdot 2^n} = \frac{2 \cdot 2^{\varkappa}}{2^{\varkappa}} = 2.$$

Eine rekursive Darstellung der Folge ist also

$$b_1 = 3$$
, $b_{n+1} = b_n \cdot 2$, $n \ge 1$.

 ${\bf Geometrische\ Folge-Rekursive\ Darstellung}$

 $\Sigma \int \Pi \sin \int$

Bei einer **geometrischen Folge** $\langle b_n \rangle$ kommt man von einem zum nächsten Folgenglied, indem man immer mit dem gleichen Faktor q multipliziert. Kurz:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad n \ge 1.$$

${\bf Geometrische\ Folge-Quotient}$



Erkläre: Sind bei einer geometrischen Folge $\langle b_n \rangle$ alle Glieder von Null verschieden, dann ist der Quotient q aufeinander folgender Glieder immer gleich groß:

$$\frac{b_2}{b_1} = q,$$
 $\frac{b_3}{b_2} = q,$ $\frac{b_4}{b_3} = q,$... $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q,$ $n \ge 1.$

Was passiert, wenn bei einer geometrischen Folge ein Glied gleich Null ist?

Beispiel 4.2. Die Folge

$$< 96, 48, 24, 12, 6, \dots >$$

ist auch eine geometrische Folge. Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder ist konstant:

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = 0.5.$$





Erkläre, wie du mit b_1 und q direkt das 18. Folgenglied berechnen kannst.

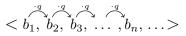
Geometrische Folge – Explizite Darstellung



Explizites Bildungsgesetz der geometrischen Folge $\langle b_1, b_2, b_3, \ldots \rangle$ mit Quotient q:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Kannst du die Formel erklären?



Beispiel 4.3. Eine geometrische Folge enthält die beiden Folgenglieder $b_3 = 72$ und $b_6 = 243$.

- a) Gib ein Bildungsgesetz der Folge in expliziter Darstellung und in rekursiver Darstellung an.
- b) Berechne das 9. Folgenglied.
- c) Ab welchem Folgenglied sind alle weiteren Folgenglieder größer als 100 000?

Lösung.

a) Vom 3. Folgenglied bis zum 6. Folgenglied sind es insgesamt 6-3=3 Schritte. Da es sich um eine geometrische Folge handelt, gilt

$$b_6 = b_3 \cdot q^3 \iff q = \sqrt[3]{\frac{b_6}{b_3}} = 1.5.$$

Mit dem Quotienten q können wir das 1. Folgenglied berechnen:

$$b_3 = b_1 \cdot q^2 \iff b_1 = \frac{b_3}{q^2} = 32.$$

Explizite Darstellung: $b_n = 32 \cdot 1,5^{n-1}$

Rekursive Darstellung: $b_1 = 32$, $b_{n+1} = b_n \cdot 1.5$, $n \ge 1$.

- **b)** $b_9 = b_1 \cdot q^8 = 32 \cdot 1,5^8 = 820,125.$
- c) Wir lösen die Ungleichung $b_n > 100\,000$ nach n auf:

$$32 \cdot 1,5^{n-1} > 100\,000$$

$$1,5^{n-1} > \frac{100\,000}{32}$$

$$\lg\left(1,5^{n-1}\right) > \lg\left(\frac{100\,000}{32}\right)$$

$$(n-1) \cdot \lg(1,5) > \lg\left(\frac{100\,000}{32}\right)$$

$$n > \frac{\lg\left(\frac{100\,000}{32}\right)}{\lg(1,5)} + 1 = 20,84...$$

lg ist streng monoton wachsend, also dreht sich > nicht um.

 $\lg(1,5) > 0$, also dreht sich > nicht um.

 $n > \frac{\sqrt{32}}{\log(1.5)} + 1 = 20.84...$

Da der Quotient q = 1,5 größer als 1 ist, werden die Folgenglieder immer größer. Es sind also ab dem 21. Folgenglied alle weiteren Folgenglieder größer als $100\,000$.

Geometrische Folgen und Exponentialfunktionen

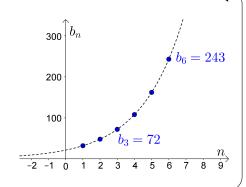
Kommt dir diese Art von Wachstum bekannt vor? Die explizite Darstellung einer geometrischen Folge ist

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = b_1 \cdot q^{-1} \cdot q^n.$$

Wo schneidet der Graph der Exponentialfunktion

$$b(n) = b_1 \cdot q^{-1} \cdot q^n = \frac{b_1}{q} \cdot q^n$$

die vertikale Achse?



Alternierende Folge



Welchen Wert hat der Quotient q der folgenden geometrischen Folge?

Die Aufgabenstellung ist *nicht* eindeutig lösbar. Es gibt zwei richtige Lösungen:

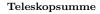
$$<1, 2, 4, 8, 16, \ldots> \qquad \text{und} \qquad <1, -2, 4, -8, 16, \ldots> ...>$$

Die Gleichung $q^2 = 4$ hat ja auch zwei reelle Lösungen: $q_1 = 2$ und $q_2 = -2$.

Eine Folge, bei der benachbarte Folgenglieder immer ein unterschiedliches Vorzeichen haben, nennen wir auch **alternierende Folge**.

Das Vorzeichen wechselt ("alterniert") immer zwischen "+" und "-".

Wie bei arithmetischen Folgen können wir auch bei geometrischen Folgen die Summe der ersten n Folgenglieder schnell berechnen. Was ist zum Beispiel $1+2+4+8+\cdots+1024$?





Rechne nach, dass

$$(1+q+q^2)\cdot (q-1) = q^3-1$$
 und $(1+q+q^2+q^3)\cdot (q-1) = q^4-1$.

Erkennst du das Muster? Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt

$$(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})\cdot(q-1) = q+q^2+\cdots+q^{n-1}+q^n -1-q-q^2-\cdots-q^{n-1} = q^n-1.$$

Wenn $q \neq 1$ ist, dann gilt also

$$\underbrace{1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}}_{n \text{ Summanden}} = \frac{q^n-1}{q-1}.$$

Wie groß ist die Summe, wenn q = 1 ist?

Beispiel 4.4.

a)
$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 1024 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10} = \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 2^{11} - 1 = 2047$$

b)
$$4 + 40 + 400 + 4000 + \dots + 4\,000\,000 = 4 \cdot (1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^6) = 4 \cdot \frac{10^7 - 1}{10 - 1} = 4\,444\,444$$

eometrische Reihe $\frac{\Sigma}{\Pi}$

Die Summe der ersten n Folgenglieder einer geometrischen Folge $\langle b_n \rangle$ mit Quotient q beträgt

$$s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1.$$

Beispiel 4.5. Berechne die Summe der ersten 20 Folgenglieder der geometrischen Folge $\langle b_n \rangle = \langle 3, 6, 12, 24, \ldots \rangle$. Berechne auch $b_7 + b_8 + \cdots + b_{29}$.

Lösung. Der Quotient der geometrischen Folge ist $q=\frac{b_2}{b_1}=2$. Die Summe der ersten 20 Folgenglieder ist also

$$s_{20} = b_1 \cdot \frac{q^{20} - 1}{q - 1} = 3 \cdot \frac{2^{20} - 1}{2 - 1} = 3145725.$$

Um $b_7 + b_8 + \cdots + b_{29}$ mit der Formel zu berechnen, müssen wir nur die Anzahl der Summanden (n = 23), den Quotienten (q = 2) und den ersten Summanden b_7 kennen:

$$b_7 = b_1 \cdot q^6 = 3 \cdot 2^6 = 192.$$

Die Summe der 23 aufeinander folgenden Glieder der geometrischen Folge ist dann

$$b_7 + b_8 + \dots + b_{29} = b_7 \cdot \frac{q^{23} - 1}{q - 1} = 192 \cdot \frac{2^{23} - 1}{2 - 1} = 1610612544.$$

5. Weitere Aufgabenstellungen

Aufgabe 5.1. Gib jeweils ein Bildungsgesetz der arithmetischen Folge in expliziter Darstellung und in rekursiver Darstellung an.

a)
$$\langle x_n \rangle = \langle 5, 8, 11, 14, ... \rangle$$

a)
$$\langle x_n \rangle = \langle 5, 8, 11, 14, \ldots \rangle$$
 b) $\langle y_n \rangle = \langle 4, \frac{5}{2}, 1, -\frac{1}{2}, \ldots \rangle$ **c)** $\langle z_n \rangle = \langle 42, 42, 42, \ldots \rangle$

c)
$$\langle z_n \rangle = \langle 42, 42, 42, \ldots \rangle$$

Aufgabe 5.2. Ermittle jeweils die fehlende Größe der durch das Bildungsgesetz $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ gegebenen arithmetischen Folge.

a)
$$a_1 = 6$$

$$d = -\frac{1}{2}$$

$$n = 42$$

a)
$$a_1 = 6$$
 $d = -\frac{1}{2}$
 $n = 42$
 $a_{42} =$

 b) $a_1 = 0.5$
 $d = 2$
 $n =$
 $a_n = 12.5$

 c) $a_1 = -3$
 $d =$
 $n = 4$
 $a_4 = 3$

 d) $a_1 =$
 $d = 0.1$
 $n = 51$
 $a_{51} = 1$

b)
$$a_1 = 0.5$$

$$d=2$$

$$a_n = 12,5$$

c)
$$a_1 = -3$$

$$n=4$$

$$a_4 = 3$$

$$n = 51$$

$$a_{51} = 1$$

Aufgabe 5.3. Das 7. Glied einer arithmetischen Folge ist −5 und das 15. Glied ist 19. Gib ein Bildungsgesetz der Folge $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$ in expliziter Darstellung und in rekursiver Darstellung an.

Aufgabe 5.4. Berechne das Folgenglied a_{314} der arithmetischen Folge

$$a_1 = 1294$$
, $a_{n+1} = a_n - 4$, $n \ge 1$.

Aufgabe 5.5. Berechne die Summe der ersten 25 Folgenglieder der arithmetischen Folge $(1, 4, 7, 10, \ldots)$.

Aufgabe 5.6. Gegeben ist die arithmetische Folge (8, 6, 4, 2, ...).

Für welche Zahl n ist die Summe der ersten n Folgenglieder -252?

Aufgabe 5.7. Gesucht sind drei aufeinander folgende Glieder einer arithmetischen Folge. Ihre Summe ist 18 und ihr Produkt ist 192. Bestimme die drei Folgenglieder.

Aufgabe 5.8. Michael weiß ohne nachzurechnen sofort, dass 1+3+5+7+9=25 ist.

Dazu zeichnet er einfach das nebenstehende Bild. Kannst du seine Idee erklären?

Berechne nun selbst $1+3+5+7+\cdots+99$.



Aufgabe 5.9. Gib ein Bildungsgesetz der geometrischen Folge in expliziter Darstellung und in rekursiver Darstellung an.

a)
$$\langle x_n \rangle = \langle 4, 12, 36, 108, \dots \rangle$$

b)
$$\langle y_n \rangle = \langle 16, -8, 4, -2, \ldots \rangle$$

a)
$$\langle x_n \rangle = \langle 4, 12, 36, 108, \ldots \rangle$$
 b) $\langle y_n \rangle = \langle 16, -8, 4, -2, \ldots \rangle$ c) $\langle z_n \rangle = \langle 7680, 960, 120, 15, \ldots \rangle$

Aufgabe 5.10. Ermittle jeweils die fehlende Größe der durch das Bildungsgesetz $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ gegebenen geometrischen Folge.

a)
$$b_1 = \frac{1}{2}$$

$$q = 2$$

$$n = 7$$

a)
$$b_1 = \frac{1}{2}$$
 $q = 2$
 $n = 7$
 $b_7 =$

 b) $b_1 = 3$
 $q = -\frac{1}{3}$
 $n =$
 $b_n = -\frac{1}{9}$

 c) $b_1 = 0.5$
 $q =$
 $n = 5$
 $b_5 = 8$

 d) $b_1 =$
 $q = 3$
 $n = 701$
 $b_{701} = 3^{500}$

b)
$$b_1 = 3$$

$$q = -\frac{1}{3}$$

$$n = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$b_n = -\frac{1}{9}$$

c)
$$b_1 = 0.5$$

$$q = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$n = 701$$

$$b_{701} = 3^{50}$$

Aufgabe 5.11. Eine geometrische Folge enthält die beiden Folgenglieder $b_3 = -40$ und $b_8 = 1280$.

- a) Gib ein Bildungsgesetz der Folge in expliziter Darstellung und in rekursiver Darstellung an.
- b) Berechne die Summe der ersten zehn Folgenglieder.

Aufgabe 5.12. Erkläre, warum jede konstante Folge $\langle c, c, c, \ldots \rangle$ sowohl eine arithmetische Folge als auch eine geometrische Folge ist.

Aufgabe 5.13. Erkläre, warum die Folge $\langle a_n \rangle = \langle 1, 2, 4, 6, \ldots \rangle$ weder eine arithmetische Folge noch eine geometrische Folge sein kann.

Aufgabe 5.14. Du eröffnest ein Sparbuch mit $400 \in \text{Kapital}$, das effektiv mit 1,85 % p. a. verzinst wird. Mit b_n wird das Kapital nach n Jahren bezeichnet.

- a) Erkläre, warum $\langle b_n \rangle$ eine geometrische Folge ist.
- b) Gib ein explizites und ein rekursives Bildungsgesetz der Folge an.

Aufgabe 5.15. Ein aus einer Höhe von 2 m über dem Boden fallen gelassener Hartgummiball springt nach jedem Aufprall jeweils wieder auf 85% seiner vorhergehenden Fallhöhe hoch.

- a) Erstelle ein explizites Bildungsgesetz für die Höhe h_n , die der Ball nach dem n-ten Bodenkontakt erreicht.
- b) Berechne diejenige Höhe, auf die der Ball nach 7 Bodenkontakten springt.
- c) Ermittle, wie viel Prozent der ursprünglichen Höhe der Ball nach dem 5. Bodenkontakt erreicht.

Aufgabe 5.16. In einem Labor wird die Lichtdurchlässigkeit von 5 mm dicken Glasscheiben geprüft. Man stellt fest, dass eine derartige Scheibe die Intensität des Lichts um 3,4 % reduziert. Es werden n aufeinander gelegte Glasscheiben mit Licht der Intensität I_0 bestrahlt.

- a) Erstelle ein rekursives Bildungsgesetz für die Intensität I_n , die das Licht nach der n-ten Scheibe noch aufweist.
- b) Ermittle, wie viel Prozent der ursprünglichen Intensität noch vorhanden sind, wenn das Licht durch 8 derartige Scheiben durchgeht.
- c) Ermittle, um wie viel Prozent die ursprünglichen Intensität beim Durchgang des Lichts durch 10 derartige Scheiben reduziert wird.

Aufgabe 5.17. Der Legende nach wünschte sich der Erfinder des Schachspiels als Belohnung vom König Weizenkörner: Auf das 1. Feld am Schachbrett wünschte er sich 1 Korn, auf das 2. Feld 2 Körner, auf das 3. Feld 4 Körner, auf das 4. Feld 8 Körner . . .

Mit jedem Feld sollte sich die Anzahl der Körner verdoppeln, bis alle 64 Schachfelder belegt sind. Angenommen die gesamte Menge an Weizenkörnern am Schachbrett wird fair unter 7,5 Milliarden Menschen aufgeteilt. Welche Gesamtmasse an Weizenkörnern würde jeder Mensch erhalten?

1000 Weizenkörner haben eine Masse von rund 50 g.

Aufgabe 5.18. \checkmark Von einer arithmetischen Folge habe ich die ersten n Folgenglieder addiert. Ich verrate nur so viel: Der größte Summand ist 194, die Summe ist 2786 und die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder ist immer 7. Wie groß ist n? Was ist der kleinste Summand?

Aufgabe 5.19. In einer arithmetischen Folge ist die Summe der ersten 4 Zahlen 26. Die Summe der Quadrate dieser Zahlen ist 214. Ermittle die ersten 4 Glieder dieser Folge.

Aufgabe 5.20. \triangleleft Zwischen 2 Zahlen u und v sind m weitere Zahlen so einzufügen, dass diese mit den beiden gegebenen Zahlen eine arithmetische Folge bilden.

Erstelle mit Hilfe von u, v und m einen Ausdruck zur Berechnung der konstanten Differenz d zweier Glieder dieser Folge.

Aufgabe 5.21. \diamondsuit Die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks bilden eine geometrische Folge. Erkläre, warum das Verhältnis der Hypotenuse c zur kürzeren Kathete a der goldene Schnitt ist, also

$$\frac{c}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

```
Pythagoras: a^2 + a^2 \cdot q^2 = a^2 \cdot q^4 \Rightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0 \Rightarrow q^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}
                                                                                                                                                                      ^2p \cdot n = s \cdot q, c = d 12.3
                                                                                                                                                                                       \frac{u-u}{1+m} = b 02.3
                                                                            S = S, S
                                                                                                                                                 5 : basmmand : Sammand : 5 : Kleinster Summand : 5
                                                                                                       5.17 Jeder Mensch würde rund 123t Weizenkörner erhalten.
                                                                                                 c) 10 Scheiben reduzieren die Intensität um rund 29,243 %.
                                                                                                   b) 8 Scheiben reduzieren die Intensität auf rund 75,826 %.
                                                                                    \partial \partial \partial_{t} \partial_{t} \cdot \partial_{t} I = I rabo ol ganganibadsgarah tim \partial \partial \partial_{t} \partial_{t} \cdot \partial_{t} I = I_{t+n} (s \partial I \cdot \partial_{t} I = I_{t+n}
                                               c) Nach dem 5. Bodenkontakt erreicht der Ball rund 52,2 % seiner ursprünglichen Höhe.
                                                                                                                                                                        \mathbf{m} \dots 40,0 \approx 7 h (d
                                                                                                                                                                        ^{n}8.0 · 2 = ^{n}4 (6 81.3
                                                                  Explizite Darstellung: b_n = 400 \cdot 1,0185^n (oder: b_n = 407,4 \cdot 1,0185^{n-1})
                                                         b) Rekursive Darstellung: b_{n+1} = b_n \cdot 1,0185, b_1 = 407,4 \in (oder: b_0 = 400 \in)
                                                       Aufzinsungsfaktor q=1,0185. Es handelt sich daher um eine geometrische Folge.
5.14 a) Pro Jahr steigt das Kapital um 1,85 % vom Kapital des vorherigen Jahrs. Es gilt also b_{n+1} = b_n \cdot q mit dem
                                                                      Es kann keine geometrische Folge sein, weil \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2, aber \frac{a_4}{a_3} = \frac{6}{4} = 1,5.
                                         5.13 Es kann keine arithmetische Folge sein, weil a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1, aber a_3 - a_2 = 4 - 2 = 2.
             Es ist eine geometrische Folge, weil der Quotient aufeinander folgender Glieder immer gleich groß ist. (q=1)
         5.12 Es ist eine arithmetische Folge, weil die Differenz aufeinander folgender Glieder immer gleich groß ist. (d=0)
                                                                                                                                                                               011/8 = 018 (d
   Rekursive Darstellung: b_1 = -10, a_{n+1} = b_n \cdot (2), n \ge 1
                                                                                                                     5.11 a) Explizite Darstellung: b_n = -10 \cdot (-2)^{n-1},
                                                                                                                                                                                \mathbf{d} \mathbf{d} \mathbf{d} \mathbf{d}
                                                                                                                                                                        c_1 = c_2, c_2 = c_3
                                                                                                                                                                                        \varepsilon = u (q
                                                                                                                                                                                   5.10 \text{ a} b_7 = 32
    Rekursive Darstellung: z_1 = 7680, a_{n+1} = z_n \cdot 0.125, a_{n+1} = 7680
                                                                                                                   c) Explisite Darstellung: z_n = 7680 \cdot 0.125^{n-1},
       b) Explizite Darstellung: y_n = 16, (6,0-) \cdot n^{n-1}, Rekursive Darstellung: y_1 = 16, y_2 = 16, y_3 = 16, y_4 = 16
                         Rekursive Darstellung: x_1 = 4, x_{n+1} = x_n \cdot 3, n \ge 1
                                                                                                                             5.9 a) Explixite Darstellung: x_n = 4 \cdot 3^{n-1},
                                                                          Nach dem gleichen Prinzip ist also 1+3+5+7+\cdots+99=50^2=2500.
                                                                                                    Es werden die 50 ungeraden Zahlen von 1 bis 100 addiert.
                                                        5.8 Er zählt die 25 Kästchen auf zwei verschiedene Arten: 1+3+5+7+9=5\cdot 5=25
                                                                                                                                                                                           {8,6,4} 7.3
                                                                                                                                                                                             12 = n 3.3
                                                                                                                                                                                                  5.5 925
                                                                                                                                                                                        24 d314 d314 €.8
                                                                                                                      5.3 Explixite Darstellung: a_n = -23 + (n-1) \cdot 3,
         Rekursive Darstellung: a_1 = -23, a_{n+1} = a_n + 3, n \ge 1
                                                                                                                                                                                    \vec{a}, 0 = i n (b
                                                                                                                                                                                        z=p (3
                                                                                                                                                                                        L = u (q
                                                                                                                                                                             \delta_{*} h I - = 2 h u (8 2.3
                                      c) Explisite Darstellung: z_n = 42, Rekursive Darstellung: z_1 = 42, z_{n+1} = z_n, n \ge 1
       Rekursive Darstellung: y_1 = t, y_{n+1} = y_n - 1, z = 1
                                                                                                                    b) Explizite Darstellung: y_n = 4 - (n-1) \cdot 1,5,
            Rekursive Darstellung: x_1 = 5, x_{n+1} = x_n + 3, n \ge 1
                                                                                                                      5.1 a) Explisite Darstellung: x_n = 5 + (n-1) \cdot 3,
```

