KOMPETENZHEFT – KOMPLEXE ZAHLEN

Inhaltsverzeichnis

Kompetenzmaterialien – Komplexe Zahlen

In diesem Kompetenzheft wird ein möglicher Einstieg ins Thema „Komplexe Zahlen“ vorgestellt.

Die mit ☆ markierten Inhalte sind für besonders interessierte Personen gedacht.

Die folgenden Materialien sind für den Einsatz im Unterricht konzipiert:

✓ Arbeitsblatt – Komplexe Zahlen (Ausarbeitung)

In der Aufgabensammlung – Vektorrechnung und Analytische Geometrie befinden sich passende Übungsaufgaben.

Wir freuen uns über Feedback an mmf@univie.ac.at.

Datum: 26. November 2020.

1. Erweiterungen der Zahlenbereiche

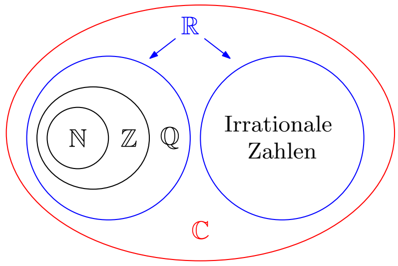
Arbeitsblatt – Komplexe Zahlen

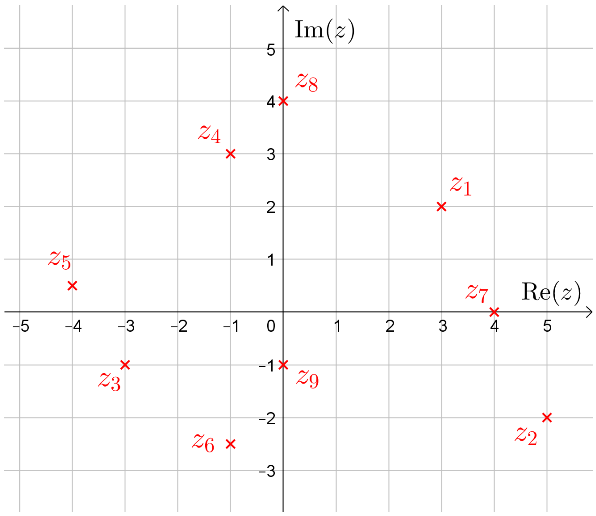
Auf dem Arbeitsblatt – Komplexe Zahlen behandeln wir die folgenden Fragen:

Welche Lösungen hat die Gleichung $x^2 = -1$?

Was ist die **imaginäre Einheit $\boldsymbol{i}$**?

Was sind **komplexe Zahlen**?





Was ist mit $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ gemeint?

Wie kann man komplexe Zahlen in der **Zahlenebene** veranschaulichen?

Wie rechnet man mit komplexen Zahlen?

Beispiel 1.1. Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = -2 + 5 \cdot i$ und $z_2 = 4 - i$.
Stelle $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$ in der Form $a + b \cdot i$ dar.

Lösung.

$$z_1 + z_2 = (-2 + 5 \cdot i) + (4 - i) = -2 + 5 \cdot i + 4 - i = 2 + 4 \cdot i$$
$$z_1 - z_2 = (-2 + 5 \cdot i) - (4 - i) = -2 + 5 \cdot i - 4 + i = -6 + 6 \cdot i$$
$$z_1 \cdot z_2 = (-2 + 5 \cdot i) \cdot (4 - i) = -8 + 2 \cdot i + 20 \cdot i - \underbrace{5 \cdot i^2}_{=-5} = -3 + 22 \cdot i$$

Um $\frac{z_1}{z_2}$ wieder in der Form $a + b \cdot i$ darzustellen, erweitern wir den Bruch geschickt:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(-2 + 5 \cdot i) \cdot (4 + i)}{(4 - i) \cdot (4 + i)} = \frac{-8 - 2 \cdot i + 20 \cdot i + 5 \cdot i^2}{16 - i^2} = \frac{-13 + 18 \cdot i}{17} = -\frac{13}{17} + \frac{18}{17} \cdot i$$

□

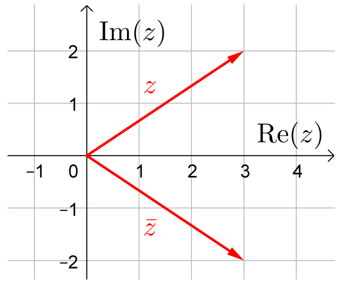
Komplexe Konjugation

Zu jeder komplexen Zahl

$$z = a + b \cdot i \qquad a,\, b \in \mathbb{R}$$

gibt es die sogenannte **komplex konjugierte Zahl**

$$\boldsymbol{\bar{z} = a - b \cdot i}.$$



Die komplexe Zahl wird also an der waagrechten Achse gespiegelt.

Beispiel 1.2. Gegeben sind die komplexen Zahlen $z = 4 - 2 \cdot i$ und $w = 3 + 5 \cdot i$.

1) Berechne $z \cdot \bar{z}$.
2) Berechne $\bar{z} + \bar{w}$ und $\overline{z + w}$.
3) Berechne $\bar{z} \cdot \bar{w}$ und $\overline{z \cdot w}$.

Lösung.

1) $z \cdot \bar{z} = (4 - 2 \cdot i) \cdot (4 + 2 \cdot i) = 16 + 8 \cdot i - 8 \cdot i - 4 \cdot i^2 = 20$

2) $\bar{z} + \bar{w} = (4 + 2 \cdot i) + (3 - 5 \cdot i) = 7 - 3 \cdot i$

$\overline{z + w} = \overline{(4 - 2 \cdot i) + (3 + 5 \cdot i)} = \overline{7 + 3 \cdot i} = 7 - 3 \cdot i$

3) $\bar{z} \cdot \bar{w} = (4 + 2 \cdot i) \cdot (3 - 5 \cdot i) = 12 - 20 \cdot i + 6 \cdot i - 10 \cdot i^2 = 22 - 14 \cdot i$

$\overline{z \cdot w} = \overline{(4 - 2 \cdot i) \cdot (3 + 5 \cdot i)} = \overline{12 + 20 \cdot i - 6 \cdot i - 10 \cdot i^2} = \overline{22 + 14 \cdot i} = 22 - 14 \cdot i$ □

Eigenschaften der komplexen Konjugation

1) Erkläre, warum $(a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i)$ stets eine nicht-negative reelle Zahl ist. $(a, b \in \mathbb{R})$

2) Erkläre, warum $\bar{z} + \bar{w} = \overline{z + w}$ für alle komplexen Zahlen z und w gilt.

3) Erkläre, warum $\bar{z} \cdot \bar{w} = \overline{z \cdot w}$ für alle komplexen Zahlen z und w gilt.

2. Darstellungsformen komplexer Zahlen

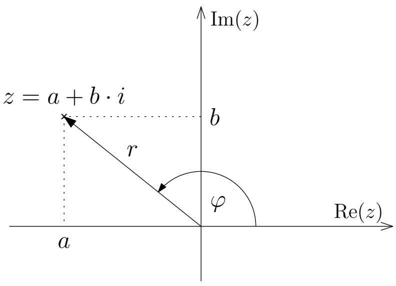
Arbeitsblatt – Komplexe Zahlen

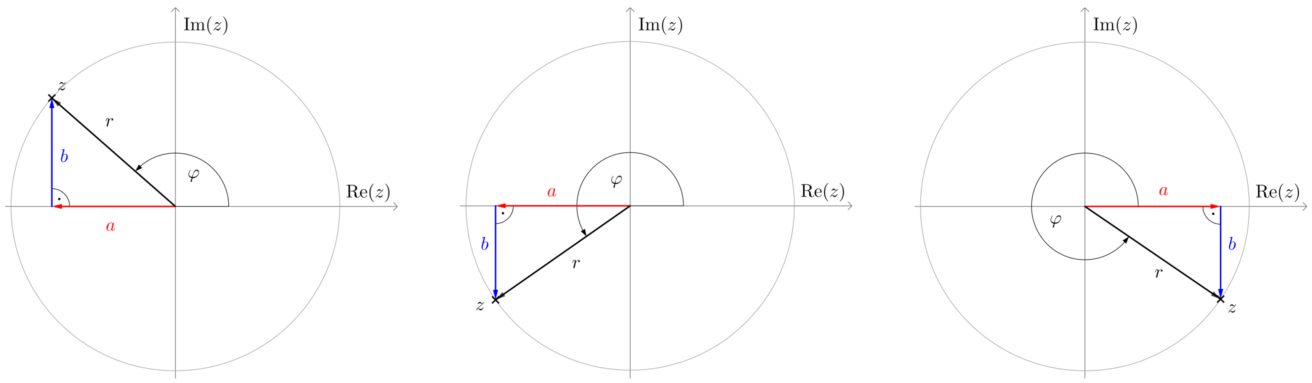
Auf dem Arbeitsblatt – Komplexe Zahlen behandeln wir auch die folgenden Fragen:

Was ist die **Komponentenform** einer komplexen Zahl?

Was ist die **Polarform** einer komplexen Zahl?

Wie funktioniert die Umrechnung zwischen diesen beiden Darstellungsformen?





Wie kann man komplexe Zahlen in Polarform multiplizieren und dividieren?

Beispiel 2.1. Wandle die komplexe Zahl $z = (4; 120°)$ von Polarform in Komponentenform um.

Lösung. Wir berechnen den Realteil und den Imaginärteil von z:
Realteil: $a = 4 \cdot \cos(120°) = -2$
Imaginärteil: $b = 4 \cdot \sin(120°) = 3{,}464...$

$$\implies z = -2 + 3{,}464... \cdot i$$

□

Beispiel 2.2. Wandle die komplexe Zahl $z = -5 - 12 \cdot i$ von Komponentenform in Polarform um.

Lösung. Der Betrag von z ist $r = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.
z liegt im 3. Quadranten, weil Real- und Imaginärteil von z beide negativ sind.
Das Argument von z ist also $\varphi = 180° + \arctan(\frac{12}{5}) = 247{,}3...°$.

$$\implies z = (13; 247{,}3...°)$$

□

Trigonometrische Form

Die komplexe Zahl $z = (r; \varphi)$ hat den Realteil $a = r \cdot \cos(\varphi)$ und den Imaginärteil $b = r \cdot \sin(\varphi)$. Statt $z = a + b \cdot i$ können wir also auch

$$z = r \cdot \cos(\varphi) + r \cdot \sin(\varphi) \cdot i = \boldsymbol{r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))}$$

schreiben. Diese Darstellung einer komplexen Zahl heißt auch **trigonometrische Form**.

Multiplikation in Polarform – Herleitung

Wir wollen die beiden komplexen Zahlen $z_1 = (r_1; \varphi_1)$ und $z_2 = (r_2; \varphi_2)$ multiplizieren.

1) Erkläre, warum

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1)) \quad \text{und} \quad z_2 = r_2 \cdot (\cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_2))$$

gilt.

2) Rechne nach, dass

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) + i \cdot (\cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2))]\,.$$

3) Zwei der trigonometrischen Summensätze sind

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \qquad \text{und}$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta).$$

Mehr dazu findest du auf dem Arbeitsblatt – Summensätze für Winkelfunktionen.

Erkläre mit den Summensätzen, warum $\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2; \varphi_1 + \varphi_2)}$ gilt.

Bei der Multiplikation in Polarform werden also die Beträge multipliziert und die Argumente addiert.

Beispiel 2.3. Stelle das Produkt der komplexen Zahlen $z_1 = (2; 30°)$ und $z_2 = (3; 80°)$ in Polarform und in Komponentenform dar.

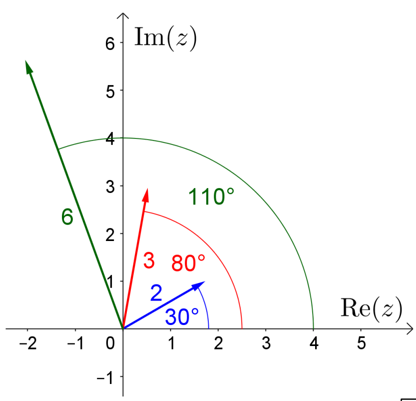
Lösung.

Polarform:

$$z_1 \cdot z_2 = (2 \cdot 3; 30° + 80°) = (6; 110°)$$

Komponentenform:

$$a = 6 \cdot \cos(110°) = -2{,}052...$$
$$b = 6 \cdot \sin(110°) = 5{,}638...$$
$$z_1 \cdot z_2 = -2{,}052... + 5{,}638... \cdot i$$



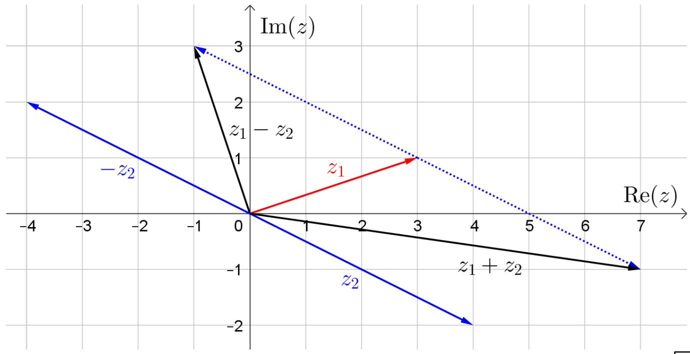
□

Beispiel 2.4. Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 3 + i$ und $z_2 = 4 - 2 \cdot i$.
Stelle $z_1 + z_2$ und $z_1 - z_2$ in Komponentenform dar.
Veranschauliche die Rechnungen in der Zahlenebene.

Lösung.

$$z_1 + z_2 = (3 + i) + (4 - 2 \cdot i) = 7 - 1 \cdot i$$

$$z_1 - z_2 = (3 + i) - (4 - 2 \cdot i) = -1 + 3 \cdot i$$



□

Beispiel 2.5. Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = (4; 72°)$ und $z_2 = (3; 305°)$.
Stelle $z_1 + z_2$ und $z_1 - z_2$ in Polarform dar.

Lösung. Wir wandeln die komplexen Zahlen in Komponentenform um:

$$z_1 = 1{,}236... + 3{,}804... \cdot i$$
$$z_2 = 1{,}720... - 2{,}457... \cdot i$$
$$\implies z_1 + z_2 = 2{,}956... + 1{,}346... \cdot i$$
$$\implies z_1 - z_2 = -0{,}484... + 6{,}261... \cdot i$$

Das Ergebnis wandeln wir zurück in Polarform um:

$$z_1 + z_2 = (3{,}249...; 24{,}48...°)$$
$$z_1 - z_2 = (6{,}280...; 94{,}42...°)$$

□

Beispiel 2.6. Stelle das Ergebnis in Polarform dar.

a) $(3; 90°) + (5; 270°)$ **b)** $(3; 0°) - (5; 180°)$

Lösung.

a) $\underbrace{(3; 90°)}_{=3\cdot i} + \underbrace{(5; 270°)}_{=-5\cdot i} = -2 \cdot i = (2; 270°)$

b) $\underbrace{(3; 0°)}_{=3} - \underbrace{(5; 180°)}_{=-5} = 8 = (8; 0°)$

□

Beispiel 2.7. Die komplexe Zahl $(-3 + 4 \cdot i)^4$ soll in der Form $a + b \cdot i$ dargestellt werden.

a) Berechne das Ergebnis *ohne* Verwendung der Polarform.
b) Berechne das Ergebnis *mit* Verwendung der Polarform.

Lösung.

a) Wir multiplizieren $(-3 + 4 \cdot i)^4$ mithilfe des Pascalschen Dreiecks aus.

Mehr dazu findest du auf dem Arbeitsblatt – Pascalsches Dreieck I.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ \mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & \mathbf{1} \end{array}$$

$$\begin{aligned} (-3 + 4 \cdot i)^4 &= 1 \cdot (-3)^4 + 4 \cdot (-3)^3 \cdot (4 \cdot i) + 6 \cdot (-3)^2 \cdot (4 \cdot i)^2 + 4 \cdot (-3) \cdot (4 \cdot i)^3 + 1 \cdot (4 \cdot i)^4 = \\ &= 81 - 432 \cdot i + 864 \cdot i^2 - 768 \cdot i^3 + 256 \cdot i^4 = \\ &= 81 - 432 \cdot i - 864 + 768 \cdot i + 256 = -527 + 336 \cdot i \end{aligned}$$

b) Wir wandeln die komplexe Zahl $z = -3 + 4 \cdot i$ in Polarform um:

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \varphi = 180^\circ - \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 126{,}86...^\circ \implies z = (5; 126{,}86...^\circ)$$

Also ist

$$(-3 + 4 \cdot i)^4 = (5^4; 4 \cdot 126{,}86...^\circ) = (625; 507{,}47...^\circ) = -527 + 336 \cdot i$$

□

Satz von de Moivre

Erkläre mithilfe der Polarform, warum der **Satz von de Moivre**

$$[\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)]^n = \cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi)$$

gilt.

Beispiel 2.8. Leite aus dem Satz von de Moivre die folgenden Formeln her:

1) $\cos(3 \cdot \varphi) = \cos(\varphi)^3 - 3 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi)^2$

2) $\sin(3 \cdot \varphi) = 3 \cdot \cos(\varphi)^2 \cdot \sin(\varphi) - \sin(\varphi)^3$

Lösung. Wir verwenden das Pascalsche Dreieck und den Satz von de Moivre:

$$\begin{aligned} [\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)]^3 &= \cos(\varphi)^3 + 3 \cdot \cos(\varphi)^2 \cdot (i \cdot \sin(\varphi)) + 3 \cdot \cos(\varphi) \cdot (i \cdot \sin(\varphi))^2 + (i \cdot \sin(\varphi))^3 \\ &= \underbrace{\cos(\varphi)^3 - 3 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi)^2}_{=\cos(3 \cdot \varphi)} + i \cdot (\underbrace{3 \cdot \cos(\varphi)^2 \cdot \sin(\varphi) - \sin(\varphi)^3}_{=\sin(3 \cdot \varphi)}) \end{aligned}$$

□

3. Gleichungen über der Grundmenge $\mathbb{C}$

Arbeitsblatt – Komplexe Zahlen

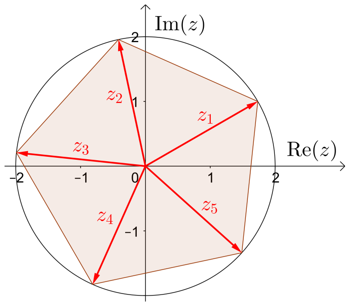
Auf dem Arbeitsblatt – Komplexe Zahlen behandeln wir auch die folgenden Fragen:

Warum ist -2 nicht die einzige Lösung der Gleichung $z^3 = -8$ in $\mathbb{C}$?

Welche 5 Lösungen hat die Gleichung $z^5 = (32; 150°)$ in $\mathbb{C}$?

Wie kann man die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + 4 \cdot x + 13 = 0$ in $\mathbb{C}$ berechnen?

Was ist der **Fundamentalsatz der Algebra**?



Beispiel 3.1. Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = (2; 30°)$, $z_2 = (2; 150°)$ und $z_3 = (2; 270°)$. Berechne z_1^3, z_2^3 und z_3^3.

Lösung.
$z_1^3 = (2^3; 3 \cdot 30°) = (8; 90°) = 8 \cdot i$
$z_2^3 = (2^3; 3 \cdot 150°) = (8; 450°) = (8; 90°) = 8 \cdot i$
$z_3^3 = (2^3; 3 \cdot 270°) = (8; 810°) = (8; 90°) = 8 \cdot i$ □

Im vorigen Beispiel haben wir drei verschiedene Lösungen der Gleichung $z^3 = 8 \cdot i$ gefunden.
Sie haben alle drei den gleichen Betrag $r = 2$.
Die Argumente unterscheiden sich nur um Vielfache des Winkels $\frac{360°}{3} = 120°$.

Wurzelziehen

Jede Gleichung der Form $z^n = (r; \varphi)$ hat genau n Lösungen. $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

1) Erkläre, warum $z_1 = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n}\right)$ eine Lösung der Gleichung ist.

2) Erkläre, warum $z_2 = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n} + \frac{360°}{n}\right)$ eine Lösung der Gleichung ist.

3) Erkläre, warum $z_3 = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n} + 2 \cdot \frac{360°}{n}\right)$ eine Lösung der Gleichung ist.

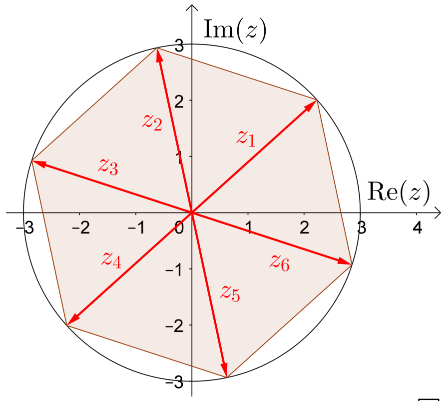
4) Erkläre, warum man jedes Mal eine Lösung erhält, wenn man den Winkel um $\frac{360°}{n}$ vergrößert.

5) Erkläre, warum man dadurch n verschiedene Lösungen erhält.

Beispiel 3.2. Berechne die 6 Lösungen der Gleichung $z^6 = (729; 252°)$.

Lösung. Der Betrag jeder Lösung ist $r = \sqrt[6]{729} = 3$.
Der Winkel zwischen zwei benachbarten Lösungen ist $\frac{360°}{6} = 60°$.
Wir berechnen die 6 Lösungen der Gleichung:

$$z_1 = (3; 252°/6) = (3; 42°)$$
$$z_2 = (3; 42° + 60°) = (3; 102°)$$
$$z_3 = (3; 162°)$$
$$z_4 = (3; 222°)$$
$$z_5 = (3; 282°)$$
$$z_6 = (3; 342°)$$



□

Beispiel 3.3. Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{C}$.

$$x^2 - 4 \cdot x + 13 = 0$$

Lösung. Wir setzen $p = -4$ und $q = 13$ in die kleine Lösungsformel ein:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm \sqrt{-9}$$

Geben wir in einen (einfachen) Taschenrechner $\sqrt{-9}$ ein, dann erhalten wir „DOMAIN Error“.

Es gibt keine *reelle* Zahl, die mit sich selbst multipliziert -9 ergibt.

Die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist nur für $x \geq 0$ definiert. Ihre Definitionsmenge (engl. domain) enthält keine negativen Zahlen.

Erinnere dich, dass wir mit quadratischer Ergänzung die Lösungsformeln für quadratische Gleichungen hergeleitet haben. Mehr dazu findest du auf dem Arbeitsblatt – Quadratische Gleichungen.

Tatsächlich gilt für jede Zahl $x \in \mathbb{C}$, dass

$$x^2 - 4 \cdot x + 13 = (x - 2)^2 - 2^2 + 13 = (x - 2)^2 + 9.$$

Damit ist

$$x^2 - 4 \cdot x + 13 = 0 \iff (x - 2)^2 + 9 = 0 \iff (x - 2)^2 = -9.$$

Wir sind also eigentlich auf der Suche nach Zahlen, die mit sich selbst multipliziert -9 ergeben. Wir wissen, dass es davon zwei gibt:

$$(x - 2)^2 = -9 \iff x - 2 = 3 \cdot i \quad \text{oder} \quad x - 2 = -3 \cdot i \iff x = 2 + 3 \cdot i \quad \text{oder} \quad x = 2 - 3 \cdot i.$$

Etwas knapper schreiben wir das als $x_{1,2} = 2 \pm 3 \cdot i$.
Mit der Lösungsformel kommen wir auf das gleiche Ergebnis, wenn wir $\pm\sqrt{-a} = \pm i \cdot \sqrt{a}$ vereinbaren:

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm i \cdot \sqrt{9} = 2 \pm 3 \cdot i$$

□

Diskriminante

Wovon hängt es also ab, ob die quadratische Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

keine, eine oder zwei reelle Lösungen hat? Anhand der großen Lösungsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

siehst du, dass es auf das Vorzeichen von

$$\boldsymbol{D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c}$$

ankommt. Die Abkürzung D steht für **Diskriminante** (lat. discriminare $\leftrightarrow$ unterscheiden). Anhand der Diskriminante kannst du nämlich unterscheiden, ob es zwei, eine oder keine reelle Lösungen gibt:

1) Wenn $\boldsymbol{D > 0}$ ist, dann hat die quadratische Gleichung **zwei reelle Lösungen**:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2 \cdot a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2 \cdot a}$$

2) Wenn $\boldsymbol{D = 0}$ ist, dann hat die quadratische Gleichung **genau eine reelle Lösung**:

$$x_1 = \frac{-b}{2 \cdot a}$$

3) Wenn $\boldsymbol{D < 0}$ ist, dann hat die quadratische Gleichung **keine reelle**, dafür aber **zwei komplexe Lösungen**:

$$x_1 = \frac{-b + i \cdot \sqrt{-D}}{2 \cdot a}, \quad x_2 = \frac{-b - i \cdot \sqrt{-D}}{2 \cdot a}$$

$-D$ ist positiv.

Beispiel 3.4. Für welche Zahlen $c \in \mathbb{R}$ hat die quadratische Gleichung

$$2 \cdot x^2 + 4 \cdot x + c = 0$$

zwei / genau eine / keine reelle Lösungen?

Lösung. Wir setzen $a = 2$ und $b = 4$ in die große Lösungsformel ein:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8 \cdot c}}{4}.$$

Es gibt genau eine Lösung, wenn

$$16 - 8 \cdot c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c = 2.$$

Die Lösung von $2 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 2 = 0$ ist dann $x = -1$.
Es gibt zwei reelle Lösungen, wenn

$$16 - 8 \cdot c > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c < 2.$$

Bei $c = 0$ hat die quadratische Gleichung zum Beispiel die reellen Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16}}{4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 = 0,\ x_2 = -2.$$

Es gibt keine reelle Lösung, aber zwei komplexe Lösungen, wenn

$$16 - 8 \cdot c < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c > 2.$$

Bei $c = 4$ hat die quadratische Gleichung zum Beispiel die komplexen Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{4} = \frac{-4 \pm 4 \cdot i}{4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 = -1 + i,\ x_2 = -1 - i. \qquad \square$$