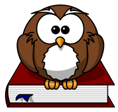
KOMPETENZHEFT – POLYNOMFUNKTIONEN

Inhaltsverzeichnis



Kompetenzmaterialien – Polynomfunktionen

In diesem Kompetenzheft wird ein möglicher Einstieg ins Thema „Polynomfunktionen" vorgestellt.

Die mit ☆ markierten Inhalte sind für besonders interessierte Personen gedacht.

Die folgenden Materialien sind für den Einsatz im Unterricht konzipiert:

✓ Arbeitsblatt – Quadratische Funktionen (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Quadratische Gleichungen (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Linearfaktoren (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Polynomdivision (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Polynomfunktionen (Ausarbeitung)

In der Aufgabensammlung – Polynomfunktionen befinden sich passende Übungsaufgaben.

Wir freuen uns über Feedback an mmf@univie.ac.at.

Datum: 17. Dezember 2020.

1. Quadratische Funktionen

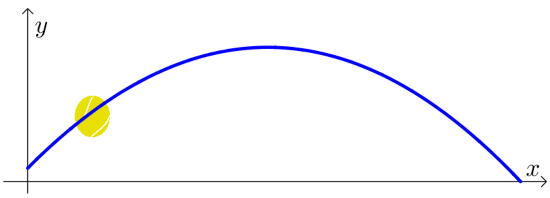
Bewegst du dich mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v = 3\,\text{m/s}$, legst du pro Sekunde immer die gleiche Strecke von 3 Metern zurück. Nach t Sekunden hast du dich also $3 \cdot t$ Meter bewegt. Allgemein wird der Zusammenhang, welche Strecke s du nach t Sekunden zurückgelegt hast, durch die *lineare Funktion* s mit

$$s(t) = v \cdot t$$

beschrieben. Wenn ein Stift zu Boden fällt, bewegt er sich nicht mit konstanter Geschwindigkeit. Aufgrund der Erdanziehung wird er gleichmäßig mit $g \approx 9{,}81\,\text{m/s}^2$ beschleunigt. Das heißt, pro gefallenem Meter wird der Stift um ca. $9{,}81\,\text{m/s}$ schneller. Man kann zeigen, dass der zurückgelegte Weg nach t Sekunden dann

$$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^{\mathbf{2}}$$

beträgt. Da die unabhängige Variable t in dieser Funktionsgleichung im Quadrat auftritt, sprechen wir von einer **quadratischen Funktion**. Mit quadratischen Funktionen können viele alltägliche funktionale Zusammenhänge beschrieben werden. Du kennst zum Beispiel die Flugkurve eines Tennisballs („Wurfparabel“):



Arbeitsblatt– Quadratische Funktionen

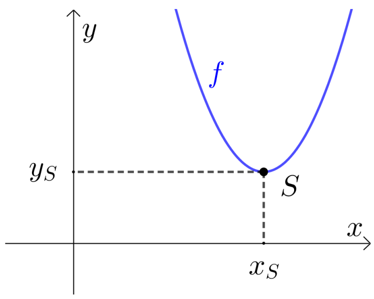
Auf dem Arbeitsblatt– Quadratische Funktionen behandeln wir die folgenden Fragen:

Was ist eine **quadratische Funktion**?

Was ist der **Scheitelpunkt** und wie berechnet man ihn?

Was ist die **Polynomform** einer quadratischen Funktion?

Was ist die **Scheitelpunktform** einer quadratischen Funktion?



Formel für Scheitelpunkt

Die **Polynomform** einer quadratischen Funktion f ist $\boldsymbol{f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$.
Die **Scheitelpunktform** einer quadratischen Funktion f ist $\boldsymbol{f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S}$.
Leite die folgende Formel für den Scheitelpunkt $S = (x_S \mid y_S)$ her:

$$S = \left(-\frac{b}{2 \cdot a} \,\middle|\, c - \frac{b^2}{4 \cdot a} \right)$$

Beispiel 1.1. Stelle die Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot (x-2)^2 + 1$ in Polynomform dar.

Lösung. Wir quadrieren mit der Binomischen Formel aus:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \cdot (x-2)^2 + 1 \\ &= 3 \cdot (x^2 - 4 \cdot x + 4) + 1 \\ &= 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 13 \end{aligned}$$ □

Beispiel 1.2. Bestimme den Scheitelpunkt der Funktion f mit $f(x) = x^2 + 5 \cdot x$.

Lösung. Wir ergänzen quadratisch:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 5 \cdot x = \\ &= x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x = \\ &= \underbrace{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2}_{x^2 + 5 \cdot x + \left(\frac{5}{2}\right)^2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt ist also $S = \left(-\frac{5}{2} \mid -\frac{25}{4}\right)$. □

Beispiel 1.3. Wandle die Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 13$ in Scheitelpunktform um.

Lösung.

1) Beim Term $a \cdot x^2 + b \cdot x$ den Koeffizienten a herausheben:

$$f(x) = 3 \cdot [x^2 - 4 \cdot x] + 13$$

2) In der Klammer quadratisch ergänzen:

$$f(x) = 3 \cdot \left[(x-2)^2 - 4\right] + 13$$

3) Äußere Klammer ausmultiplizieren und vereinfachen:

$$f(x) = 3 \cdot (x-2)^2 - 12 + 13 = 3 \cdot (x-2)^2 + 1$$ □

Beispiel 1.4. Ein Ball wird senkrecht nach oben geworfen. Die Höhe des Balls über dem Boden kann näherungsweise durch die folgende Funktion h beschrieben werden:

$$h(t) = -5 \cdot t^2 + 10 \cdot t + 2$$

$t \ldots$ Zeit nach dem Abwurf in Sekunden mit $t \geq 0$
$h(t) \ldots$ Höhe des Balls über dem Boden zur Zeit t in Metern

Berechne nach wie viel Sekunden der Ball den höchsten Punkt erreicht, und welche Höhe über dem Boden er zu diesem Zeitpunkt hat.

Lösung. Wir wandeln von der Polynomform in die Scheitelpunktform um:

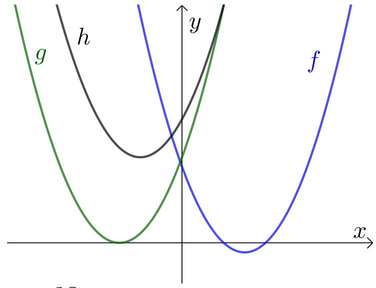
$$\begin{aligned} h(t) &= -5 \cdot t^2 + 10 \cdot t + 2 = \\ &= -5 \cdot \left[t^2 - 2 \cdot t\right] + 2 = \\ &= -5 \cdot \left[(t-1)^2 - 1\right] + 2 = \\ &= -5 \cdot (t-1)^2 + 7 \end{aligned}$$

Der Ball erreicht nach $t = 1\,\text{s}$ die maximale Höhe von $h(1) = 7\,\text{m}$. $\square$

2. Quadratische Gleichungen

Arbeitsblatt– Quadratische Gleichungen

Auf dem Arbeitsblatt– Quadratische Gleichungen behandeln wir die folgenden Fragen:



Was ist eine **quadratische Gleichung**?

Wie viele **Lösungen** kann eine quadratische Gleichung in $\mathbb{R}$ haben?

Wie hilft **quadratisches Ergänzen** beim Lösen quadratischer Gleichungen weiter?

Was ist die **kleine Lösungsformel**? Was ist die **große Lösungsformel**?

Was ist die **Diskriminante**?

Beispiel 2.1. Berechne alle Lösungen der quadratischen Gleichung $2 \cdot x^2 - 32 = 0$.

Lösung.

Lösungsweg 1:

$2 \cdot x^2 - 32 = 0$

$2 \cdot x^2 = 32$

$x^2 = 16$ Diese Gleichung hat 2 Lösungen.

$x_{1,2} = \pm\sqrt{16} \implies x_1 = 4,\ x_2 = -4$

Lösungsweg 2:

$2 \cdot x^2 - 32 = 0$

$2 \cdot (x^2 - 16) = 0$ $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$

$2 \cdot (x - 4) \cdot (x + 4) = 0 \implies x_1 = 4,\ x_2 = -4$

Ein Produkt ist genau dann 0, wenn mindestens einer der Faktoren 0 ist.

□

Beispiel 2.2. Berechne alle Lösungen der quadratischen Gleichung $3 \cdot x^2 - 12 \cdot x = 0$.

Lösung.

$$3 \cdot x^2 - 12 \cdot x = 0 \iff 3 \cdot x \cdot (x - 4) = 0 \iff x_1 = 0,\ x_2 = 4$$ □

Beispiel 2.3. Löse die quadratischen Gleichungen ohne Verwendung der Lösungsformeln.

1) $x^2 - 16 = 0$ **2)** $(x + 3)^2 = 25$ **3)** $(x - 5)^2 + 4 = 0$

Lösung.

1) $x^2 - 16 = 0 \iff x^2 = 16 \iff x = \pm\sqrt{16}$, also $x_1 = 4$, $x_2 = -4$.
2) $(x + 3)^2 = 25 \iff x + 3 = \pm 5$, also $x_1 = 2$ und $x_2 = -8$.
3) $(x - 5)^2 = -4$ kann keine Lösung in $\mathbb{R}$ haben, weil $(x - 5)^2 \geq 0$ gilt. □

Beispiel 2.4. Ein Ball wird senkrecht nach oben geworfen. Die Höhe des Balls über dem Boden kann näherungsweise durch die folgende Funktion h beschrieben werden:

$$h(t) = -5 \cdot (t-1)^2 + 7$$

$t \ldots$ Zeit nach dem Abwurf in Sekunden mit $t \geq 0$
$h(t) \ldots$ Höhe des Balls über dem Boden zur Zeit t in Metern

Berechne nach wie viel Sekunden der Ball am Boden auftrifft.

Lösung. Wir lösen die Gleichung $h(t) = 0$.

$$-5 \cdot (t-1)^2 + 7 = 0$$
$$-5 \cdot (t-1)^2 = -7$$
$$(t-1)^2 = \frac{7}{5}$$
$$t - 1 = \pm\sqrt{\frac{7}{5}}$$
$$t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\frac{7}{5}} \quad \Longrightarrow \quad t_1 = 2{,}183\ldots\,\text{s}, \ (t_2 = -0{,}183\ldots\,\text{s})$$

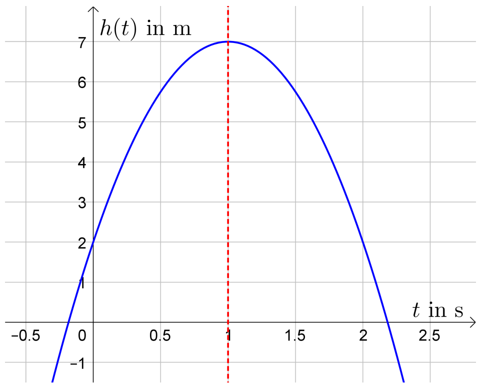
Der Ball trifft also nach rund 2,18 s am Boden auf.

Symmetrie

Der Funktionsgraph von h ist rechts dargestellt.

1) Markiere rechts die Nullstellen.

2) Erkläre anhand der Scheitelpunktform, warum der Funktionsgraph symmetrisch zur senkrechten Gerade durch den Scheitelpunkt ist.
Anders gesagt: Warum gilt $h(1+t) = h(1-t)$?



□

Beispiel 2.5. Berechne alle Lösungen der quadratischen Gleichung $4 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 21 = 0$ mit der kleinen Lösungsformel.

Lösung.

$$4 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 21 = 0$$
$$x^2 + 2 \cdot x - \frac{21}{4} = 0$$
$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{21}{4}} = -1 \pm \frac{5}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = -\frac{7}{2}$$

□

Herleitung der großen Lösungsformel

Wir leiten aus der kleinen Lösungsformel die **große Lösungsformel** her:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\boldsymbol{x_{1,2}} = -\frac{b}{2 \cdot a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2 \cdot a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2 \cdot a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a^2}} = \boldsymbol{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}}$$

Eigentlich ist ja $\sqrt{4 \cdot a^2} = |2 \cdot a|$. Den Betrag können wir hier weglassen, weil wir ohnehin $\pm\sqrt{\dots}$ rechnen.

Die Lösungen von Beispiel 2.5 kannst du also auch durch Einsetzen von $a = 4$, $b = 8$, $c = -21$ in die große Lösungsformel berechnen:

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 4 \cdot (-21)}}{2 \cdot 4} = \frac{-8 \pm 20}{8} \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = -\frac{7}{2}$$

Lösung mit Taschenrechner

Bei Anwendungsbeispielen sind die Koeffizienten a, b und c oft nicht ganzzahlig:

$$0{,}743 \cdot t^2 - \frac{45}{7} \cdot t - \frac{\pi}{12} = 0$$

Wenn du kein CAS, aber einen einfachen wissenschaftlichen Taschenrechners zur Hand hast, kannst du die Lösungen folgendermaßen berechnen:

i) Speichere die Koeffizienten im Taschenrechner ein:

$$0{,}743 \rightsquigarrow A \qquad -\frac{45}{7} \rightsquigarrow B \qquad -\frac{\pi}{12} \rightsquigarrow C$$

ii) Tippe die große Lösungsformel unter Verwendung der Variablen ein:

$$\left(-B + \sqrt{(B^2 - 4 \cdot A \cdot C)}\right) / (2 \cdot A) \rightsquigarrow t_1 \qquad \left(-B - \sqrt{(B^2 - 4 \cdot A \cdot C)}\right) / (2 \cdot A) \rightsquigarrow t_2$$

Achte darauf, dass am Ende des Zählers zwei Klammern zu schließen sind (Wurzel und Zähler).

Versuche mit deinem Taschenrechner die beiden Lösungen

$$t_1 = 8{,}692... \quad \text{und} \quad t_2 = -0{,}040...$$

zu berechnen.

3. Linearfaktorzerlegung

Arbeitsblatt – Linearfaktoren

Auf dem Arbeitsblatt – Linearfaktoren behandeln wir die folgenden Fragen:

Was ist der **Produkt-Null-Satz**? $0 = (x - \boxed{}) \cdot (x - \boxed{})$

Wie kann man eine quadratische Gleichung mit Lösungen -4 und 2 ermitteln?

Was ist der **Satz von Vieta**? Was ist die Zerlegung in **Linearfaktoren**?

Wie kann man die quadratische Gleichung $x^2 + 8 \cdot x + 15 = 0$ auf einen Blick lösen?

Beispiel 3.1. Albert, Barbara, Clemens und Daniela lösen die quadratische Gleichung

$$2 \cdot x^2 - 12 \cdot x - 14 = 0$$

auf unterschiedliche Arten:

a) Albert setzt $a = 2$, $b = -12$ und $c = -14$ in die große Lösungsformel ein:

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-14)}}{2 \cdot 2} = \frac{12 \pm 16}{4} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 7,\ x_2 = -1$$

b) Barbara normiert die quadratische Gleichung zu

$$x^2 - 6 \cdot x - 7 = 0.$$

Dann setzt sie $p = -6$ und $q = -7$ in die kleine Lösungsformel ein:

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3^2 + 7} = 3 \pm 4 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 7,\ x_2 = -1$$

c) Clemens lernt nicht gerne Formeln auswendig. Er ergänzt die normierte Gleichung quadratisch:

$$x^2 - 6 \cdot x - 7 = 0 \iff (x-3)^2 - 3^2 - 7 = 0 \iff (x-3)^2 = 16 \iff x - 3 = \pm 4$$

Die beiden Lösungen sind also $x_1 = 7$ und $x_2 = -1$.

d) Daniela zerlegt die normierte Gleichung in Linearfaktoren:

$$0 = x^2 - 6 \cdot x - 7 = (x - 7) \cdot (x + 1)$$

Als ganzzahlige Lösungen kommen nur die Teiler ± 1 und ± 7 von $q = 7$ in Frage.

Da ein Produkt von Zahlen nur dann 0 ist, wenn mindestens ein Faktor 0 ist, folgert Daniela, dass die beiden Lösungen $x_1 = 7$ und $x_2 = -1$ sind.

Beispiel 3.2. Wandle die quadratische Funktion f mit Scheitelpunktform

$$f(x) = 5 \cdot (x-3)^2 - 80$$

in die **Linearfaktorform** $\boldsymbol{f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}$ um.

Lösung.
Lösungsweg 1: Wir berechnen die Nullstellen von f.

$$5 \cdot (x-3)^2 - 80 = 0 \qquad \iff \qquad (x-3)^2 = 16 \qquad \iff \qquad x = 3 \pm 4$$

Nach dem Satz von Vieta gilt also $f(x) = 5 \cdot (x-7) \cdot (x+1)$.
Lösungsweg 2: Wir heben den Koeffizienten 5 heraus und verwenden $a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$.

$$f(x) = 5 \cdot \Big[(x-3)^2 - \underbrace{16}_{=4^2}\Big] = 5 \cdot [(x-3-4) \cdot (x-3+4)] = 5 \cdot (x-7) \cdot (x+1) \qquad \square$$

4. Polynomfunktionen

Beispiel 4.1. Berechne das Produkt der beiden Polynome: Multipliziere mit dem Distributivgesetz aus.

$$(2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 3) \cdot (3 \cdot x - 1)$$

Lösung.

$$\begin{aligned}(2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 3) \cdot (3 \cdot x - 1) &= 6 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 + 9 \cdot x - 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 3 = \\ &= 6 \cdot x^3 - 14 \cdot x^2 + 13 \cdot x - 3\end{aligned}$$

Polynomdivision

Wenn wir diese Gleichung durch $(3 \cdot x - 1)$ dividieren, erhalten wir:

$$2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 3 = (6 \cdot x^3 - 14 \cdot x^2 + 13 \cdot x - 3) : (3 \cdot x - 1)$$

Als Nächstes besprechen wir, wie man Polynome dividiert, also:

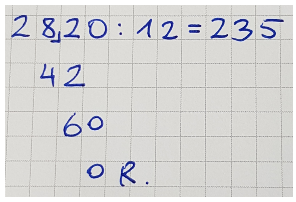
$$(6 \cdot x^3 - 14 \cdot x^2 + 13 \cdot x - 3) : (3 \cdot x - 1) = ?$$

□

Arbeitsblatt – Polynomdivision

Auf dem Arbeitsblatt – Polynomdivision behandeln wir die folgenden Fragen:

Warum funktioniert der **Algorithmus zur schriftlichen Division**, den wir als Kinder lernen?



€ Personen € pro Person

$$\begin{array}{rl} 2\,8\,2\,0 : 1\,2 = 2\,0\,0 + 3\,0 + 5 = 2\,3\,5 & \\ -2\,4\,0\,0 & \\ \hline 4\,2\,0 & \\ -3\,6\,0 & \\ \hline 6\,0 & \\ -6\,0 & \\ \hline 0 & \text{Rest} \end{array}$$

Wie führt man eine **Division von Polynomen** durch?

$$\begin{array}{rl} \ominus \Big\{ & (8 \cdot x^3 - 18 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 3) : (4 \cdot x + 1) = 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 3 \\ & 8 \cdot x^3 + \ 2 \cdot x^2 \\ \hline \ominus \Big\{ & -20 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 3 \\ & -20 \cdot x^2 - 5 \cdot x \\ \hline \ominus \Big\{ & 12 \cdot x + 3 \\ & 12 \cdot x + 3 \\ \hline & 0 \ \text{Rest} \end{array}$$

$$\frac{8 \cdot x^3}{4 \cdot x} \qquad \frac{-20 \cdot x^2}{4 \cdot x} \qquad \frac{12 \cdot x}{4 \cdot x}$$

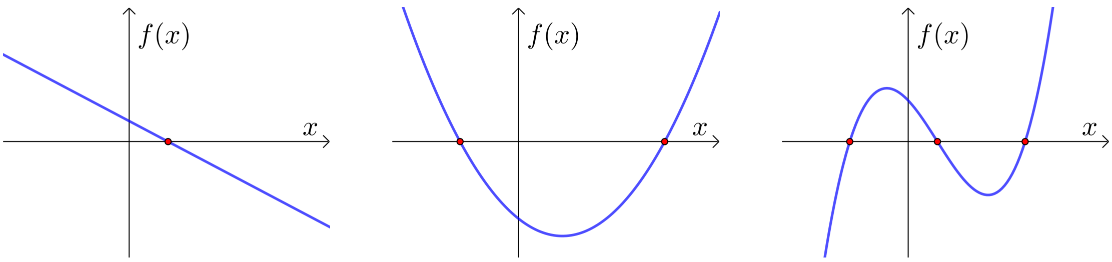
Arbeitsblatt – Polynomfunktionen

Auf dem Arbeitsblatt – Polynomfunktionen behandeln wir die folgenden Fragen:

Was ist eine **Polynomfunktion**?

Was ist der **Grad** einer Polynomfunktion?

Was besagt der **Fundamentalsatz der Algebra**?



Gibt es eine **allgemeine Lösungsformel** zum Lösen von Polynomgleichungen?

Wie kann eine **Substitution** beim Lösen von Polynomgleichungen helfen?

Wie kann der **Produkt-Null-Satz** beim Lösen von Polynomgleichungen helfen?

Wie kann das **Abspalten von Linearfaktoren** beim Lösen von Polynomgleichungen helfen?

$$f(x) = -2\cdot x^3 - 15\cdot x^2 - 22\cdot x + 15 = \boxed{}\cdot\left(x - \boxed{}\right)\cdot\left(x - \boxed{}\right)\cdot\left(x - \boxed{}\right)$$