KOMPETENZHEFT – LINEARE FUNKTIONEN

Inhaltsverzeichnis

Kompetenzmaterialien – Lineare Gleichungen und Funktionen

In diesem Kompetenzheft wird ein möglicher Einstieg zum Thema „Lineare Gleichungen und Funktionen“ vorgestellt.

Die mit ☆ markierten Inhalte sind für Lehrpersonen und interessierte Personen gedacht.

Die folgenden Kompetenzmaterialien sind für den Einsatz im Unterricht konzipiert:

✓ Arbeitsblatt – Steigungsmessung von Geraden (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Geradengleichungen (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Funktionen (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Lineare Funktionen (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Proportionalitäten (Ausarbeitung)

In der Aufgabensammlung – Lineare Gleichungen und Funktionen befinden sich passende Aufgabenstellungen.

Wir freuen uns über Feedback an mmf@univie.ac.at.

Datum: 10. Juni 2020.

1. Geraden und Steigungsmessung

Eine Gerade in der Ebene kann auf verschiedene Arten eindeutig festgelegt werden:

1) Gerade durch 2 Punkte A und B
2) Gerade durch einen Punkt A und mit gegebener Steigung
3) Gerade durch einen Punkt A und mit gegebener Richtung

In diesem Kompetenzheft behandeln wir die ersten beiden Möglichkeiten.
Mehr zur dritten Möglichkeit findest du am AB – Parameterdarstellung von Geraden in der Ebene.

Aus dem Alltag kennen wir den Unterschied zwischen steilen Straßen und flachen Straßen.
Wie würdest du die Steigung einer Straße messen?

Arbeitsblatt – Steigungsmessung von Geraden

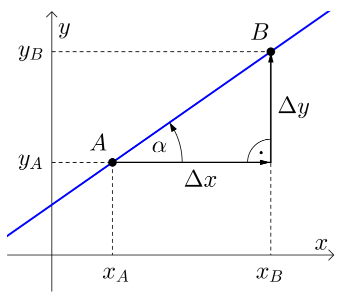
Auf dem Arbeitsblatt – Steigungsmessung von Geraden behandeln wir die folgenden Fragen:

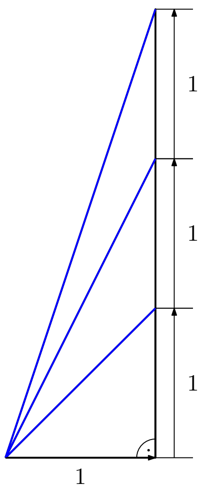
Wie wird die **Steigung** einer Geraden gemessen?

Was ist ein **Steigungsdreieck**?

Was ist ein **Differenzenquotient**?

Wie kann man den **Steigungswinkel** einer Geraden berechnen?





Was bedeutet 12 % Steigung?

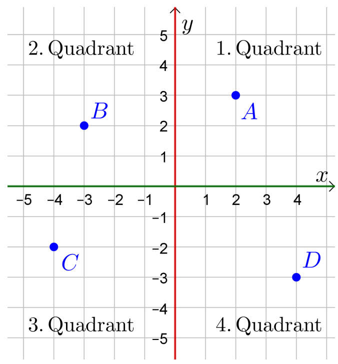
Warum ist der Steigungswinkel bei 24 % Steigung *nicht* doppelt so groß?

Warum ist eine Straße mit **100 % Steigung** *nicht* senkrecht.

Arbeitsblatt – Geradengleichungen

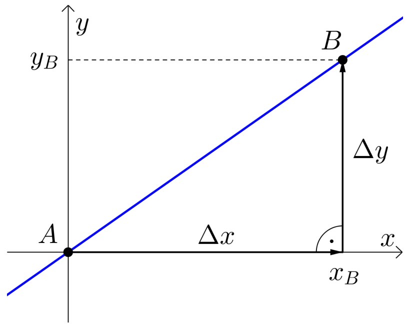
Auf dem Arbeitsblatt – Geradengleichungen behandeln wir die folgenden Fragen:

Was ist eine **Gleichung in 2 Variablen**?



Wie können die **Lösungen** einer solchen Gleichung in einem Koordinatensystem grafisch dargestellt werden?

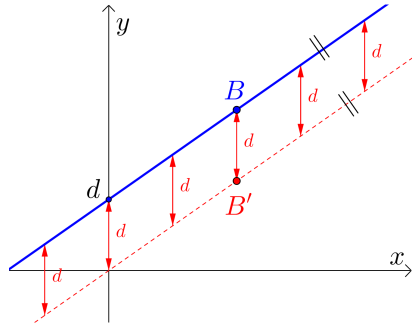
Warum ist die **Lösungsmenge** der Gleichung $\boldsymbol{y = k \cdot x}$ eine Gerade durch den Ursprung $(0 \mid 0)$ mit Steigung k?



Warum ist die Lösungsmenge der Gleichung

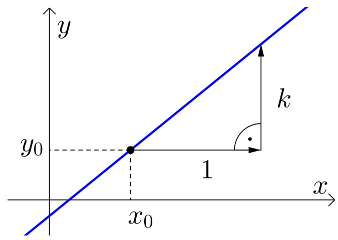
$$\boldsymbol{y = k \cdot x + d}$$

eine Gerade durch den Punkt $(0 \mid d)$ mit Steigung k?



Warum ist die Lösungsmenge der Gleichung $4 \cdot x - 3 \cdot y = 17$ eine Gerade?
Was ist die **allgemeine Form** einer Geradengleichung?

Wie kann man eine Gleichung jener Gerade aufstellen, die durch einen gegebenen Punkt verläuft und eine gegebene Steigung hat?



Beispiel 1.1. Eine Gerade verläuft durch die Punkte $(0 \mid 0)$ und $(3 \mid -1)$.

a) Bestimme eine Gleichung der Gerade.
b) Die Punkte $P = (6 \mid y_P)$ und $Q = (x_Q \mid 1)$ liegen auf der Gerade. Berechne y_P und x_Q.

Lösung.

a) Die Gerade verläuft durch die Punkte $(0 \mid 0)$ und $(3 \mid -1)$. Wir berechnen ihre Steigung:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1 - 0}{3 - 0} = -\frac{1}{3}$$

Genau jene Punkte, die die Gleichung $y = -\frac{1}{3} \cdot x$ erfüllen, liegen auf der Gerade.

b) Die Punkte P und Q liegen auf der Gerade.
Wir können also jeweils ihre Koordinaten in die Geradengleichung einsetzen:

$$y_P = -\frac{1}{3} \cdot 6 = -2$$

Um x_Q zu bestimmen, formen wir die Gleichung um:

$$1 = -\frac{1}{3} \cdot x_Q \iff 3 = -1 \cdot x_Q \iff x_Q = -3$$

□

Beispiel 1.2. Gegeben ist eine Gerade in allgemeiner Form: $7 \cdot x - 3 \cdot y = 4$

1) Berechne die Steigung der Gerade und den Schnittpunkt der Gerade mit der y-Achse.
2) Überprüfe rechnerisch, ob der Punkt $(2 \mid 3)$ auf, über oder unter der Gerade liegt.

Lösung.

1) Wir formen die Geradengleichung in die Form $y = k \cdot x + d$ um:

$$7 \cdot x = 4 + 3 \cdot y$$
$$7 \cdot x - 4 = 3 \cdot y$$
$$y = \frac{7 \cdot x - 4}{3} = \frac{7 \cdot x}{3} - \frac{4}{3} = \underbrace{\frac{7}{3}}_{=k} \cdot x \underbrace{-\frac{4}{3}}_{=d}$$

Die Gerade hat die Steigung $\frac{7}{3}$ und schneidet die y-Achse im Punkt $\left(0 \mid -\frac{4}{3}\right)$.

2) Wir setzen $x = 2$ in die Geradengleichung ein:

$$y = \frac{7}{3} \cdot 2 - \frac{4}{3} = \frac{14}{3} - \frac{4}{3} = \frac{10}{3} = 3{,}33...$$

Der Punkt $(2 \mid 3{,}33...)$ liegt also auf der Gerade. Wegen $3{,}33... > 3$ liegt der Punkt $(2 \mid 3)$ unterhalb der Gerade. □

Beispiel 1.3. Bestimme die Gleichung $y = k \cdot x + d$ jener Gerade, die durch die Punkte $(-2 \mid 5)$ und $(4 \mid -4)$ verläuft.

Lösung. Die Steigung k berechnen wir mit dem Differenzenquotienten:

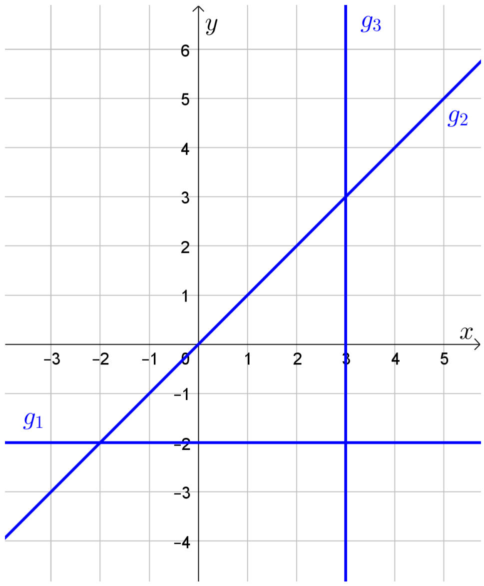
$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4 - 5}{4 - (-2)} = \frac{-9}{6} = -1{,}5$$

Wir formen die Gleichung auf d um und setzen den Punkt $(-2 \mid 5)$ ein:

$$d = y - k \cdot x = 5 - (-1{,}5) \cdot (-2) = 5 - 3 = 2$$

Eine Gleichung der Gerade ist also $y = -1{,}5 \cdot x + 2$. □

Beispiel 1.4. Gib jeweils eine Gleichung der dargestellten Geraden an.



Lösung.

1) Die Gerade g_1 ist waagrecht, daher ist ihre Steigung $k = 0$. Sie schneidet die y-Achse im Punkt $(0 \mid -2)$. Eine Gleichung der Gerade ist also

$$y = 0 \cdot x - 2 \implies y = -2$$

Alternative Erklärung: Ein Punkt liegt genau dann auf der Gerade g_1 wenn seine y-Koordinate gleich -2 ist. Eine zugehörige Gleichung ist daher $y = -2$.

2) Die Gerade g_2 hat die Steigung $k = 1$. Sie verläuft durch den Ursprung $(0 \mid 0)$, also ist $d = 0$. Eine Gleichung der Gerade ist also

$$y = 1 \cdot x + 0 \implies y = x$$

Alternative Erklärung: Ein Punkt liegt genau dann auf der Gerade g_2 wenn seine x- und y-Koordinaten gleich groß sind. Eine zugehörige Gleichung ist daher $y = x$.

Diese Gerade heißt auch **1. Mediane**.

3) Die Gerade g_3 ist senkrecht.

Senkrechte Geraden

i) Erkläre, warum man bei einer senkrechten Gerade g_3 keine Steigung angeben kann. Was passiert beim Differenzenquotienten $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ in diesem Fall?

ii) Erkläre, warum $x = 3$ eine Gleichung der Gerade g_3 ist.

□

2. Lineare Funktionen

Arbeitsblatt – Funktionen

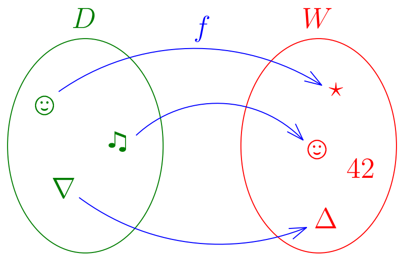
Auf dem Arbeitsblatt – Funktionen behandeln wir die folgenden Fragen:

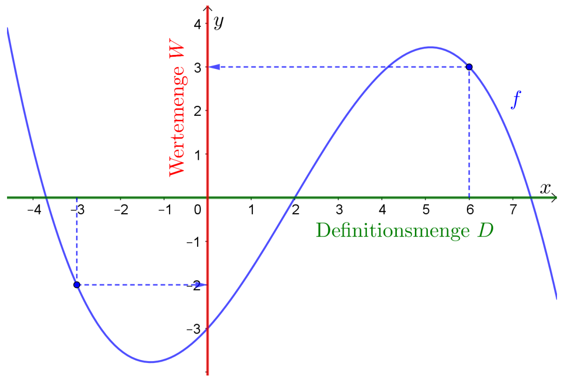
Was ist eine **Funktion**?

Was ist die **Definitionsmenge** einer Funktion?

Was ist die **Wertemenge** einer Funktion?

Was bedeutet die Schreibweise $f(☺) = \star$?





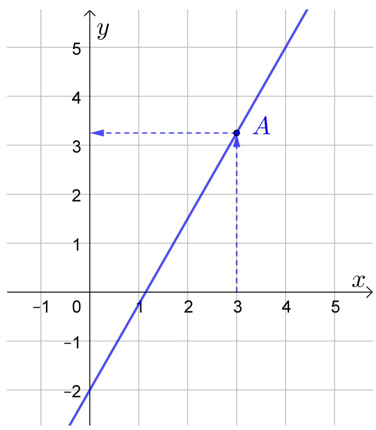
Was sind **Wertepaare** und **Wertetabelle** einer Funktion?

Wie kann eine Funktion mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$ und Wertemenge $\mathbb{R}$ grafisch veranschaulicht werden?

Was ist der **Funktionsgraph** einer Funktion?

Arbeitsblatt – Lineare Funktionen

Auf dem Arbeitsblatt – Lineare Funktionen behandeln wir die folgenden Fragen:



Wie kann eine (nicht senkrechte) Gerade als Funktionsgraph aufgefasst werden?

$$x = 3 \longrightarrow \boxed{\; y \;} \longrightarrow y(3) = 3{,}25$$

Was ist eine **Funktionsgleichung**?

Was ist eine **lineare Funktion**?

Wie ermittelt man aus dem Graphen einer linearen Funktion eine Funktionsgleichung?

Senkrechte Geraden

Erkläre, warum eine senkrechte Gerade kein Funktionsgraph sein kann.

Beispiel 2.1. Eine zylindrische Kerze mit 25 cm Höhe wird angezündet.
Die Kerze brennt gleichmäßig ab und hat nach 4 Stunden noch eine Höhe von 15 cm.

1) Mit $h(t)$ wird die Höhe der Kerze (in cm) nach t Stunden bezeichnet.
Begründe, warum h eine lineare Funktion ist, und ermittle eine Funktionsgleichung von h.
2) Interpretiere den Wert der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang.
3) Wie hoch ist die Kerze nach 4 Stunden 30 Minuten?
4) Nach wie viel Stunden sind 70 % der Kerze abgebrannt?
5) Nach wie viel Stunden ist die Kerze vollständig abgebrannt?
6) Zeichne den Funktionsgraphen von h.

Lösung.

1) Das Wort „gleichmäßig" deutet darauf hin, dass die Kerze *pro Stunde* stets die *gleiche Höhe verliert*. Die Kerzenhöhe in Abhängigkeit von der vergangenen Zeit ist daher eine lineare Funktion:

$$h(t) = k \cdot t + d$$

Wir kennen die zwei Wertepaare (0 h | 25 cm) und (4 h | 15 cm).
Die Steigung beträgt daher

$$k = \frac{15\,\text{cm} - 25\,\text{cm}}{4\,\text{h} - 0\,\text{h}} = \frac{-10\,\text{cm}}{4\,\text{h}} = -2{,}5\ \frac{\text{cm}}{\text{h}}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Höhe 25 cm, also gilt:

$$h(0) = 25 \quad \Longrightarrow \quad d = 25\,\text{cm}$$

Eine Funktionsgleichung von h ist somit $h(t) = -2{,}5 \cdot t + 25$.

2) Der Wert der Steigung $k = -2{,}5\,\frac{\text{cm}}{\text{h}}$ bedeutet, dass die Höhe der Kerze *pro Stunde um* 2,5 cm *kleiner* wird.

3) Wir setzen $t = 4{,}5\,\text{h}$ in die Funktionsgleichung ein:

$$h(4{,}5) = -2{,}5 \cdot 4{,}5 + 25 = 13{,}75\,\text{cm}$$

Nach 4 Stunden 30 Minuten ist die Kerze noch 13,75 cm hoch.

4) Zu dem Zeitpunkt, an dem 70 % der Kerze abgebrannt ist, sind noch 30 % der Anfangshöhe vorhanden. Die Höhe beträgt zu diesem Zeitpunkt daher $25 \cdot 30\,\% = 25 \cdot 0{,}30 = 7{,}5\,\text{cm}$.
Der gesuchte Zeitpunkt ist also die Lösung der Gleichung $h(t) = 7{,}5$:

$$-2{,}5 \cdot t + 25 = 7{,}5 \iff -2{,}5 \cdot t = -17{,}5 \iff t = 7\,\text{h}$$

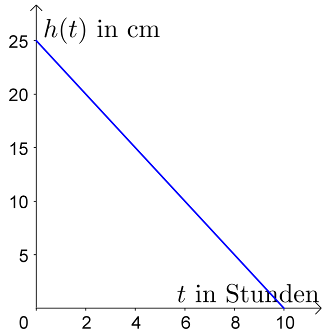
Nach 7 Stunden sind 70 % der Kerze abgebrannt.

5) Gesucht ist der Zeitpunkt, an dem die Kerzenhöhe 0 cm beträgt.
Wir lösen also die Gleichung $h(t) = 0$:

$$-2{,}5 \cdot t + 25 = 0 \quad\iff\quad t = \frac{25}{2{,}5} = 10\,\text{h}$$

Die Kerze ist nach 10 Stunden abgebrannt.

6) Der Funktionsgraph ist eine Strecke zwischen den Punkten (0 h | 25 cm) und (10 h | 0 cm):



□