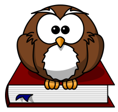
KOMPETENZHEFT – INTEGRALRECHNUNG

Inhaltsverzeichnis



Kompetenzmaterialien – Integralrechnung

In diesem Kompetenzheft wird ein möglicher Einstieg ins Thema „Integralrechnung“ vorgestellt.

Die mit ☆ markierten Inhalte sind für besonders interessierte Personen gedacht.

Die folgenden Materialien sind für den Einsatz im Unterricht konzipiert:

✓ Arbeitsblatt – Stammfunktionen (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Kulturtechnik Integration (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Bestimmtes Integral (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Physikalische Anwendungen der Differential- und Integralrechnung (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Rotationsvolumen (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Mittelwertsatz der Integralrechnung (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Bogenlänge (Ausarbeitung)

In der Aufgabensammlung – Integralrechnung befinden sich passende Übungsaufgaben.

Wir freuen uns über Feedback an mmf@univie.ac.at.

Datum: 21. Januar 2021.

1. Stammfunktionen

Erinnere dich, dass die Weg-Zeit-Funktion s, die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v und die Beschleunigung-Zeit-Funktion a eng miteinander zusammen hängen. Denn es gilt:

$$\boldsymbol{s'(t) = v(t)}$$
$$\boldsymbol{s''(t) = v'(t) = a(t)}$$

Ist der zurückgelegte Weg nach t Zeiteinheiten bekannt, können wir also durch Differenzieren die Momentangeschwindigkeit und die Momentanbeschleunigung zu jedem Zeitpunkt berechnen.

Nun wollen wir den Spieß umdrehen: Wir kennen die Momentangeschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt und wollen wissen, welchen Weg wir dann zurücklegen.
Wir suchen also eine Funktion s, deren Ableitung die gegebene Funktion v ist.

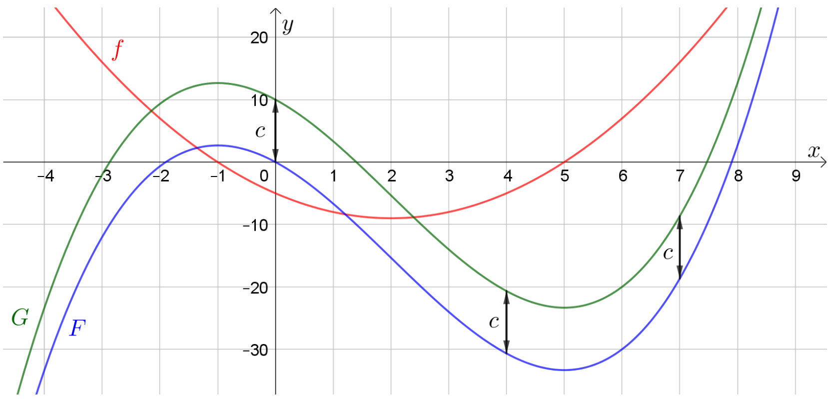
Arbeitsblatt – Stammfunktionen

Auf dem Arbeitsblatt – Stammfunktionen behandeln wir die folgenden Fragen:

Was ist eine **Stammfunktion**?

Wie viele Stammfunktionen kann eine Funktion haben?

Welche Stammfunktionen haben die elementaren Funktionen?



Beispiel 1.1. Ermittle jene Stammfunktion F von $f(x) = 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 10$, die $F(2) = -8$ erfüllt.

Lösung. Wir berechnen eine Stammfunktion von f:

$$F(x) = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 6 \cdot \frac{x^2}{2} + 10 \cdot x = x^3 - 3 \cdot x^2 + 10 \cdot x$$

Sie hat aber nicht die gewünschte Eigenschaft, denn

$$F(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 = 16.$$

Verschieben wir den Funktionsgraphen um 24 Einheiten nach unten, verläuft er durch den gewünschten Punkt $(2 \mid -8)$. Eine Gleichung der gesuchten Stammfunktion F ist also

$$F(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 10 \cdot x - 24.$$

□

Beispiel 1.2. Ermittle jene Stammfunktion F von $f(x) = \sin(x) + x$, die $F(0) = 5$ erfüllt.

Lösung. Jede Stammfunktion F von f kann in der Form

$$F(x) = -\cos(x) + \frac{x^2}{2} + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ angegeben werden.
Mit der Anfangsbedingung $F(0) = 5$ berechnen wir die gesuchte Stammfunktion:

$$F(0) = 5 \implies -\cos(0) + 0 + c = 5 \implies c = 6$$

Eine Gleichung der gesuchten Stammfunktion F ist also $F(x) = -\cos(x) + \frac{x^2}{2} + 6$. □

Beispiel 1.3. Die 2. Ableitung einer Funktion f hat die Gleichung $f''(x) = 12 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 4$.
Der Graph von f verläuft durch die Punkte $(-1 \mid 3)$ und $(1 \mid 1)$. Ermittle eine Gleichung von f.

Lösung. Jede Stammfunktion f' von f'' kann in der Form

$$f'(x) = 4 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ angegeben werden.
Jede Stammfunktion f von f' kann in der Form

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2 \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

mit $c, d \in \mathbb{R}$ angegeben werden.
Mit $f(-1) = 3$ und $f(1) = 1$ können wir die Koeffizienten c und d berechnen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}: f(-1) = 3 &\implies (-1)^4 + (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = 3 \implies -c + d = 5 \\
\mathrm{II}: f(1) = 1 &\implies c + d = 1 \\
&\implies 2 \cdot d = 6 \implies d = 3 \implies c = -2
\end{aligned}$$

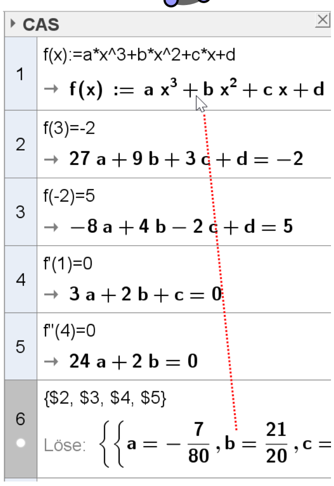
Eine Gleichung der gesuchten Funktion f ist also $f(x) = x^4 + x^3 - 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 3$. □

Technologieblatt – Umgekehrte Kurvenuntersuchungen

Auf dem Technologieblatt – Umgekehrte Kurvenuntersuchungen findest du eine Ansammlung von Übersetzungen folgender Form:

Eigenschaften des Funktionsgraphen von $f \longrightarrow$ Gleichungen für f, f', f''

Diese Übersetzungen helfen beim Lösen umgekehrter Kurvenuntersuchungen.



Beispiel 1.4. Eine Funktion f hat in ihrem Wendepunkt die Wendetangente $y = -3 \cdot x + 1$.
Die 2. Ableitung der Funktion hat die Gleichung $f''(x) = 4 \cdot x - 8$.
Ermittle eine Gleichung der Funktion f.

Lösung. Jede Stammfunktion f' von f'' kann in der Form

$$f'(x) = 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ angegeben werden.
Die Steigung von f an der Stelle $x = 2$ stimmt mit der Steigung $k = -3$ der Wendetangente überein:

$$f'(2) = -3 \implies 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + c = -3 \implies c = 5 \implies f'(x) = 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 5$$

Jede Stammfunktion f von f' kann in der Form

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 + 5 \cdot x + d$$

mit $d \in \mathbb{R}$ angegeben werden. An der Wendestelle von f hat f'' eine Nullstelle:

$$f''(x) = 0 \implies x = 2$$

Der Wendepunkt W liegt auf der Wendetangente:

$$y = -3 \cdot 2 + 1 = -5 \implies W = (2 \mid -5)$$

Der Wendepunkt W liegt auf dem Graphen von f:

$$f(2) = -5 \implies \frac{2}{3} \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + d = -5 \implies d = -\frac{13}{3}$$

Eine Gleichung der gesuchten Funktion f ist also $f(x) = \dfrac{2}{3} \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 + 5 \cdot x - \dfrac{13}{3}$. □

Beispiel 1.5. Ein Tennisball wird vom Donauturm in 150 m Höhe senkrecht Richtung Boden geworfen. Ohne Berücksichtigung von Luftwiderstand und Reibung beschleunigt der Tennisball konstant mit rund $a = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt $v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$.

1) Ermittle eine Gleichung der Beschleunigung-Zeit-Funktion a.
2) Ermittle eine Gleichung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v.
3) Ermittle eine Gleichung der Weg-Zeit-Funktion s.
4) Nach wie vielen Sekunden landet der Ball gemäß diesem Modell am Boden?

Lösung.

1) Die Beschleunigung ist konstant, also gilt: $a(t) = 9{,}81$.
2) Es gilt $v' = a$. Anders gesagt: v ist eine Stammfunktion von a.
Also ist $v(t) = 9{,}81 \cdot t + c$ mit einer passenden Zahl $c \in \mathbb{R}$.
Aus $v(0) = c$ folgt $c = v_0 = 2$.
Die Geschwindigkeit des Tennisballs in m/s nach t Sekunden ist also $v(t) = 9{,}81 \cdot t + 2$.
3) Es gilt $s' = v$. Anders gesagt: s ist eine Stammfunktion von v.
Also ist $s(t) = \frac{9{,}81}{2} \cdot t^2 + 2 \cdot t + d$ mit einer passenden Zahl $d \in \mathbb{R}$.
Aus $s(0) = 0$ folgt $d = 0$.
Der zurückgelegte Weg des Tennisballs in m nach t Sekunden ist also $s(t) = \dfrac{9{,}81}{2} \cdot t^2 + 2 \cdot t$.

In Physik hast du vielleicht die Formel $s = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t$ auswendig lernen müssen.

4) Wir lösen die Gleichung $s(t) = 150$.

$$\frac{9{,}81}{2} \cdot t^2 + 2 \cdot t = 150 \iff \frac{9{,}81}{2} \cdot t^2 + 2 \cdot t - 150 = 0 \iff t = -5{,}73\ldots\,\text{s} \;\text{ oder }\; t = 5{,}32\ldots\,\text{s}$$

Der Tennisball landet also nach rund 5,3 s am Boden. □

Unbestimmtes Integral

Beim Ermitteln von Stammfunktionen wird manchmal auch die Schreibweise

$$\int 2 \cdot x \, \mathrm{d}x = x^2 + c$$

verwendet. Der Ausdruck $\int \mathbf{2 \cdot x \, dx}$ wird dann **unbestimmtes Integral** genannt.

Die Schreibweise wird in der naturwissenschaftlichen Welt unterschiedlich verwendet:

1) Manche meinen mit $\int 2 \cdot x \, \mathrm{d}x$ *alle* möglichen Stammfunktionen von $f(x) = 2 \cdot x$.

2) Andere meinen mit $\int 2 \cdot x \, \mathrm{d}x$ *eine bestimmte* Stammfunktion von $f(x) = 2 \cdot x$.

Die Schreibweise führt damit zwangsläufig zu Missverständnissen.

Wir vermeiden sie deshalb und sprechen stattdessen vom Ermitteln *aller* Stammfunktionen oder *einer bestimmten* Stammfunktion.

Beispiel 1.6. Gesucht sind alle Stammfunktionen von $f(x) = \cos(42 \cdot x - 23)$.

1) Erkläre, warum die Funktion K mit

$$K(x) = \sin(42 \cdot x - 23)$$

keine Stammfunktion von f ist.

2) Ermittle alle Stammfunktionen von f.

Lösung.

1) Die Ableitung der Funktion K können wir mit der Kettenregel berechnen:

$$K'(x) = \cos(42 \cdot x - 23) \cdot 42 \neq f(x),$$

also ist K *keine* Stammfunktion von f.

2) Der Faktor 42 von der Kettenregel muss sich wegkürzen. Deshalb ist jede Funktion F mit

$$F(x) = \frac{1}{42} \cdot \sin(42 \cdot x - 23) + c$$

eine Stammfunktion von f.

□

Beispiel 1.7. Du nimmst ein Getränk aus dem Kühlschrank und lässt es geduldig vor dir stehen.
Die Temperatur T des Getränks hängt von der Zeitdauer t seit der Entnahme aus dem Kühlschrank ab. Die momentane Änderungsrate der Temperatur wird näherungsweise durch die folgende Funktion beschrieben:

$$T'(t) = 0{,}221 \cdot e^{-0{,}0116 \cdot t}$$

$t\ldots$ vergangene Zeit seit Entnahme aus dem Kühlschrank in min
$T'(t)\ldots$ momentane Änderungsrate der Temperatur zum Zeitpunkt t in °C/min

Zum Zeitpunkt der Entnahme aus dem Kühlschrank beträgt die Temperatur des Getränks 7 °C.

1) Ermittle eine Gleichung der Funktion T.
2) Berechne die Temperatur des Getränks nach 2 Stunden 20 Minuten.
3) Wie viele Minuten nach Entnahme beträgt die Temperatur des Getränks 10 °C?

Das Getränk befindet sich in einem Raum mit konstanter Temperatur T_U.
Wenn das Getränk unberührt im Raum stehen bleibt, nähert sich die Temperatur des Getränks der Temperatur T_U beliebig genau an.

4) Ermittle die Temperatur T_U.
5) Skizziere den Funktionsgraphen von T.

Lösung.

1) Jede Stammfunktion T von T' kann in der Form

$$T(t) = \frac{0{,}221}{-0{,}0116} \cdot e^{-0{,}0116 \cdot t} + c = -19{,}05... \cdot e^{-0{,}0116 \cdot t} + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ angegeben werden. Mit $T(0) = 7$ können wir die Konstante c berechnen.

$$-19{,}05... \cdot 1 + c = 7 \quad \Longrightarrow \quad c = 26{,}05...$$

Eine Gleichung von T ist also

$$T(t) = -19{,}05... \cdot e^{-0{,}0116 \cdot t} + 26{,}05...$$

2) Wir berechnen die Temperatur nach 140 Minuten.

$$T(140) = 22{,}29...\,°\mathrm{C}$$

Die Temperatur nach 2 Stunden 20 Minuten beträgt rund 22,3 °C.

3) Wir lösen die Gleichung $T(t) = 10$.

$$-19{,}05... \cdot e^{-0{,}0116 \cdot t} + 26{,}05... = 10 \iff e^{-0{,}0116 \cdot t} = 0{,}842... \iff t = \frac{\ln(0{,}842...)}{-0{,}0116} = 14{,}77...\,\mathrm{min}$$

Nach rund 14,8 Minuten beträgt die Getränketemperatur 10 °C.

4) Gesucht ist der Grenzwert $T_U = \lim\limits_{t\to\infty} T(t)$. Aus

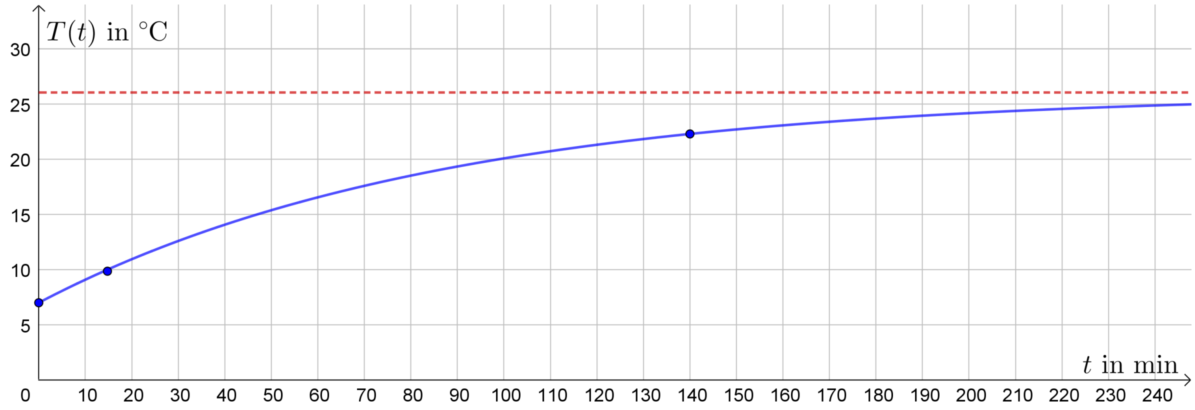
$$\lim_{t\to\infty} e^{-0{,}0116 \cdot t} = \lim_{t\to\infty} \left(e^{-0{,}0116}\right)^t = \lim_{t\to\infty} (0{,}988...)^t = 0$$

folgt

$$T_U = \lim_{t\to\infty} T(t) = -19{,}05... \cdot 0 + 26{,}05... = 26{,}05...\,°\mathrm{C}$$

Die Umgebungstemperatur beträgt rund 26 °C.

5) Wir skizzieren den Graphen mit den bekannten Punkten und dem Grenzwert:



□

Stammfunktionen mit der Kettenregel ermitteln

Ableitungen können wir mit den Ableitungsregeln systematisch ermitteln.
Stammfunktionen zu finden ist im Gegensatz dazu eine „Kunst“.
Wenn die Gleichung der gegebenen Funktion k die Form

$$k(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

hat, dann können wir mit der Kettenregel eine Stammfunktion K ermitteln:

$$K(x) = f(g(x))$$

Beispiel 1.8. Ermittle eine Stammfunktion von $k(x) = x \cdot \cos(x^2)$.

Lösung. Wir erkennen, dass die Ableitung der inneren Funktion $g(x) = x^2$ genau $g'(x) = 2 \cdot x$ ist.
Mit der Kettenregel können wir also eine Stammfunktion ermitteln:

$$x \cdot \cos(x^2) = \frac{g'(x)}{2} \cdot \cos(g(x)) = \frac{1}{2} \cdot [\sin(g(x))]' = \left[\frac{1}{2} \cdot \sin(x^2)\right]'$$

Die Funktion K mit $K(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(x^2)$ ist also eine Stammfunktion von k.

Wir ermitteln zur Probe die Ableitung von K:

$$K'(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos(x^2) \cdot (2 \cdot x) = x \cdot \cos(x^2) \checkmark$$

□

Stammfunktionen mit der Produktregel ermitteln

Die Produktregel beim Differenzieren ist $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Sie kann uns weiterhelfen, wenn wir

1) eine Stammfunktion von $f' \cdot g$ suchen und
2) eine Stammfunktion von $f \cdot g'$ ermitteln können.

Merkhilfe:

$$f' \cdot g = (f \cdot g)' - f \cdot g'$$

Aufleiten Ableiten

Dann verwenden wir nämlich:

$$f'(x) \cdot g(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - f(x) \cdot g'(x)$$

Diese Rechenmethode, bei der wir die Produktregel zur Ermittlung von Stammfunktionen verwenden, heißt **partielle Integration**.

Beispiel 1.9. Ermittle eine Stammfunktion von $p(x) = x \cdot \cos(x)$.

Lösung.

$$\underbrace{\cos(x)}_{=f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{=g(x)} = [\sin(x) \cdot x]' - \sin(x) \cdot 1 = [\sin(x) \cdot x]' + [\cos(x)]' = [x \cdot \sin(x) + \cos(x)]'$$

Die Funktion P mit $P(x) = x \cdot \sin(x) + \cos(x)$ ist also eine Stammfunktion von p.

Wir ermitteln zur Probe die Ableitung von P:

$$P'(x) = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) - \sin(x) = x \cdot \cos(x) \checkmark$$

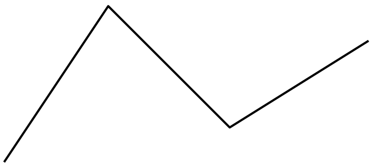
□

2. Kulturtechnik Integration

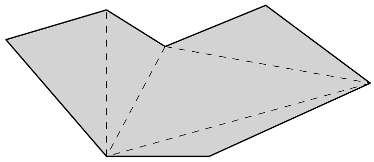
Gleich geht's rund ...

Mit eckigen Figuren haben wir schon lange zu tun. Wie würdest du rechnen?

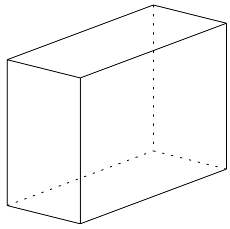
Länge = ?



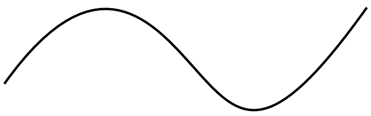
Flächeninhalt = ?

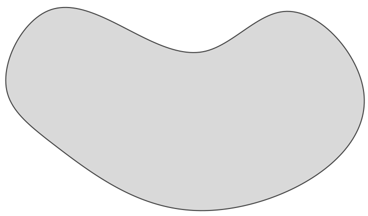


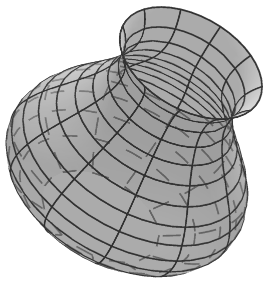
Volumen = ?



Mit der **Integralrechnung** bekommen wir auch runde Figuren in den Griff:

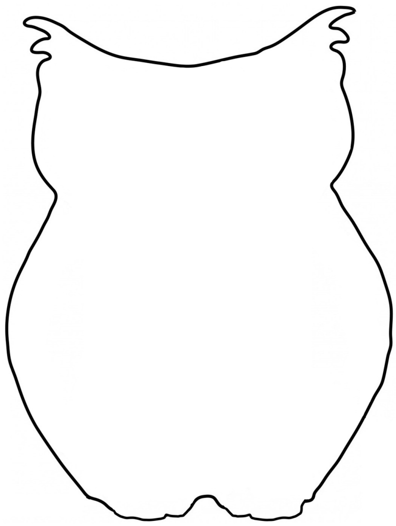






Do it yourself – Integration

Integrieren ist kinderleicht, wie uns ein Volksschüler aus Russland in seinem Video stolz erklärt.



Drucke dieses PDF auf 4 Transparentfolien aus.

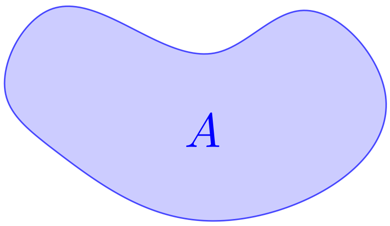
Verwende das grobe Raster, um erste Abschätzungen nach unten und nach oben für den Flächeninhalt der Figur auszurechnen.

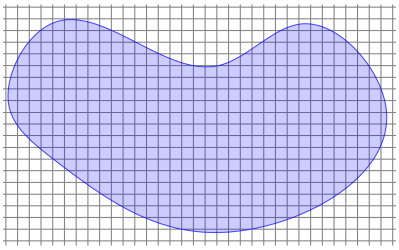
Wie kannst du diese Abschätzungen verbessern, indem du das feinere Raster darüber legst?

Um wie viel Prozent unterscheidet sich deine Abschätzung höchstens vom tatsächlichen Flächeninhalt?

Arbeitsblatt – Kulturtechnik Integration

Für die dargestellte Figur haben wir keine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A.





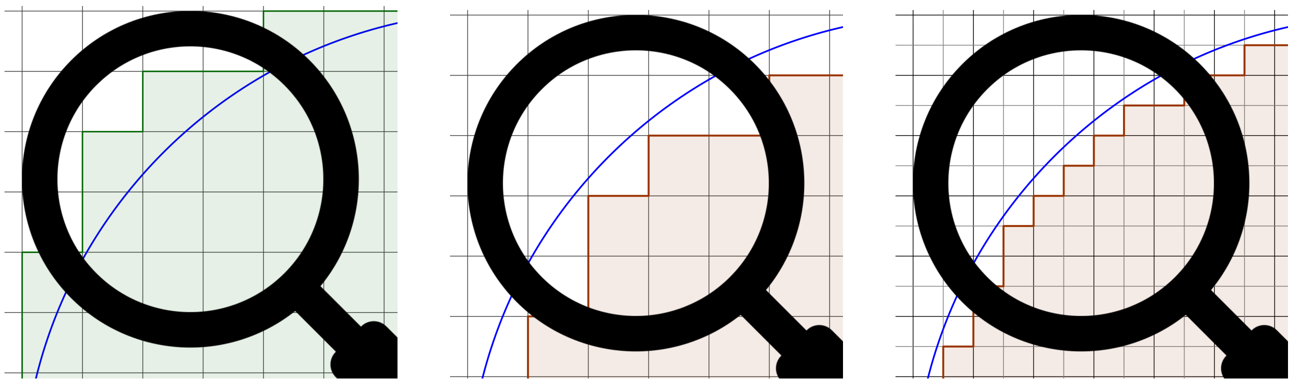
Auf dem Arbeitsblatt – Kulturtechnik Integration behandeln wir die folgenden Fragen:

Wie können wir den Flächeninhalt mit dem dargestellten Raster abschätzen?

Was ist eine **Obersumme**? Was ist eine **Untersumme**?

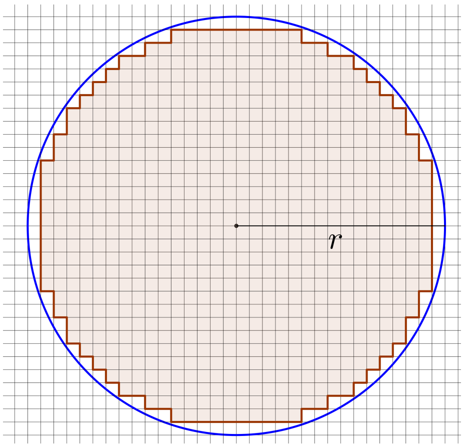
Was ist eine **Verfeinerung** des Rasters?

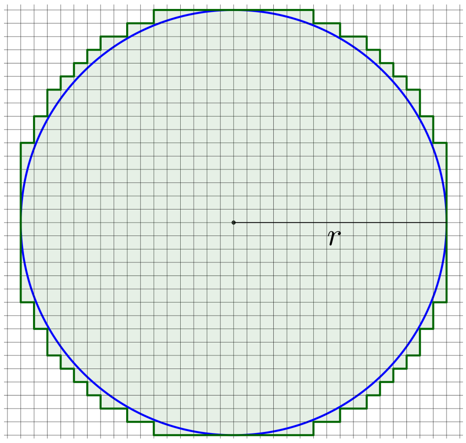
Wie verändern sich Obersumme und Untersumme, wenn das Raster verfeinert wird?



Flächeninhalt eines Kreises

Im folgenden Raster ist die Seitenlänge der kleinen Quadrate $\frac{1}{16} \cdot r$.
732 dieser Quadrate liegen vollständig innerhalb der Kreisfläche.
856 dieser Quadrate überlappen zumindest teilweise mit der Kreisfläche.





1) Erkläre, warum der Flächeninhalt des Kreises bestimmt größer als $\frac{732}{256} \cdot r^2$ ist.

2) Erkläre, warum der Flächeninhalt des Kreises sicher kleiner als $\frac{856}{256} \cdot r^2$ ist.

Der Flächeninhalt A eines Kreises mit Radius r liegt also im Bereich

$$2{,}859\,375 \cdot r^2 < A < 3{,}343\,75 \cdot r^2.$$

Je feiner das Raster, umso besser wird die Annäherung („Approximation“):

Seitenlänge eines Quadrats	Untere Abschätzung	Obere Abschätzung
$(1/16) \cdot r$	$2{,}859... \cdot r^2$	$3{,}343... \cdot r^2$
$(1/32) \cdot r$	$3{,}007... \cdot r^2$	$3{,}253... \cdot r^2$
$(1/64) \cdot r$	$3{,}072... \cdot r^2$	$3{,}199... \cdot r^2$
$(1/128) \cdot r$	$3{,}107... \cdot r^2$	$3{,}170... \cdot r^2$
$(1/256) \cdot r$	$3{,}125... \cdot r^2$	$3{,}156... \cdot r^2$
$(1/512) \cdot r$	$3{,}133... \cdot r^2$	$3{,}149... \cdot r^2$
$(1/1024) \cdot r$	$3{,}137... \cdot r^2$	$3{,}145... \cdot r^2$
$(1/2048) \cdot r$	$3{,}139... \cdot r^2$	$3{,}143... \cdot r^2$
$(1/4096) \cdot r$	$3{,}140... \cdot r^2$	$3{,}142... \cdot r^2$

Die Abschätzungen nähern sich beim Verfeinern immer mehr dem exakten Flächeninhalt an:

$$A = \pi \cdot r^2 \qquad \text{mit} \qquad \pi = 3{,}141\,592\,653...$$

Archimedes hat regelmäßige Vielecke als Näherung für die Fläche verwendet. Schreibt man dem Kreis ein regelmäßiges 96-Eck ein, erhält man die untere Schranke 3,139... für π und beim Umschreiben die obere Schranke 3,142.... Kannst du diese Werte mit dem Taschenrechner bestätigen? Freilich hatte Archimedes keinen Taschenrechner ...

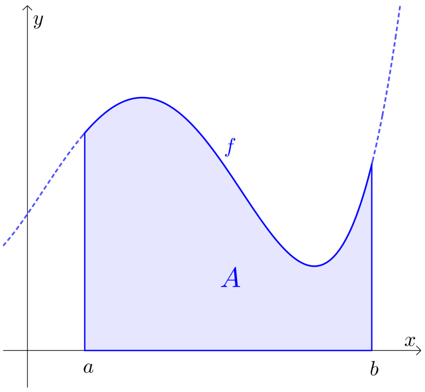
Arbeitsblatt – Kulturtechnik Integration

Den Rand von kurvigen Figuren können wir mit Funktionsgraphen beschreiben.

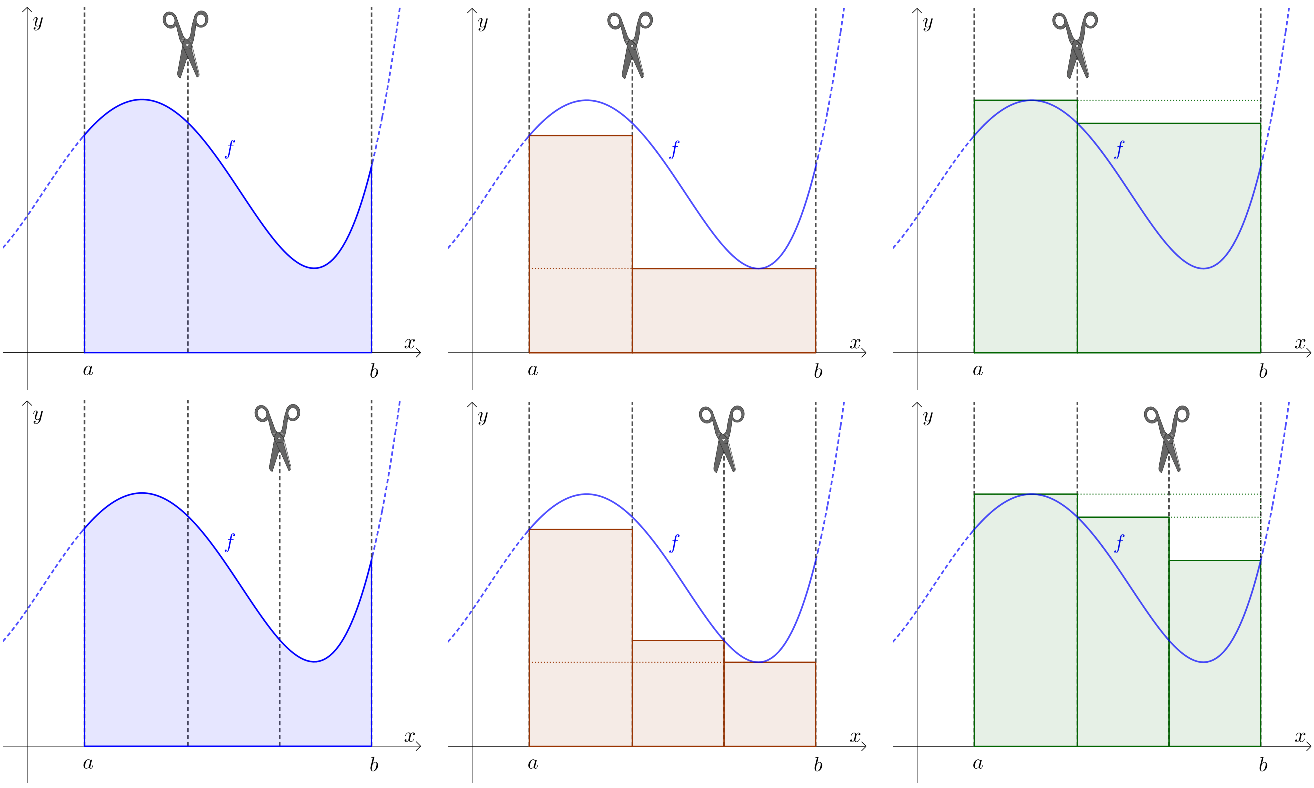
Auf dem Arbeitsblatt – Kulturtechnik Integration behandeln wir außerdem die folgenden Fragen:

Was ist hier eine **Untersumme**? Was ist eine **Obersumme**?

Warum gilt für den Flächeninhalt A, dass Untersumme $\leq A \leq$ Obersumme?



Was ist eine **Verfeinerung** der Zerlegung?



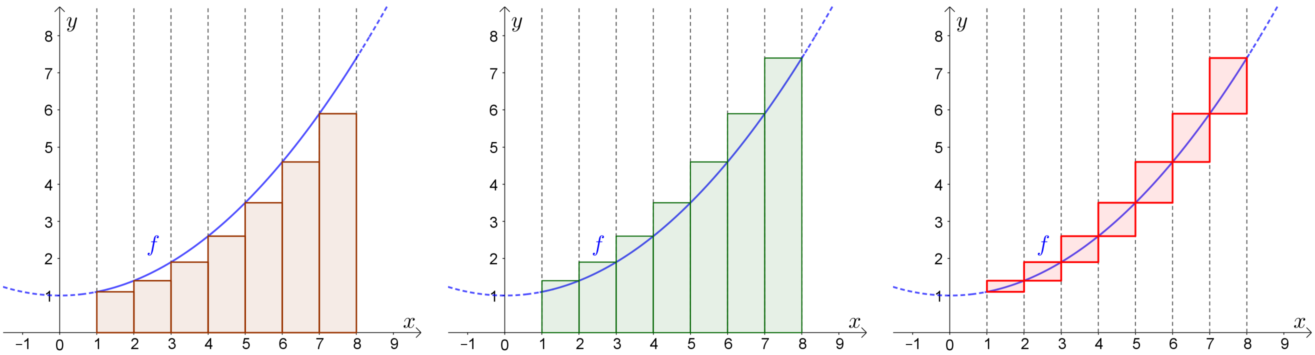
Warum können sich die Abschätzungen nur verbessern, wenn wir die Zerlegung verfeinern?

Arbeitsblatt – Kulturtechnik Integration

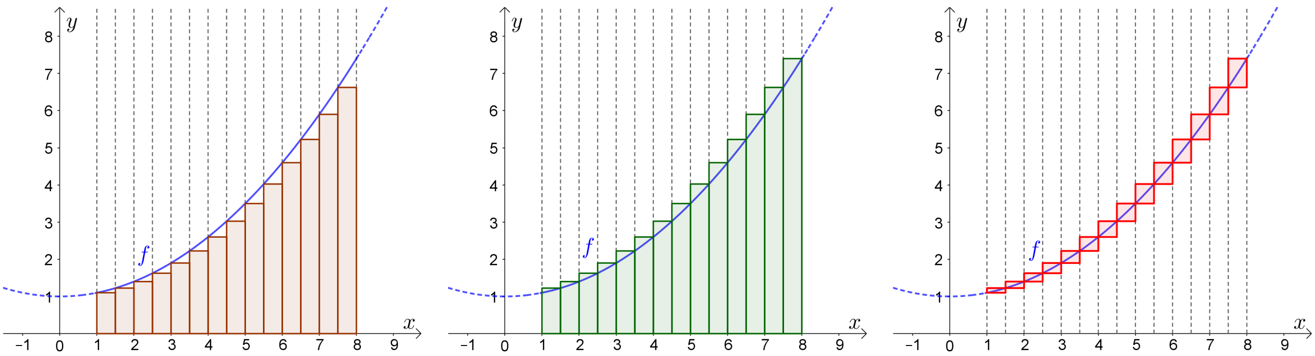
Wir untersuchen eine *monotone* Funktion auf dem Intervall $[a; b]$.

Auf dem Arbeitsblatt – Kulturtechnik Integration behandeln wir außerdem die folgenden Fragen:

Wie groß ist der Unterschied zwischen Untersumme und Obersumme, wenn wir das Intervall $[a; b]$ in n gleich breite Intervalle zerlegen?

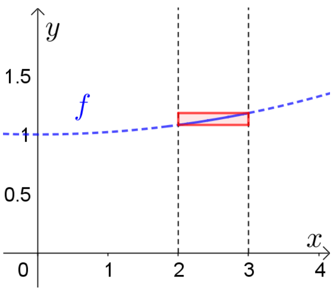


Was passiert mit den **Fehlerrechtecken** beim Verfeinern der Zerlegung?



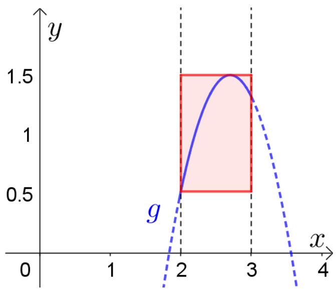
Warum können wir den Gesamtfehler beliebig klein machen, indem wir n entsprechend groß wählen?

Schwankung



Beschreibe in Worten, warum das Fehlerrechteck bei der linken Funktion kleiner ist als bei der rechten Funktion.

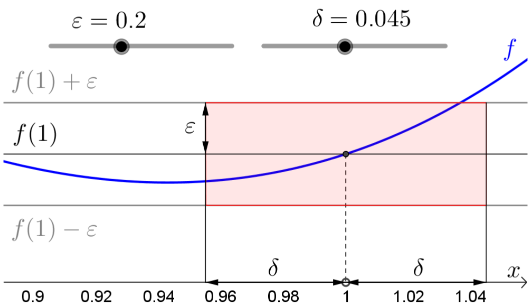
Du verfeinerst die Zerlegung durch einen Schnitt bei $x = 2{,}5$.

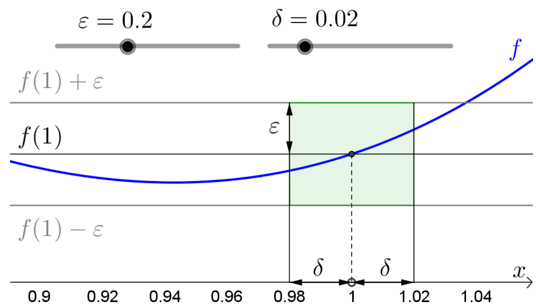


Bei welcher der beiden Funktionen wird der Gesamtfehler dadurch (absolut) stärker verkleinert?

Arbeitsblatt – Stetigkeit

Auf dem Arbeitsblatt – Stetigkeit zeigen wir dir, was **Stetigkeit** in der Mathematik genau bedeutet.





Fehlerabschätzung

Gegeben ist eine stetige Funktion auf einem Intervall.

Jeder Zerlegung des Intervalls in Teilintervalle ordnen wir eine Untersumme U und eine Obersumme O zu.

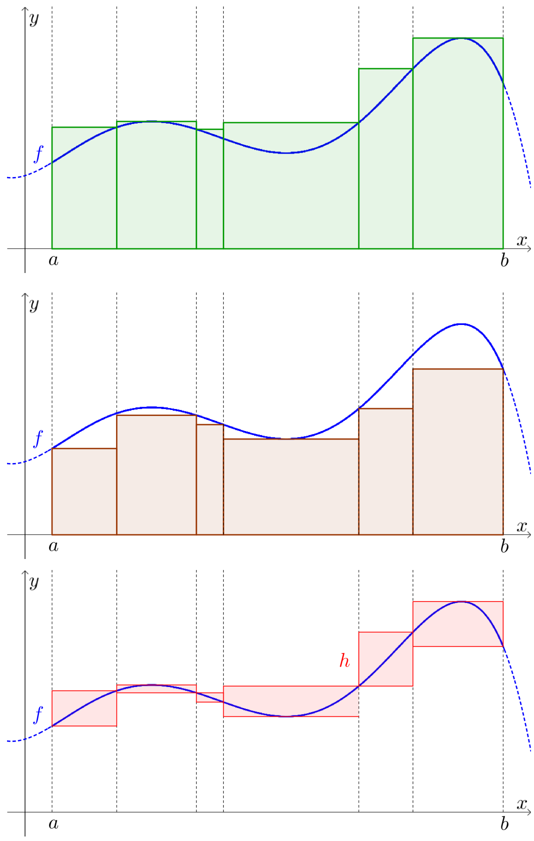
Wir haben gesehen, dass bei jeder Zerlegung

$$U \leq \text{ Exakter Flächeninhalt } \leq O$$

gilt. Je näher die Unter- und die Obersumme beisammen liegen, desto genauer ist unsere Abschätzung für den exakten Flächeninhalt.

Wir schauen uns nun genauer an, um wie viel sich die Untersumme und die Obersumme voneinander unterscheiden.

Wir schätzen also den gesamten Flächeninhalt dieser Fehlerrechtecke ab. Dazu suchen wir das Fehlerrechteck mit der größten Höhe. Diese Höhe bezeichnen wir mit h.



i) Warum ist der Unterschied zwischen Unter- und Obersumme höchstens $(b-a)\cdot h$?

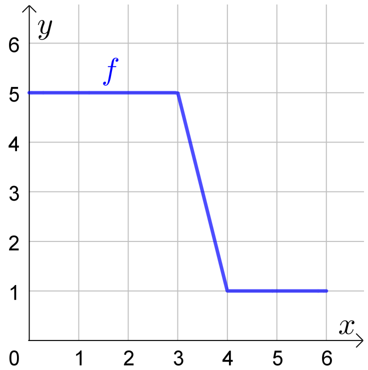
ii) Erkläre, warum h beim Verfeinern der Zerlegung nur kleiner werden kann.

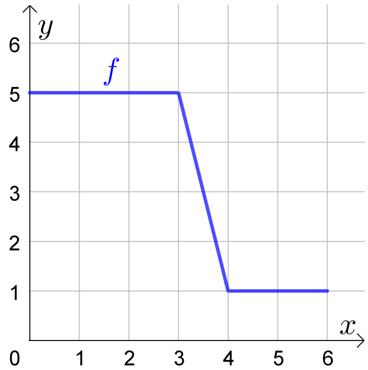
Wenn f eine *stetige* Funktion in $[a; b]$ ist, dann können wir den Unterschied zwischen Untersumme und Obersumme beliebig klein machen, indem wir fein genug zerlegen.

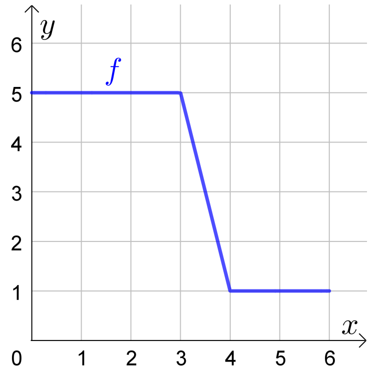
Leere Behauptungen

Wir teilen das Intervall $[a; b]$ in n gleich breite Teile.
Die zugehörige Untersumme kürzen wir mit U_n ab.

Ein weit verbreiteter *Irrglaube* ist, dass dann $U_1 \leq U_2 \leq U_3 \leq U_4 \leq \cdots$ gelten muss.
Zeige, dass die folgende Funktion f im Intervall $[0; 6]$ diese Behauptung widerlegt:







$U_1 =$ ______________ $U_2 =$ ______________ $U_3 =$ ______________

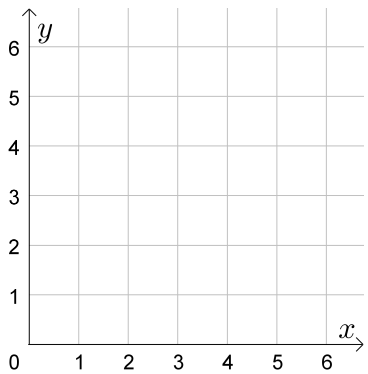
Beim *Verfeinern* einer Zerlegung können die Untersummen nur größer werden.
Beachte aber, dass die Zerlegung für U_3 *keine Verfeinerung* der Zerlegung für U_2 ist.

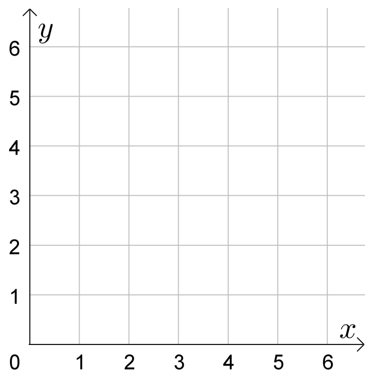
Diesmal verdoppeln wir in jedem Schritt die Anzahl der Rechtecke.
Erkläre, warum dann sicher $U_1 \leq U_2 \leq U_4 \leq U_8 \leq U_{16} \leq \cdots$ gilt.

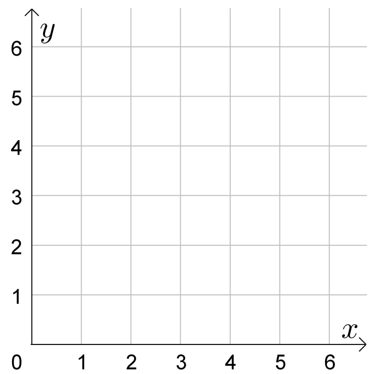
Das ist *richtig* für *jede* Funktion.

Auch die entsprechende Behauptung $O_1 \geq O_2 \geq O_3 \geq O_4 \geq \cdots$ für Obersummen ist *falsch*:

Skizziere den Graphen einer Funktion, bei dem O_2 kleiner als O_3 ist:







$O_1 =$ ______________ $O_2 =$ ______________ $O_3 =$ ______________

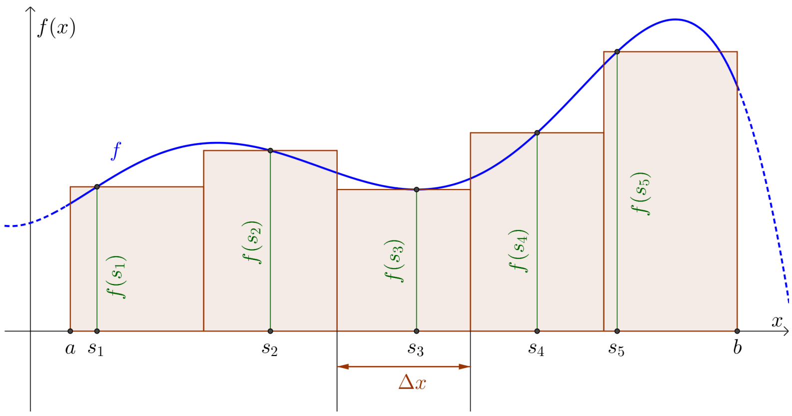
Wenn f eine *monotone* Funktion ist, dann werden die Differenzen $E_n = O_n - U_n$ monoton kleiner:

$$E_1 \geq E_2 \geq E_3 \geq E_4 \geq \cdots$$

3. Das bestimmte Integral

Arbeitsblatt – Bestimmtes Integral

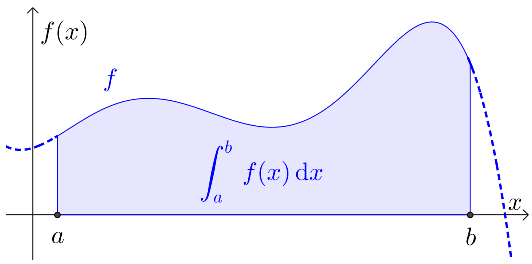
Auf dem Arbeitsblatt – Bestimmtes Integral behandeln wir die folgenden Fragen:

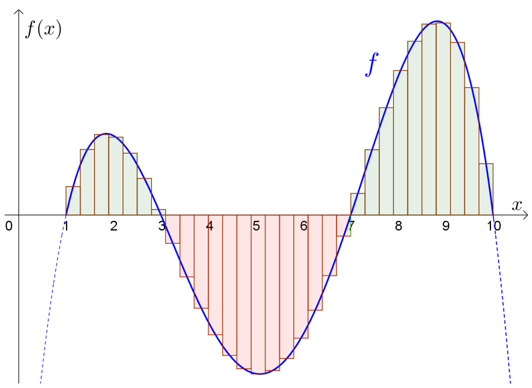


Was ist eine **Zwischensumme**?

Was ist das **bestimmte Integral** von f in $[a; b]$?

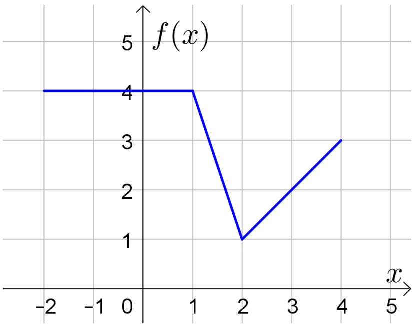
Was bedeutet die Schreibweise $\displaystyle\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)}\,\mathbf{d}\boldsymbol{x}$?



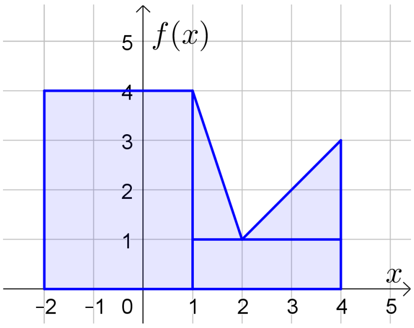


Was ist ein **orientierter Flächeninhalt**?

Beispiel 3.1. Der Graph einer stückweise linearen Funktion ist dargestellt. Ermittle $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.



Lösung. Wir können die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse in Rechtecke und rechtwinklige Dreiecke zerlegen.

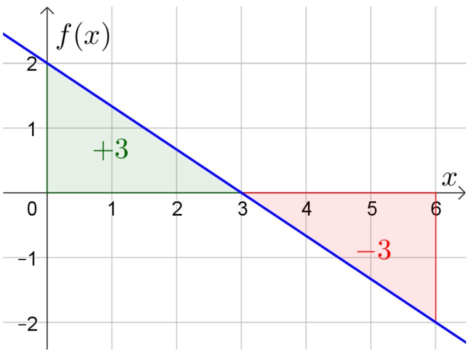


Also ist $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 18{,}5.$

□

Beispiel 3.2. Ermittle $\displaystyle\int_{0}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x$ für die Funktion f mit $f(x) = -\dfrac{2}{3}\cdot x + 2$.

Lösung. f ist eine lineare Funktion mit Steigung $-\frac{2}{3}$. Ihr Graph verläuft durch den Punkt $(0 \mid 2)$:



Also ist $\displaystyle\int_{0}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = +3 - 3 = 0.$

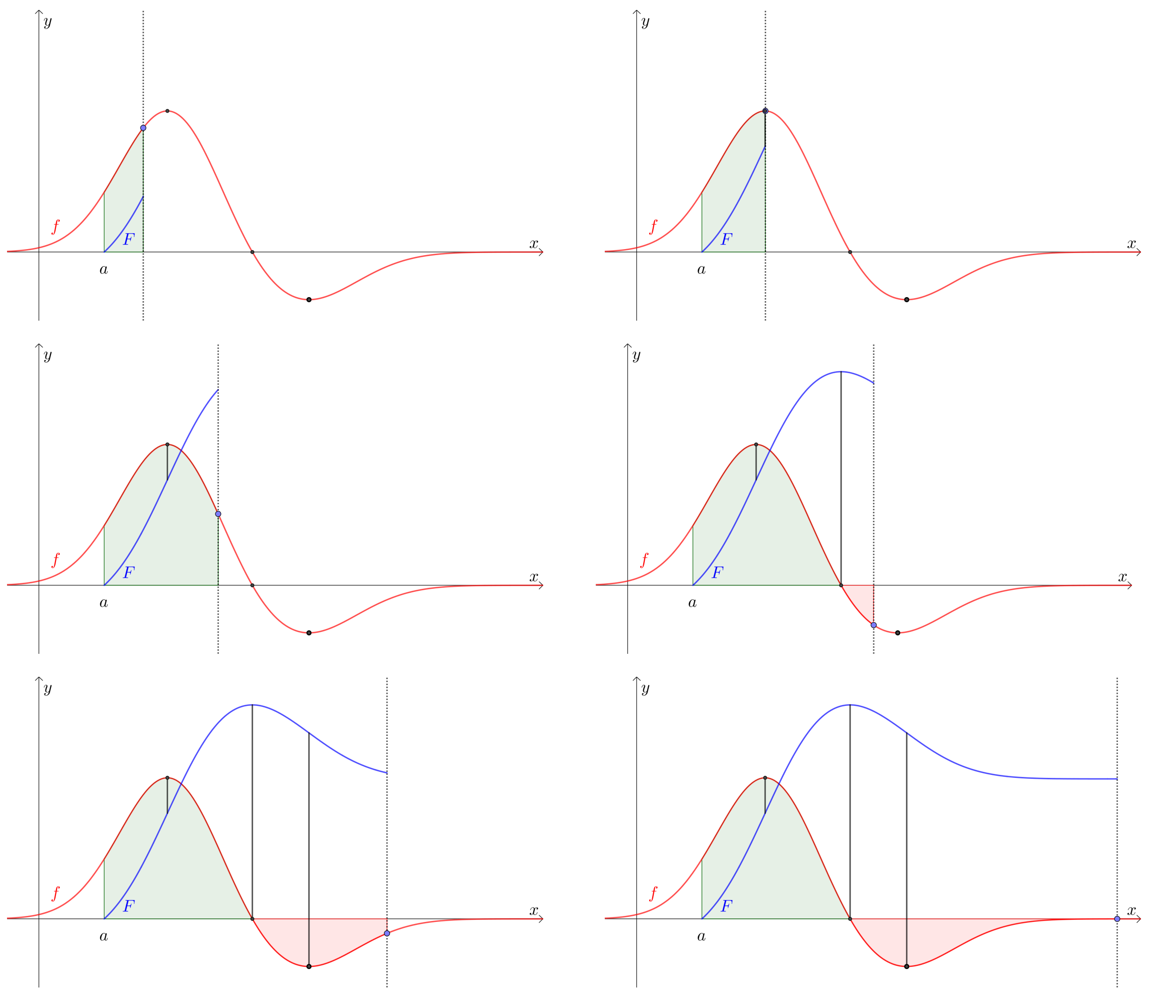
□

4. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

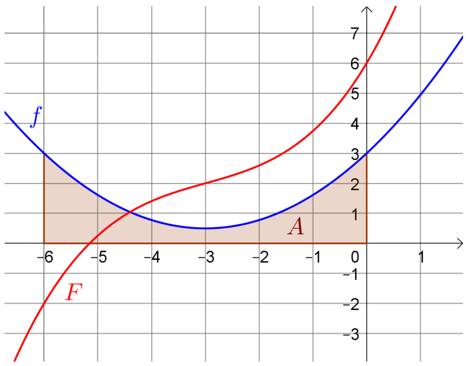
Die Berechnung von $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ hängt eng mit der Ermittlung einer Stammfunktion von f zusammen.

Arbeitsblatt – Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Warum ist die Funktion F mit $\boldsymbol{F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}$ eine **Stammfunktion von f**?



Was sagt der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** aus?

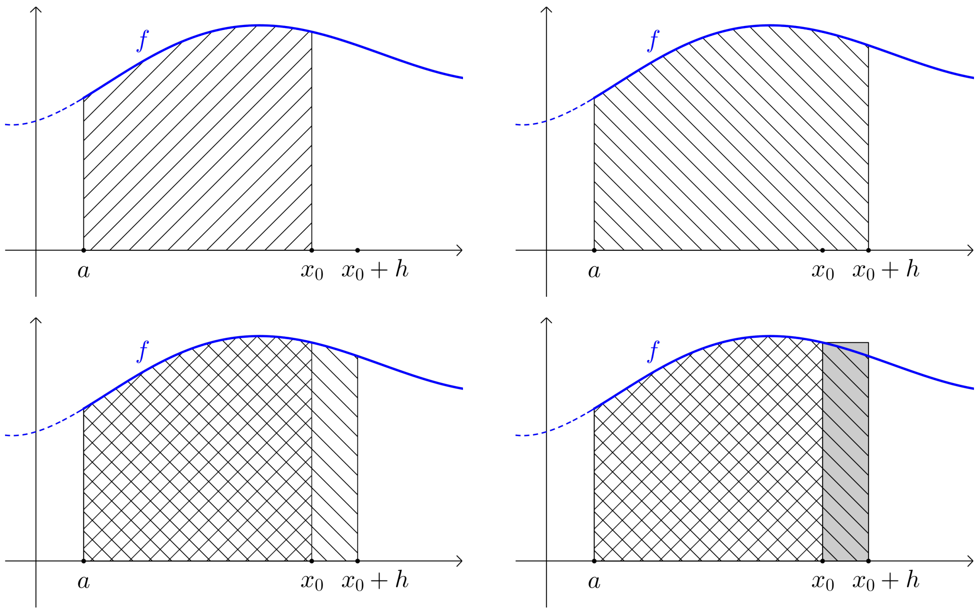


Trommelwirbel – In der Begründung des Hauptsatzes sind 2000 Jahre Zivilisationsgeschichte enthalten.

Der Graph einer stetigen Funktion f ist dargestellt. Wir betrachten die Funktion F mit

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

In den Bildern siehst du die Flächeninhalte $F(x_0)$, $F(x_0+h)$, $F(x_0+h) - F(x_0)$ und $h \cdot f(x_0)$:



Der Flächeninhalt $F(x_0+h) - F(x_0)$ ist etwa so groß wie $h \cdot f(x_0)$ – mit einem kleinen Fehler:

$$F(x_0+h) - F(x_0) \approx h \cdot f(x_0).$$

Siehst du das in den Bildern? Auch den Fehler?

Um den Fehler genau zu beschreiben, nennen wir die Spanne zwischen dem kleinsten und dem größten Funktionswert von f auf dem Intervall $[x_0; x_0+h]$ bequem ε.

Erkläre anhand der Skizze rechts unten, dass unser Fehler höchstens $h \cdot \varepsilon$ ist:

$$h \cdot f(x_0) - h \cdot \varepsilon \leq F(x_0+h) - F(x_0) \leq h \cdot f(x_0) + h \cdot \varepsilon.$$

Dividieren wir alles durch h, dann erhalten wir

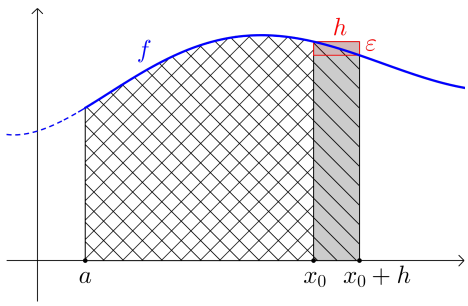
$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

Tatsächlich folgt daraus, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0),$$

weil bei kleinem h bestimmt auch ε klein ist.

f ist stetig.



Andererseits ist ja

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}.$$

So ist die Ableitung definiert.

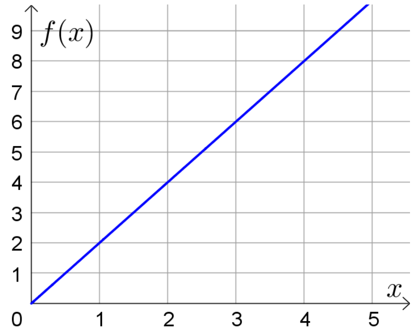
Es gilt also tatsächlich, dass $F'(x_0) = f(x_0)$.

Das ist genau der Hauptsatz.

Beispiel 4.1. Eine Stammfunktion von $f(x) = 2 \cdot x$ ist $F(x) = x^2$. Also ist zum Beispiel

$$\int_0^4 2 \cdot x \, \mathrm{d}x = F(4) - F(0) = 4^2 - 0^2 = 16.$$

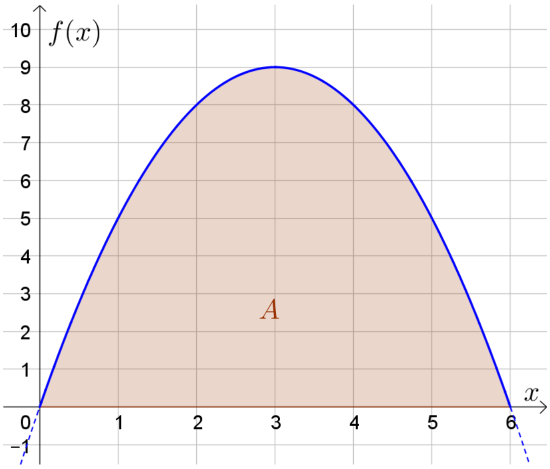
Wie kannst du $\int_0^4 2 \cdot x \, \mathrm{d}x$ auch ohne Hauptsatz schnell berechnen?



Traditionell wird dafür auch folgende Schreibweise verwendet:

$$\int_0^4 2 \cdot x \, \mathrm{d}x = x^2 \Big|_0^4 = 4^2 - 0^2 = 16.$$

Beispiel 4.2. Der Graph einer quadratischen Funktion verläuft durch $(0 \mid 0)$ und hat den Scheitel $S = (3 \mid 9)$. Berechne den dargestellten Flächeninhalt:



Lösung. Eine Funktionsgleichung von f können wir auf verschiedenste Arten aufstellen:

a) Scheitelpunktform und Punkt $(0 \mid 0)$ einsetzen:

$$f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S \qquad \text{mit Scheitelpunkt } S = (x_S \mid y_S)$$

b) Faktorisierung mit den Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 6$ und den Punkt $(3 \mid 9)$ einsetzen:

$$f(x) = a \cdot x \cdot (x - 6)$$

c) Lineares Gleichungssystem lösen:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \qquad \text{mit} \quad f(0) = 0,\ f(3) = 9,\ f'(3) = 0$$

In jedem Fall erhalten wir

$$f(x) = -x^2 + 6 \cdot x.$$

Der dargestellte Flächeninhalt beträgt also

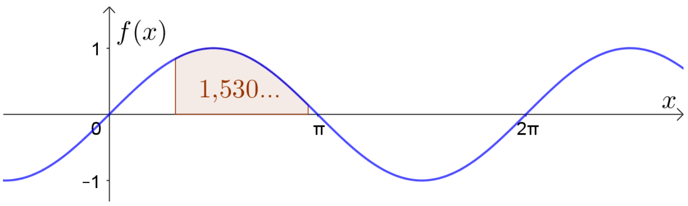
$$A = \int_0^6 \left(-x^2 + 6 \cdot x\right) \, \mathrm{d}x = -\frac{x^3}{3} + 3 \cdot x^2 \Big|_0^6 = -\frac{6^3}{3} + 3 \cdot 6^2 - 0 = 36.$$

□

Beispiel 4.3. Berechne $\displaystyle\int_1^3 \sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Lösung.

$$\int_1^3 \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)\,\Big|_1^3 = 0{,}989... - (-0{,}540...) = 1{,}530...$$



Beachte, dass der Winkel im Bogenmaß gemessen ist.

Stelle am TR also die Einheit Radiant (rad) ein.

□

Net Change Theorem

Erkläre, warum die folgende Gleichung gilt:

$$\boldsymbol{\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)}$$

Beispiel 4.4. Eine Funktion f erfüllt $f(2) = -4$ und $\displaystyle\int_2^9 f'(x)\,\mathrm{d}x = 7$. Berechne $f(9)$.

Lösung. f ist eine Stammfunktion von f', also gilt:

$$\int_2^9 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\Big|_2^9 = f(9) - f(2) \stackrel{!}{=} 7 \qquad\Longrightarrow\qquad f(9) = 7 + f(2) = 3$$

□

Beispiel 4.5. Welchen Wert hat das bestimmte Integral $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$?

Lösung. Eine Stammfunktion von $f(x) = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$ ist

$$F(x) = -x^{-1} = -\frac{1}{x}.$$

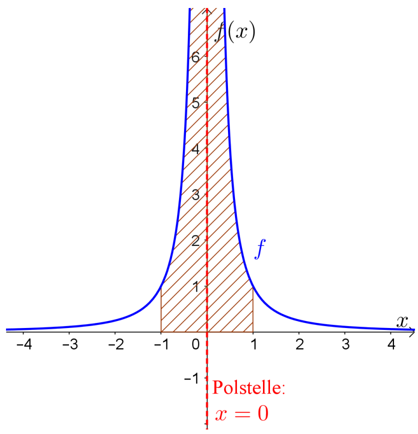
Wir berechnen

$$F(1) - F(-1) = -1 - 1 = -2$$

und sollten uns über das negative Ergebnis wundern, wo doch kein Funktionswert $f(x) = \frac{1}{x^2}$ negativ ist.

Wir können in diesem Beispiel *nicht* den Hauptsatz anwenden, weil die Funktion f im Intervall $[-1; 1]$ nicht stetig ist.
An der Stelle $x = 0$ ist f nicht definiert.
Die Funktion hat dort eine Polstelle.

Tatsächlich gilt: $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \infty$



□

5. Physikalische Anwendungen des bestimmten Integrals

Gleichförmige Bewegung

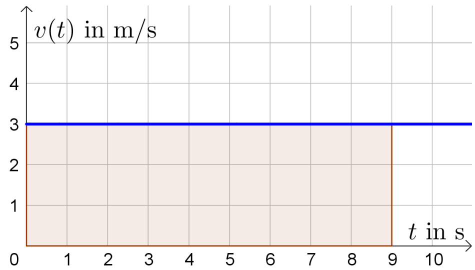
Bei konstanter Geschwindigkeit v besteht zwischen dem zurückgelegten Weg s und der vergangenen Zeit t der Zusammenhang $v = \frac{s}{t}$ bzw. $s = v \cdot t$.

Rechts ist der Graph einer konstanten Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v dargestellt.

1) Ermittle den eingezeichneten Flächeninhalt.

2) Welche Einheit hat dieser Flächeninhalt?

3) Wie kannst du diesen Flächeninhalt interpretieren.

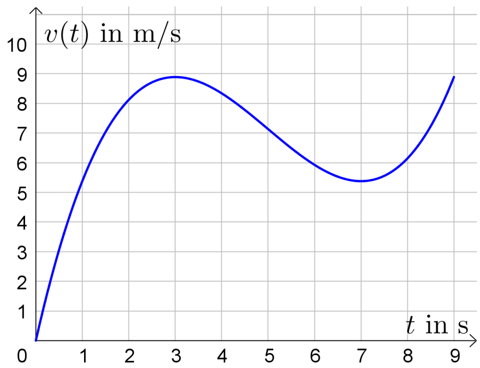


Ungleichförmige Bewegung

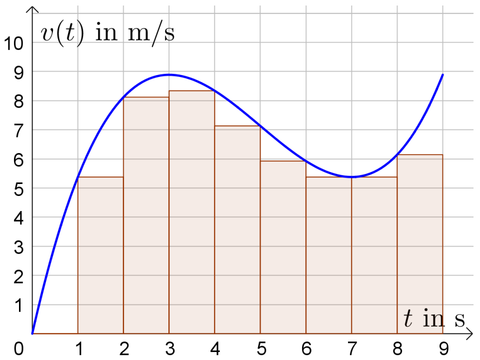
Bei einem Wettlauf wurde mit einem Messgerät die Geschwindigkeit einer Läuferin aufgezeichnet. Die Läuferin hat die Ziellinie nach genau 9 Sekunden erreicht.

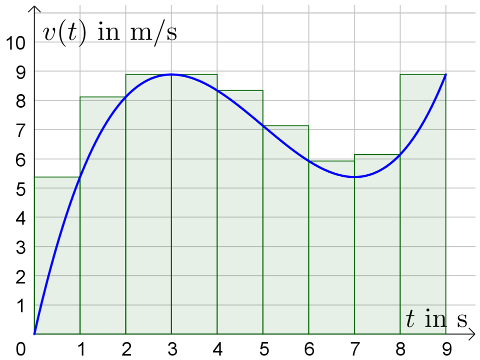
Der Graph der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion der Läuferin ist rechts dargestellt.

Welche Distanz hat die Läuferin in der letzten Sekunde mindestens bzw. höchstens zurückgelegt?



Erkläre, warum jede Untersumme eine untere Schranke für den zurückgelegten Weg ist, und jede Obersumme eine obere Schranke:





Wie könntest du die Annäherung an den tatsächlich zurückgelegten Weg verbessern?

$\int_a^b v(t)\ \mathrm{d}t$

Wenn $s(t)$ der im Zeitintervall $[0; t]$ zurückgelegte Weg ist, dann wird mit

$$\int_a^b v(t)\ \mathrm{d}t = s(b) - s(a)$$

der zurückgelegte Weg im Intervall $[a; b]$ berechnet. Das folgt auch aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Beschleunigte Bewegung

Erinnere dich, dass eine konstante Beschleunigung $a = 3\,\mathrm{m/s^2}$ bedeutet, dass die Geschwindigkeit pro Sekunde um $3\,\mathrm{m/s}$ größer wird.

Welche Einheit und welche Bedeutung hat also $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} a(t)\ \mathrm{d}t$ bei einer konstanten Beschleunigung a?

Erkläre, warum das bestimmte Integral einer Beschleunigung-Zeit-Funktion a im Zeitraum $[t_1; t_2]$ die Geschwindigkeitsänderung in diesem Zeitraum angibt. Kurz:

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\ \mathrm{d}t = v(t_2) - v(t_1)$$

Arbeitsblatt – Physikalische Anwendungen der Differential- und Integralrechnung

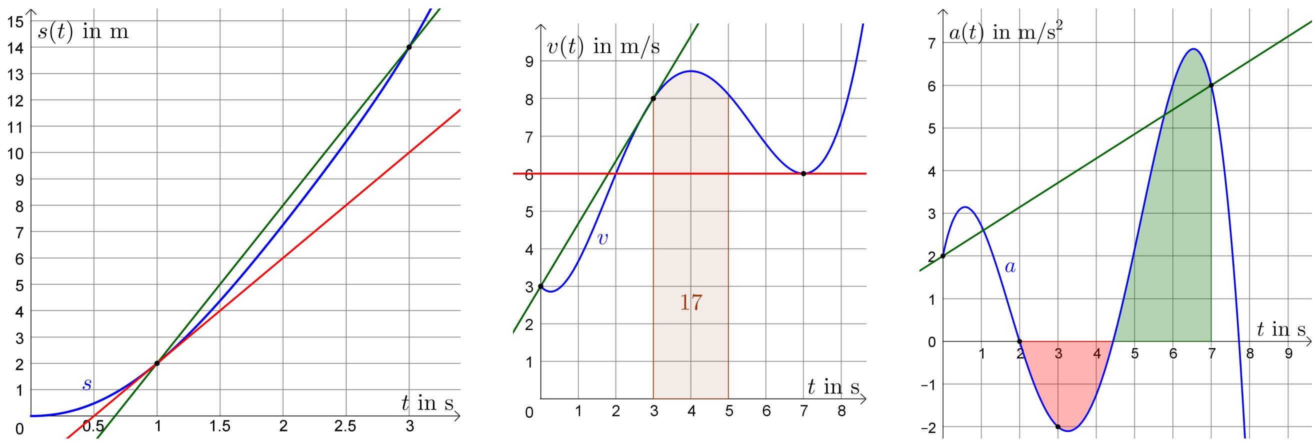
Auf dem Arbeitsblatt – Physikalische Anwendungen der Differential- und Integralrechnung haben wir die wichtigsten Eigenschaften und Zusammenhänge zwischen

der Weg-Zeit-Funktion s,

der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v und

der Beschleunigung-Zeit-Funktion a

zusammengefasst.

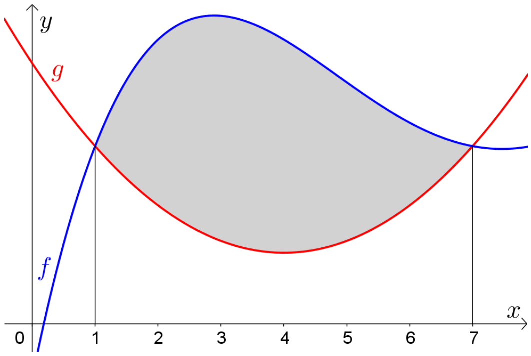


Wir untersuchen dort auch weitere physikalischen Aufgabenstellungen, bei denen wir den Flächeninhalt zwischen dem Funktionsgraphen und der horizontalen Achse im Sachzusammenhang interpretieren können.

6. Flächeninhalte zwischen Funktionsgraphen

Eingeschlossener Flächeninhalt

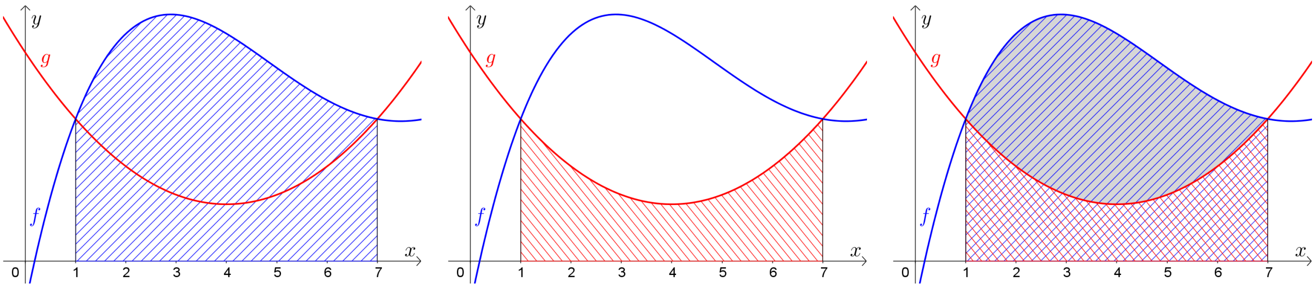
Die Graphen der Funktionen f und g schließen im Intervall $[1;7]$ eine Fläche ein.
Wie kannst du ihren Inhalt mit der Integralrechnung bestimmen?



Erkläre anhand der Bilder, warum der Flächeninhalt

$$A = \int_1^7 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^7 g(x)\,\mathrm{d}x$$

beträgt.



Da die Intervallgrenzen beider Integrale übereinstimmen, gilt:

$$A = \int_1^7 \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

Flächeninhalt zwischen Funktionsgraphen

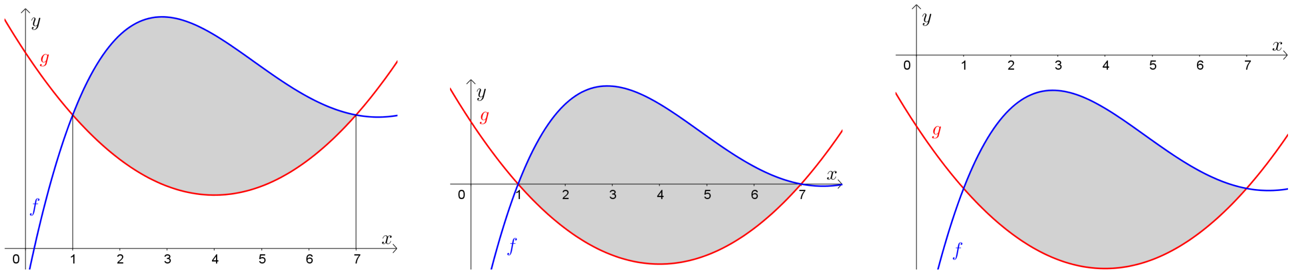
Sind f und g stetige Funktionen mit $f(x) \geq g(x)$ für alle x im Intervall $[a;b]$, dann ist

$$\boldsymbol{\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x}$$

der Flächeninhalt zwischen den Graphen von f und g im Intervall $[a;b]$.

Verschiebung

Wir verschieben beide Funktionsgraphen um dieselbe Konstante nach unten.
Was passiert dabei mit dem Flächeninhalt zwischen den Funktionsgraphen?



Der dargestellte Flächeninhalt ist in jedem der drei Bilder gleich groß, und zwar:

$$A = \int_1^7 (f(x) - g(x))\ \mathrm{d}x$$

Das Ergebnis hängt also nicht davon ab, ob die Funktionswerte positiv oder negativ sind.
Es kommt nur darauf an, dass $f(x) \geq g(x)$ ist.

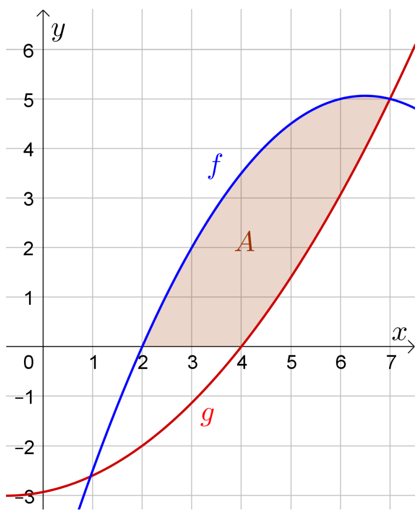
Beispiel 6.1. Die Graphen der Funktionen

$$f(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{13}{4} \cdot x - \frac{11}{2}$$

und

$$g(x) = \frac{2}{15} \cdot x^2 + \frac{1}{5} \cdot x - \frac{44}{15}$$

sind dargestellt.



Der markierte Flächeninhalt A soll berechnet werden.

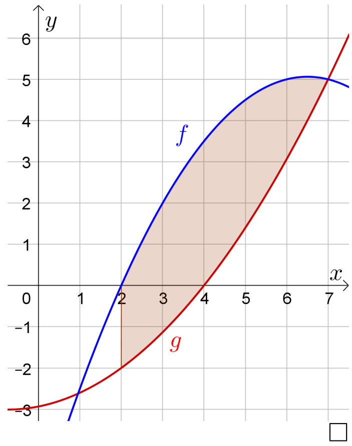
a) Lukas berechnet:

$$\int_2^7 (f(x) - g(x))\ \mathrm{d}x$$

Erkläre, welchen Flächeninhalt er so berechnet.

b) Stelle den Ansatz richtig und berechne den gesuchten Flächeninhalt A.

Lösung.



a) Lukas berechnet damit den Flächeninhalt, den f und g im Intervall $[2; 7]$ einschließen. Das ist aber nicht der gesuchte Flächeninhalt, sondern der rechts dargestellte Flächeninhalt.

b) Der gesuchte Flächeninhalt beträgt

$$A = \int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_4^7 g(x)\,\mathrm{d}x = \dots = \frac{425}{24} - \frac{69}{10} = \frac{1297}{120} = 10{,}80\ldots.$$

Stück für Stück

Wir wollen den Flächeninhalt, den die beiden dargestellten Funktionen im Intervall $[a; d]$ einschließen, berechnen:

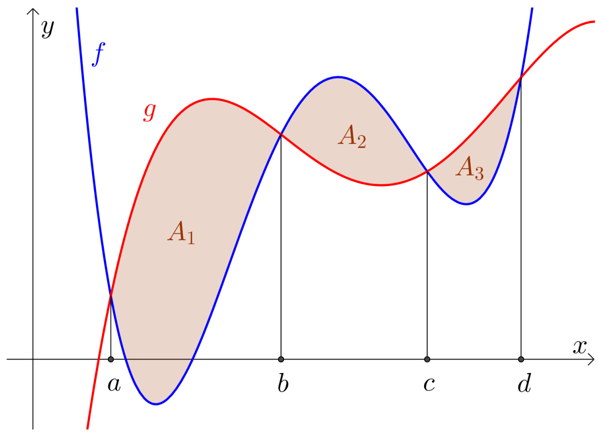
Erkläre, warum

$$\int_a^d (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

nicht der gesuchte Flächeninhalt ist.

Darum berechnen wir zuerst die Schnittstellen der Graphen, also die Lösungen folgender Gleichung:

$$\boldsymbol{f(x) = g(x)}$$



Der gesuchte Flächeninhalt ist also:

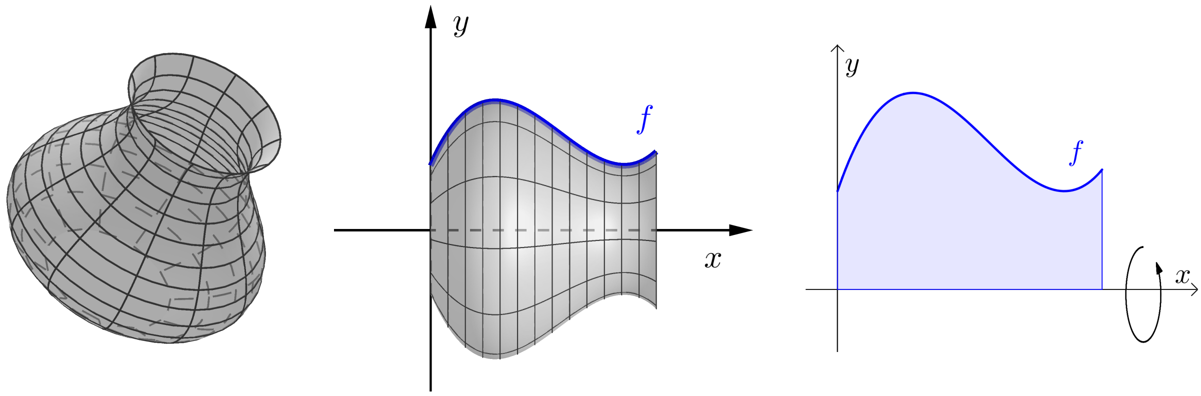
$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x + \int_b^c (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int_c^d (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$$

7. Rotationsvolumen

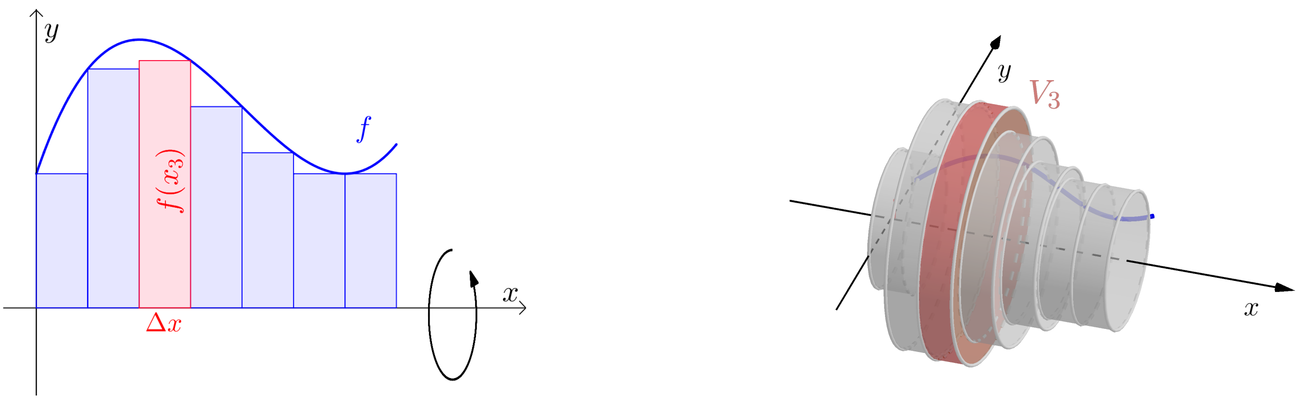
Arbeitsblatt – Rotationsvolumen

Auf dem Arbeitsblatt – Rotationsvolumen behandeln wir die folgenden Fragen:

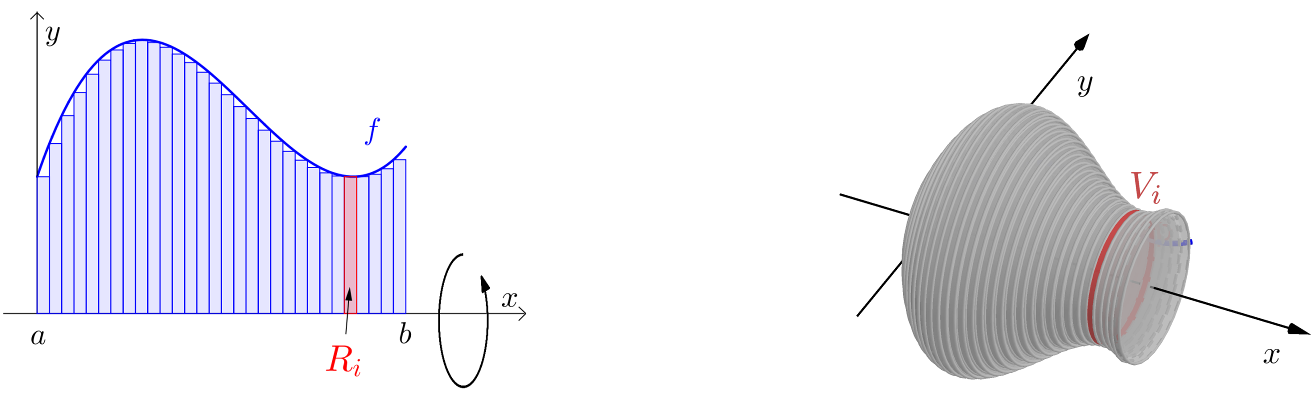
Welche Möglichkeiten haben wir, um das Volumen der dargestellten Vase zu bestimmen?



Wie können wir das Volumen annähern, wenn wir die Gleichung der Funktion f kennen?



Wie können wir die Annäherung verbessern?



Wie können wir mithilfe der Integralrechnung das exakte Volumen berechnen?

Volumen von Rotationskörpern

Der Graph einer stetigen Funktion $y = f(x)$ rotiert im Intervall $[a; b]$ um die ***x*-Achse**.

Das **Volumen V_x** des dabei entstandenen **Rotationskörpers** ist $\boldsymbol{V_x = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x}$.

„Quadriere die Funktionsgleichung ($f(x)^2 = \ldots$) und integriere nach x. Die Integrationsgrenzen a und b lies auf der x-Achse ab.“

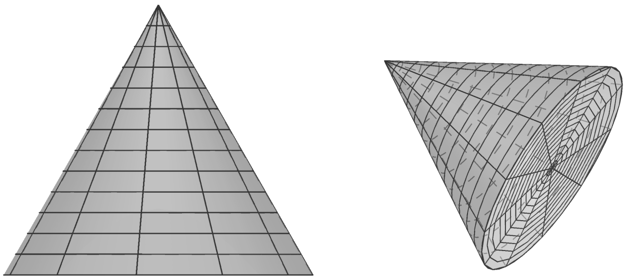
Der Graph einer stetigen Funktion $x = g(y)$ rotiert im Intervall $[c; d]$ um die ***y*-Achse**.

Das **Volumen V_y** des dabei entstandenen **Rotationskörpers** ist $\boldsymbol{V_y = \pi \cdot \int_c^d g(y)^2 \, \mathrm{d}y}$.

„Forme die Gleichung $y = f(x)$ auf x^2 um und integriere die andere Seite nach y. Die Grenzen c und d lies auf der y-Achse ab.“

Beispiel 7.1. Leite mithilfe der Integralrechnung eine Formel für das Volumen eines Drehkegels mit Radius r und Höhe h her.

Lösung. Wir können den Drehkegel als Rotationskörper beschreiben, indem wir den Graphen einer linearen Funktion um die x-Achse rotieren lassen.

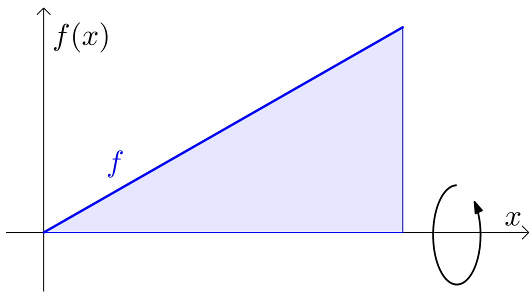


Drehkegel als Rotationskörper

Beschrifte die Skizze, und erkläre weshalb

$$f(x) = \frac{r}{h} \cdot x$$

gilt.



Das Volumen des Drehkegels beträgt daher

$$V = \pi \cdot \int_0^h f(x)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot x^2 \, \mathrm{d}x = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}.$$

□

Beispiel 7.2. Leite mithilfe der Integralrechnung eine Formel für das Volumen einer Kugel mit Radius r her.

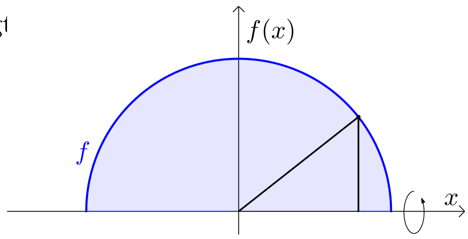
Lösung.

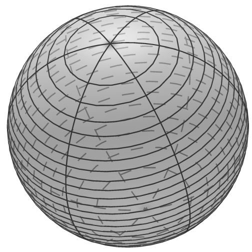
Kugel als Rotationskörper

Beschrifte die Skizze und erkläre, warum das Kugelvolumen

$$V = \pi \cdot \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right)\, \mathrm{d}x$$

beträgt



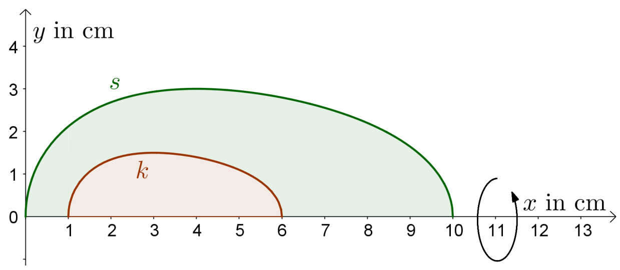


Die Funktion f ist symmetrisch zur vertikalen Achse („gerade Funktion"), also ist

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_{0}^{r} \left(r^2 - x^2\right)\, \mathrm{d}x = 2 \cdot \pi \cdot \left(r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^r = 2 \cdot \pi \cdot \left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}.$$

□

Beispiel 7.3. Eine Avocado und ihr Kern können näherungsweise als Rotationskörper beschrieben werden:



Die Schale wird durch eine Funktion s mit

$$s(x) = \sqrt{A \cdot x^4 + B \cdot x^3 + C \cdot x^2 + D \cdot x + E}, \qquad 0\,\text{cm} \leq x \leq 10\,\text{cm}$$

beschrieben. Die Funktion s hat Nullstellen bei $x = 0$ und $x = 10$.
Im Punkt $(4 \mid 3)$ hat die Funktion ein lokales Maximum.
Der Funktionsgraph von s verläuft durch den Punkt $(8 \mid 2{,}2)$.

Der Kern wird durch eine Funktion k mit

$$k(x) = \sqrt{a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e}, \qquad 1\,\text{cm} \leq x \leq 6\,\text{cm}$$

beschrieben. Die Funktion k hat Nullstellen bei $x = 1$ und $x = 6$.
Im Punkt $(3 \mid 1{,}5)$ hat die Funktion ein lokales Maximum.
Der Funktionsgraph von s verläuft durch den Punkt $(5 \mid 1{,}1)$.

Das grüne Fruchtfleisch der Avocado hat eine Dichte von $\rho = 0{,}9\,\text{g/cm}^3$.
Berechne, wie viel Gramm Fruchtfleisch die Avocado hat.

Lösung. Mit Technologieeinsatz berechnen wir die Gleichungen der beiden Funktionen:

$$\text{I}: \ s(0) = 0 \qquad \text{II}: \ s(10) = 0 \qquad \text{III}: \ s'(4) = 0 \qquad \text{IV}: \ s(4) = 3 \qquad \text{V}: \ s(8) = 2{,}2$$

$\implies \ A = -\frac{21}{6400}, \ B = \frac{289}{3200}, \ C = -\frac{451}{400}, \ D = \frac{221}{40}, \ E = 0$

$$\text{I}: \ k(1) = 0 \qquad \text{II}: \ k(6) = 0 \qquad \text{III}: \ k'(3) = 0 \qquad \text{IV}: \ k(3) = 1{,}5 \qquad \text{V}: \ k(5) = 1{,}1$$

$\implies \ a = -\frac{21}{1600}, \ b = \frac{373}{1600}, \ c = -\frac{2797}{1600}, \ d = \frac{8979}{1600}, \ e = -\frac{3267}{800}$

Das Volumen der Avocado mit Kern beträgt

$$V_A = \pi \cdot \int_0^{10} s(x)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \cdot \left(A \cdot \frac{10^5}{5} + B \cdot \frac{10^4}{4} + C \cdot \frac{10^3}{3} + D \cdot \frac{10^2}{2} \right) = 190{,}29\ldots \, \text{cm}^3.$$

Das Volumen des Kerns beträgt

$$V_K = \pi \cdot \int_1^{6} k(x)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \cdot \left(a \cdot \frac{x^5}{5} + b \cdot \frac{x^4}{4} + c \cdot \frac{x^3}{3} + d \cdot \frac{x^2}{2} + e \cdot x \right) \Big|_1^6 = 23{,}78\ldots \, \text{cm}^3.$$

Das Fruchtfleisch der Avocado hat also das Volumen

$$V = V_A - V_K = 166{,}50\ldots \, \text{cm}^3.$$

Mit der Dichte $\rho = \frac{m}{V}$ können wir daraus die Masse berechnen:

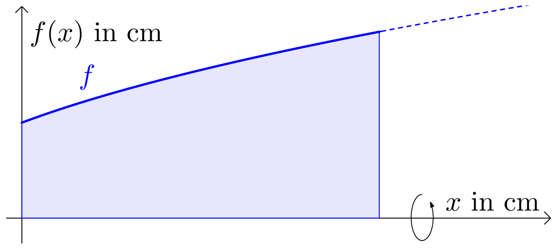
$$m = V \cdot \rho = 166{,}50\ldots \, \text{cm}^3 \cdot 0{,}9 \, \text{g/cm}^3 = 149{,}85\ldots \, \text{g}.$$

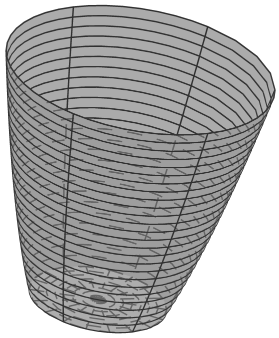
Das Fruchtfleisch der Avocado hat also eine Masse von rund 150 Gramm. □

Beispiel 7.4. Die Innenwand eines Trinkglases entsteht durch Rotation einer Funktion

$$f(x) = \sqrt{x + c}$$

um die x-Achse:





Wir sollen ein spezielles Trinkglas mit den folgenden Eigenschaften entwerfen:

- Der untere Durchmesser der Innenwand soll 6 cm betragen.
- Als Boden wird ein 8 mm hoher Drehzylinder verwendet.
- Die 0,5 L - Markierung soll sich 1 cm unterhalb des Glasrandes befinden.

Berechne, welche Gesamthöhe das Trinkglas haben muss.

Lösung.

$$f(0) = 3\,\text{cm} \implies \sqrt{c} = 3 \implies c = 9$$

Wenn das Trinkglas bis zur Höhe b angefüllt wird, beträgt das Volumen

$$V(b) = \pi \cdot \int_0^b (x + 9)\ \mathrm{d}x = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 + 9 \cdot x\right) \Big|_0^b = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot b^2 + 9 \cdot b\right) \text{cm}^3$$

Um die Höhe der Markierung für $0{,}5\,\text{L} = 500\,\text{ml} = 500\,\text{cm}^3$ zu bestimmen, lösen wir die folgende Gleichung:

$$V(b) = 500 \quad \implies \quad \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot b^2 + 9 \cdot b\right) = 500 \quad \implies \quad \frac{1}{2} \cdot b^2 + 9 \cdot b - \frac{500}{\pi} = 0$$

Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichungen sind

$$(b_1 = -28{,}98...\,\text{cm}) \quad \text{und} \quad b_2 = 10{,}98...\,\text{cm}.$$

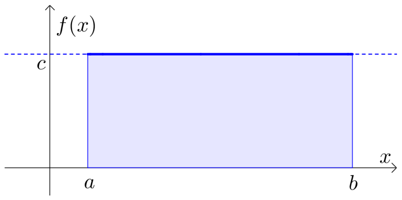
Die Gesamthöhe des Trinkglases beträgt also

$$h = 10{,}98... + 0{,}8 + 1 = 12{,}78...\,\text{cm}.$$ □

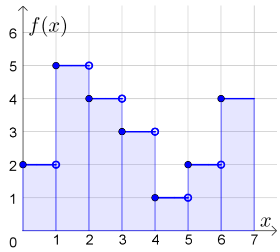
8. Linearer Mittelwert

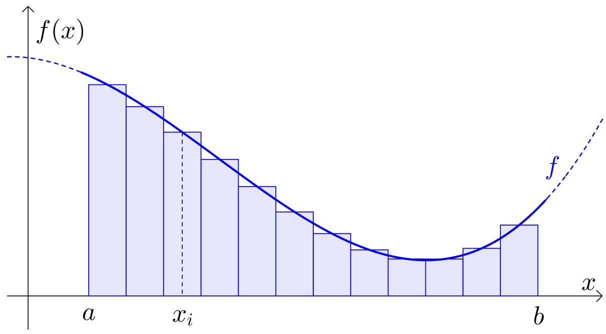
Arbeitsblatt – Mittelwertsatz der Integralrechnung

Auf dem Arbeitsblatt – Mittelwertsatz der Integralrechnung behandeln wir die folgenden Fragen:



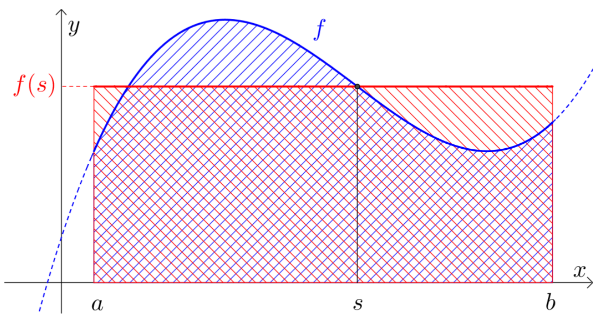
Wie können wir den „durchschnittlichen Funktionswert" annähern, den eine Funktion f im Intervall $[a; b]$ annimmt?





Wie können wir den „durchschnittlichen Funktionswert" mithilfe der Integralrechnung bestimmen?

Was garantiert uns der **Mittelwertsatz der Integralrechnung**?



Linearer Mittelwert einer Funktion

Der **lineare Mittelwert** $\boldsymbol{m}$ einer Funktion f im Intervall $[a; b]$ ist:

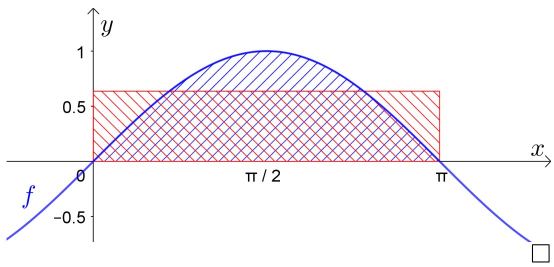
$$\boldsymbol{m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x}$$

m ist der „durchschnittliche Funktionswert" von f in $[a; b]$.

Beispiel 8.1. Berechne den linearen Mittelwert von $f(x) = \sin(x)$ in $[0; \pi]$.

Lösung.

$$m = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \sin(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \cdot (-\cos(x)) \Big|_0^\pi$$
$$= \frac{1}{\pi} \cdot (1 - (-1)) = \frac{2}{\pi} = 0{,}636...$$



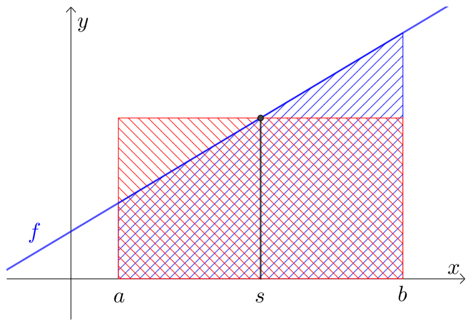
□

Linearer Mittelwert einer linearen Funktionen

f ist eine lineare Funktion in $[a; b]$, also:

$$f(x) = k \cdot x + d$$

An welcher Stelle s nimmt die Funktion den durchschnittlichen Funktionswert an?



Wir rechnen nach, dass der lineare Mittelwert von f in $[a; b]$ tatsächlich $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ist:

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{k}{2} \cdot x^2 + d \cdot x\right)\Big|_a^b = \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{k}{2} \cdot b^2 + d \cdot b - \frac{k}{2} \cdot a^2 - d \cdot a\right) = \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{k}{2} \cdot (b^2 - a^2) + d \cdot (b-a)\right) = \qquad b^2 - a^2 = (b-a) \cdot (b+a) \\ &= k \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) + d = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

MWS Differentialrechnung $\implies$ MWS Integralrechnung

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

1) Die Funktion F mit

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

ist eine Stammfunktion von f. Es gilt also $F'(x) = f(x)$.

2) Erkläre:

$$\frac{F(b) - F(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

3) Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung garantiert uns eine Stelle s in $[a; b]$ mit:

$$F'(s) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a} \qquad \implies \qquad f(s) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

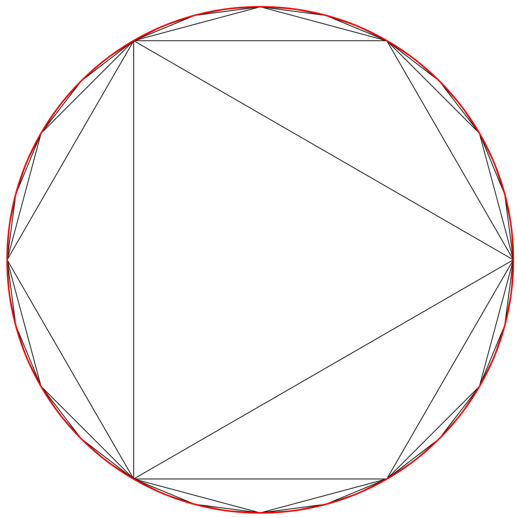
Das ist genau der Mittelwertsatz der Integralrechnung.

9. Bogenlänge

Kreisumfang

Wir wollen den Umfang eines Kreises mit Radius r näherungsweise bestimmen. Dazu schreiben wir ihm regelmäßige Vielecke ein.

Regelmäßiges Vieleck	Seitenlänge	Umfang
3-Eck	$1{,}732... \cdot r$	$5{,}196... \cdot r$
6-Eck	$1 \cdot r$	$6 \cdot r$
12-Eck	$0{,}517... \cdot r$	$6{,}211... \cdot r$
24-Eck	$0{,}261... \cdot r$	$6{,}265... \cdot r$
48-Eck	$0{,}130... \cdot r$	$6{,}278... \cdot r$
96-Eck	$0{,}065... \cdot r$	$6{,}282... \cdot r$



Der Umfang des regelmäßigen n-Ecks mit Radius r kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$u = 2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot r$$

Kannst du sie erklären?

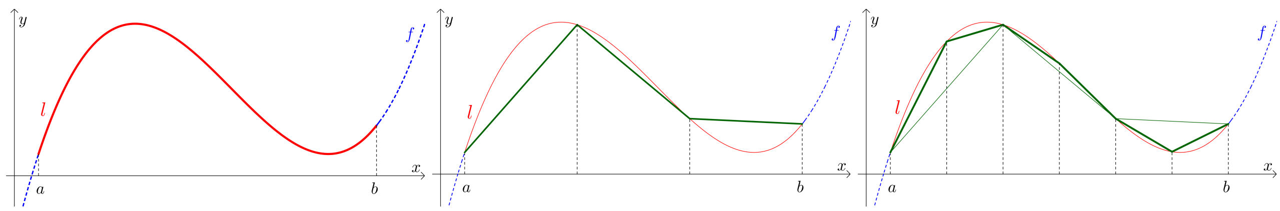
Mit jeder Verdopplung der Seitenanzahl wird der Umfang des Vielecks größer.
Der Umfang bleibt jedoch stets kleiner als der Kreisumfang $u = 2 \cdot \pi \cdot r = 6{,}283... \cdot r$.

Der Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} 2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot r$ ist der Kreisumfang.

Arbeitsblatt – Bogenlänge

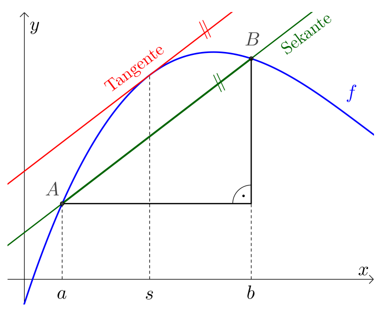
Auf dem Arbeitsblatt – Bogenlänge behandeln wir die folgenden Fragen:

Wie können wir die **Bogenlänge l** des Graphen einer Funktion f im Intervall $[a; b]$ durch Streckenzüge annähern?



Was hilft dabei der **Mittelwertsatz der Differentialrechnung**?

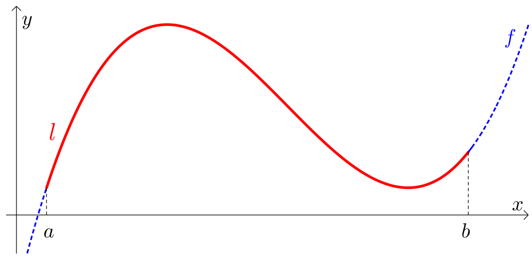
Wie können wir mithilfe der Integralrechnung die exakte Bogenlänge l berechnen?



Bogenlänge

Für die **Bogenlänge $\boldsymbol{l}$** des Graphen einer differenzierbaren Funktion f im Intervall $[a;b]$ gilt:

$$\boldsymbol{l = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\ \mathrm{d}x}$$



Beispiel 9.1. Berechne die Bogenlänge des Graphen von $f(x) = x$ im Intervall $[0;5]$.

Lösung.

$$l = \int_0^5 \sqrt{1+f'(x)^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^5 \sqrt{2}\ \mathrm{d}x = x\cdot\sqrt{2}\,\Big|_0^5 = 5\cdot\sqrt{2} = 7{,}071...$$

Kannst du diese „Bogenlänge“ auch ohne Integralrechnung bestimmen? □

Beispiel 9.2. Berechne die Bogenlänge des Graphen von $f(x) = x\cdot\sqrt{x}$ im Intervall $[0;13]$.

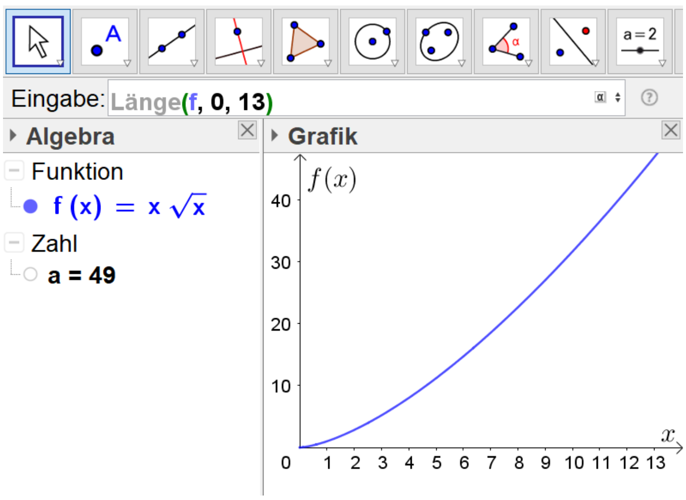
Lösung. Die Ableitung von $f(x) = x\cdot x^{\frac{1}{2}}$ berechnen wir mit der Produktregel:

$$f'(x) = 1\cdot x^{\frac{1}{2}} + x\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}} \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{1+f'(x)^2} = \sqrt{1+\frac{9}{4}\cdot x}$$

Die Bogenlänge beträgt also

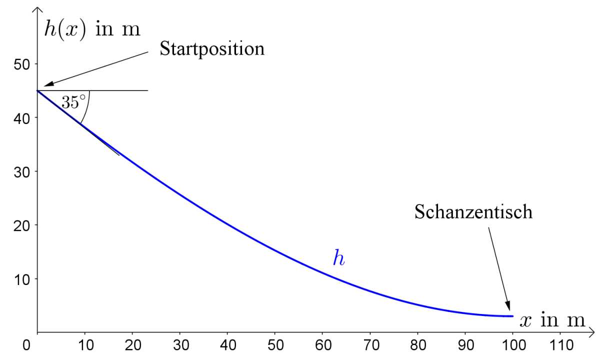
$$\int_0^{13}\left(1+\frac{9}{4}\cdot x\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \underbrace{\left(1+\frac{9}{4}\cdot x\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}}_{\text{Kettenregel / Lineare Substitution}}\,\Big|_0^{13} = 49{,}29... - 0{,}29... = 49.$$

Wir kontrollieren das Ergebnis mit Technologieeinsatz:



□

Beispiel 9.3. Der Verlauf einer Skisprungschanze kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion 3. Grades beschrieben werden:



- Die Startposition befindet sich auf der Höhe 45 m.
- Bei der Startposition hat die Schanze einen Neigungswinkel von 35°.
- Der Schanzentisch befindet sich in 3 m Höhe und 100 m horizontaler Entfernung von der Startposition.
- Beim Schanzentisch ist die Sprungschanze weder steigend noch fallend.

a) Stelle ein lineares Gleichungssystem auf, aus dem die Koeffizienten der Polynomfunktion h berechnet werden können. Löse das lineare Gleichungssystem mit Technologieeinsatz.

b) Stelle eine Formel auf, mit der die Länge der Sprungschanze berechnet werden kann.
Berechne die Länge der Sprungsschanze mit Technologieeinsatz.

c) Begründe mithilfe der Differentialrechnung, warum der Neigungswinkel der Schanze an der Startposition maximal ist.

Lösung.

a) $h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: &\quad h(0) = 45 \\ \mathrm{II}: &\quad h'(0) = \tan(-35°) \\ \mathrm{III}: &\quad h(100) = 3 \\ \mathrm{IV}: &\quad h'(100) = 0 \end{aligned}$$

Lösung mit Technologieeinsatz:
$a = 1{,}397... \cdot 10^{-5}$
$b = 1{,}404... \cdot 10^{-3}$
$c = -0{,}7002...$
$d = 45$

b) $h'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

$$l = \int_0^{100} \sqrt{1 + h'(x)^2}\, \mathrm{d}x = 110{,}13...\,\mathrm{m}$$

c) Die Funktion h hat im Intervall $[0; 100]$ keinen Wendepunkt, da alle Lösungen von $h''(x) = 0$ außerhalb liegen.
Der maximale Neigungswinkel muss daher am Rand ($x = 0$ oder $x = 100$) angenommen werden.
Der Neigungswinkel der Schanze ist also an der Startposition maximal.

□

Beispiel 9.4. Die Funktion f mit
$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
heißt auch *Cosinus hyperbolicus* und wird mit cosh abgekürzt. Die Funktion g mit
$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
heißt auch *Sinus hyperbolicus* und wird mit sinh abgekürzt.

a) Rechne nach, dass $f'(x) = g(x)$ und $g'(x) = f(x)$ gilt.
b) Rechne nach, dass $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$ gilt.
c) Berechne die Bogenlänge von f im Intervall $[1; 4]$.

Lösung.

a) $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}\cdot(-1)}{2} = g(x)$ ✓ $\qquad g'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}\cdot(-1)}{2} = f(x)$ ✓

b) $f(x)^2 - g(x)^2 = (f(x)+g(x))\cdot(f(x)-g(x)) = \left(\dfrac{2\cdot e^x}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{2\cdot e^{-x}}{2}\right) = e^{x-x} = e^0 = 1$ ✓

c) Die Bogenlänge von f in $[1; 4]$ beträgt
$$l = \int_1^4 \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{a)}}{=} \int_1^4 \sqrt{1+g(x)^2}\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{b)}}{=} \int_1^4 \sqrt{f(x)^2}\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{a)}}{=}$$
$f(x) > 0 \implies \sqrt{f(x)^2} = f(x)$
$$= g(x)\,\Big|_1^4 = \frac{e^4 - e^{-4}}{2} - \frac{e^1 - e^{-1}}{2} = 26{,}11\ldots$$
□

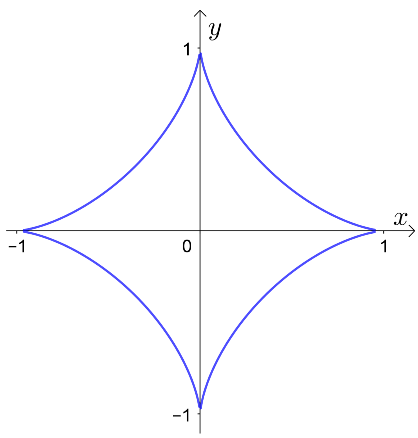
Beispiel 9.5. ☆ Die *Astroide* („Sternkurve“) wird implizit durch die Gleichung
$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$$
$\sqrt[3]{☺^2}$ ist für alle Zahlen $☺ \in \mathbb{R}$ definiert.

beschrieben.

Ein Punkt $P = (x_P \mid y_P)$ liegt genau dann auf der Kurve, wenn $\sqrt[3]{x_P^2} + \sqrt[3]{y_P^2} = 1$ gilt. Zum Beispiel: $(1 \mid 0)$ oder $(-1 \mid 0)$.

Berechne den Umfang der Astroide.

Lösung.



$$\sqrt[3]{y^2} = 1 - \sqrt[3]{x^2} \quad\implies\quad y = \pm\sqrt{\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)^3}$$
Der obere Rand der Astroide ist also der Graph folgender Funktion:
$$f(x) = \sqrt{\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)^3} = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$\implies f'(x) = \frac{3}{2}\cdot\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}\right) = -\frac{\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$
$$\implies 1 + f'(x)^2 = 1 + \frac{1-x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} + \frac{1-x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{2}{3}}$$
$$\implies u = 4\cdot\int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x = 4\cdot\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = 4\cdot x^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{3}{2}\,\Big|_0^1 = 4\cdot\frac{3}{2} - 0 = 6.$$
□

Dieses Werk von Mathematik macht Freu(n)de unterliegt einer CC BY-NC-ND 4.0 Lizenz.
http://mmf.univie.ac.at