KOMPETENZHEFT – TRIGONOMETRIE

Inhaltsverzeichnis

Kompetenzmaterialien – Trigonometrie

In diesem Kompetenzheft wird ein möglicher Einstieg in die Trigonometrie vorgestellt.

Die Inhalte bauen auf dem Kompetenzheft – Geometrie auf.

Die mit ☆ markierten Inhalte sind für Lehrpersonen und interessierte Personen gedacht.

Die folgenden Kompetenzmaterialien sind für den Einsatz im Unterricht konzipiert:

✓ Arbeitsblatt – Strahlensatz (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Ähnlichkeit und Winkelfunktionen (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Winkelfunktionen am Einheitskreis (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Graphen der Winkelfunktionen (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Allgemeines Dreieck (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Summensätze für Winkelfunktionen (Ausarbeitung)

Wir freuen uns über Feedback an mmf@univie.ac.at.

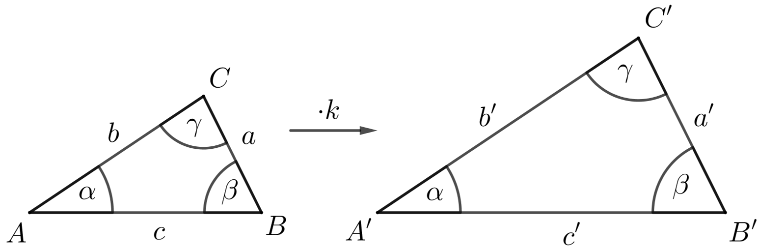
Datum: 24. September 2020.

1. Ähnlichkeit, Strahlensatz & Winkelfunktionen

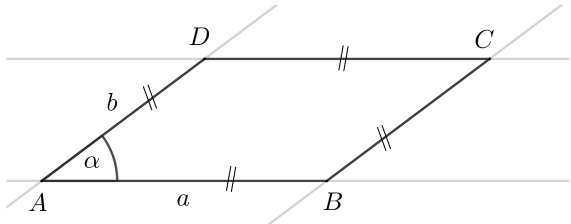
Arbeitsblatt – Strahlensatz

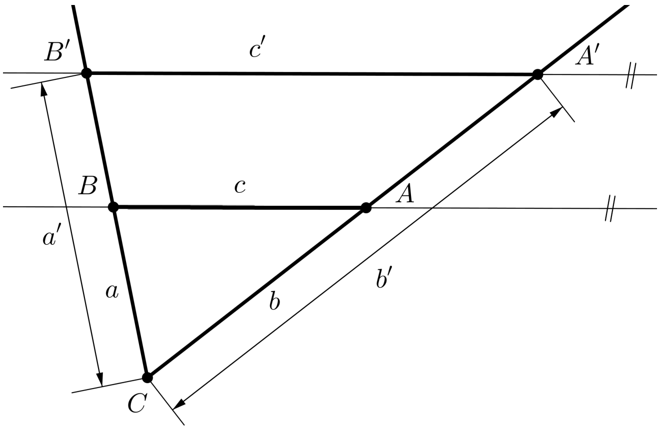
Auf dem Arbeitsblatt – Strahlensatz behandeln wir die folgenden Fragen:

Was bedeutet es, wenn zwei Dreiecke **ähnlich** sind?
Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Seitenlängen ähnlicher Dreiecke?



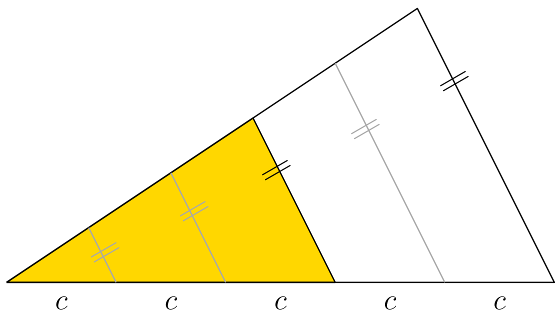
Warum sind in der Figur rechts die gegenüberliegenden Seiten gleich lang?

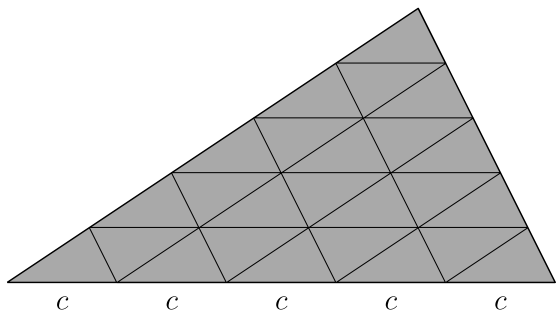




Was sagt der **Strahlensatz** aus?

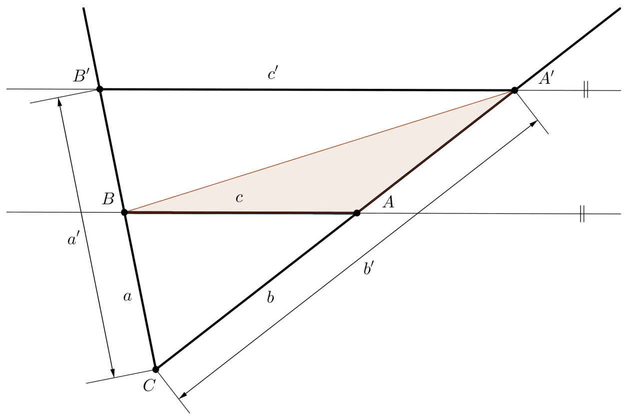
Was steckt hinter dem Strahlensatz?

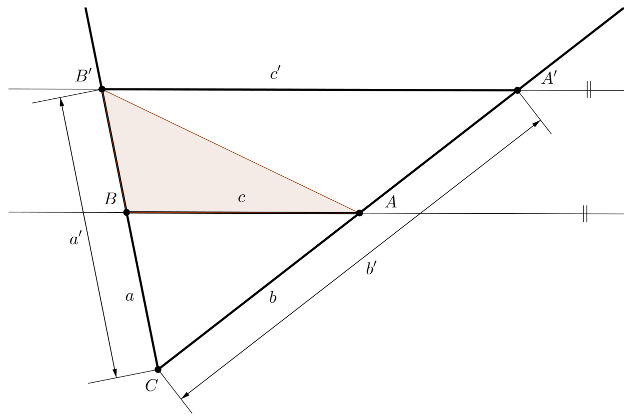




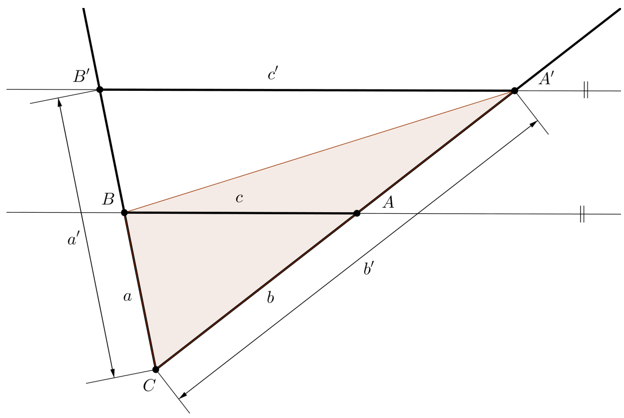
Strahlensatz (Beweis mit Flächeninhalten)

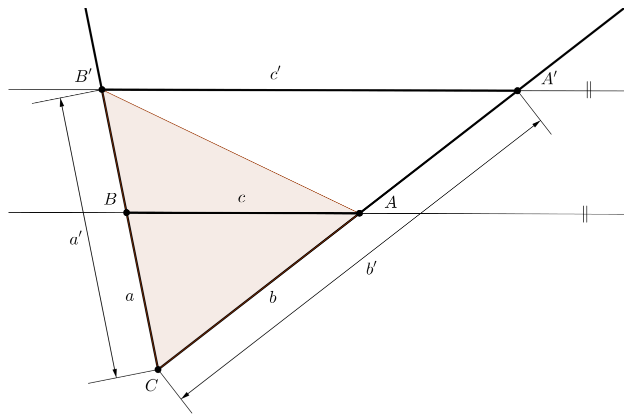
Der folgende Beweis für den Strahlensatz gilt für beliebige Skalierungsfaktoren $k \in \mathbb{R}$.
Erkläre, warum die Dreiecke $\triangle ABA'$ und $\triangle ABB'$ den gleichen Flächeninhalt besitzen:





Erkläre, warum die Dreiecke $\triangle A'BC$ und $\triangle AB'C$ den gleichen Flächeninhalt besitzen:

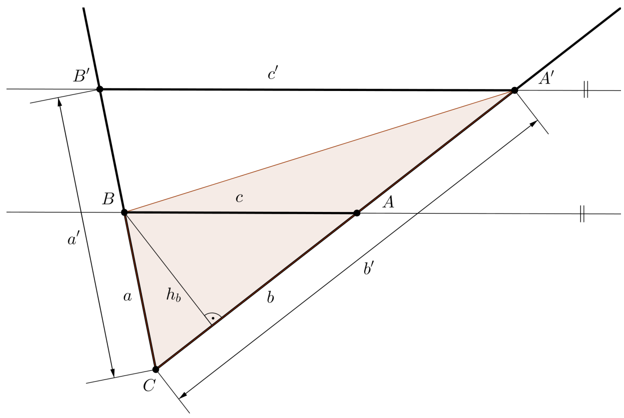


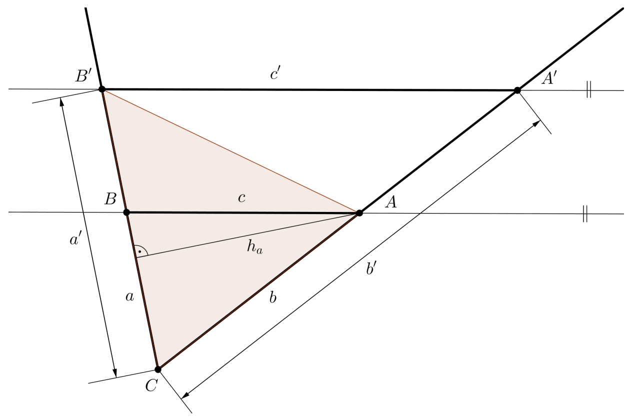


i) Erkläre, warum unten $b \cdot h_b = a \cdot h_a$ gilt.

ii) Erkläre, warum unten $b' \cdot h_b = a' \cdot h_a$ gilt.

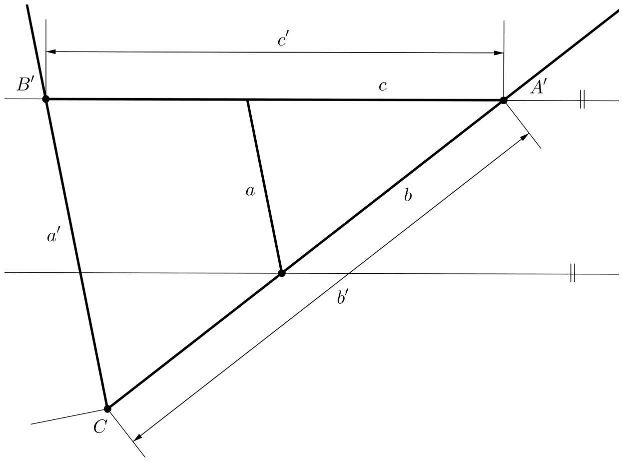
iii) Folgere, dass $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$ gilt.





Strahlensatz (Beweis mit Flächeninhalten)

Um $\dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ zu zeigen, verschieben wir das kleine Dreieck so parallel, dass der Eckpunkt A im Eckpunkt A' zu liegen kommt:

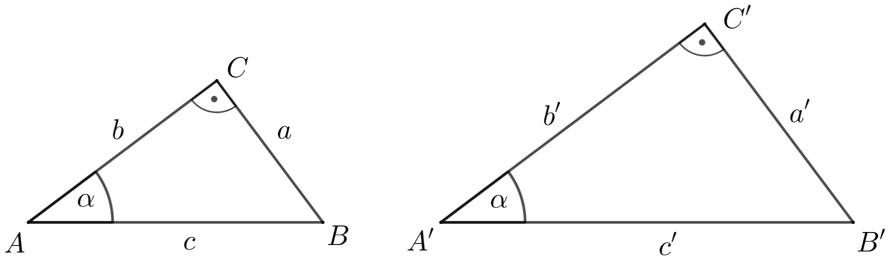


Erkläre, warum nun die Gleichung $\dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ folgt.

Arbeitsblatt – Ähnlichkeit und Winkelfunktionen

Auf dem Arbeitsblatt – Ähnlichkeit und Winkelfunktionen behandeln wir die folgenden Fragen:

Zwei rechtwinklige Dreiecke haben den gleichen Winkel α.

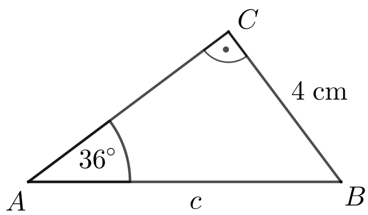


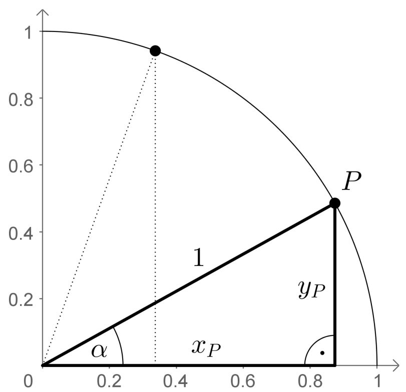
Warum sind die Dreiecke ähnlich?

Was ist die **Gegenkathete von $\boldsymbol{\alpha}$**? Was ist die **Ankathete von $\boldsymbol{\alpha}$**?

Warum gilt der Zusammenhang $\dfrac{a}{c} = \dfrac{a'}{c'}$?

Was wird mithilfe der Tasten $\boxed{\text{SIN}}$, $\boxed{\text{COS}}$ und $\boxed{\text{TAN}}$ am Taschenrechner berechnet? Wie können wir damit **Seitenlängen** in rechtwinkligen Dreiecken **berechnen**?

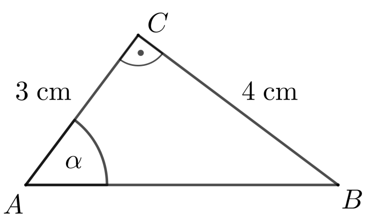




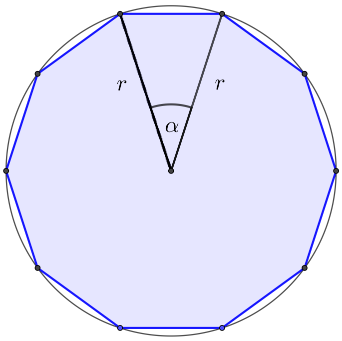
Welche Werte kann $\sin(\alpha)$ für *spitze* Winkel α annehmen?

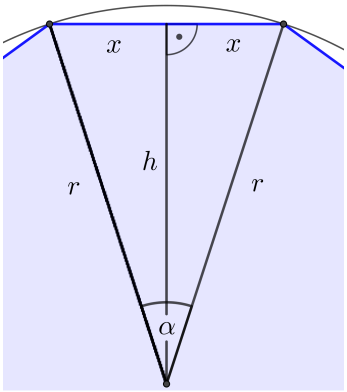
Was wird mithilfe der Tasten $\boxed{\text{SIN}^{-1}}$, $\boxed{\text{COS}^{-1}}$ und $\boxed{\text{TAN}^{-1}}$ am Taschenrechner berechnet?

Wie können wir damit **Winkel** in rechtwinkligen Dreiecken **berechnen**?



Beispiel 1.1. Ein regelmäßiges 10-Eck mit Umkreisradius $r = 4\,\text{cm}$ ist dargestellt.





1) Berechne den Zentriwinkel α.

2) Berechne den Flächeninhalt und den Umfang des 10-Ecks.

Lösung.

1) Wegen der Regelmäßigkeit ist α ein Zehntel des vollen Winkels:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

2) Wir teilen das gleichschenklige Dreieck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke. Die Höhe teilt den Winkel α in 2 gleich große Teile. Also gilt:

$$\sin(18^\circ) = \frac{x}{r} \quad\iff\quad x = r \cdot \sin(18^\circ) = 1{,}236\ldots\,\text{cm}$$

$$\cos(18^\circ) = \frac{h}{r} \quad\iff\quad h = r \cdot \cos(18^\circ) = 3{,}804\ldots\,\text{cm}$$

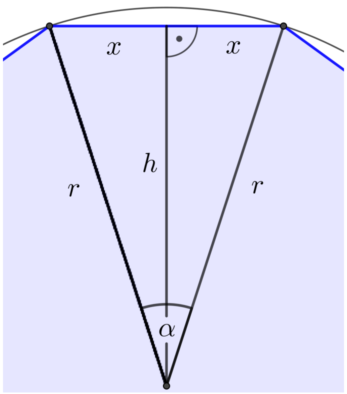
Wir berechnen den Flächeninhalt und Umfang des 10-Ecks:

$$A = 20 \cdot \frac{x \cdot h}{2} = 47{,}02\ldots\,\text{cm}^2$$

$$u = 20 \cdot x = 24{,}72\ldots\,\text{cm}$$

□

Beispiel 1.2. ☆ Gegeben ist ein regelmäßiges n-Eck mit Umkreisradius r.



1) Stelle eine Formel für den Zentriwinkel α auf.

2) Stelle eine Formel für den Flächeninhalt und den Umfang auf.

Lösung. Wir stellen die Formeln so wie beim regelmäßigen 10-Eck auf:

1)

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}$$

2)

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{x}{r} \quad\iff\quad x = r \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h}{r} \quad\iff\quad h = r \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

$$A = 2 \cdot n \cdot \frac{x \cdot h}{2} = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

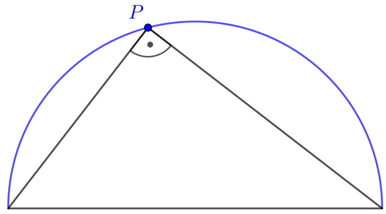
$$u = 2 \cdot n \cdot x = 2 \cdot r \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

Setze zur Probe $n = 10$ und $r = 4\,\text{cm}$ in die Formeln ein.

□

Satz des Thales

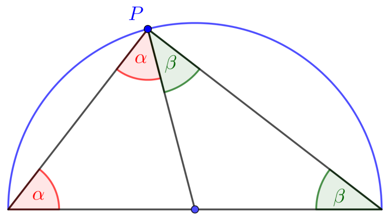
Auf dem rechts dargestellten Halbkreisbogen wurde ein beliebiger Punkt P gewählt.



Der **Satz des Thales** besagt, dass das rechts eingezeichnete Dreieck dann rechtwinklig ist.

Der zugehörige (Halb)kreis heißt dann auch **Thaleskreis**.

Warum stimmt der Satz des Thales?



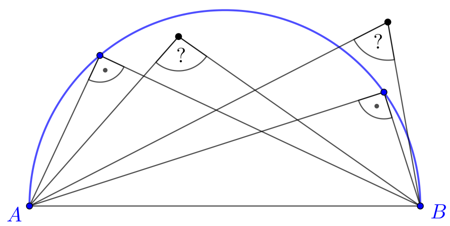
Rechts ist der Radius zu P eingezeichnet.

1) Warum sind die beiden eingezeichneten Winkel α (bzw. β) tatsächlich gleich groß?

2) Begründe, warum $\alpha + \beta = 90°$ gilt.

Satz des Thales (Umkehrung)

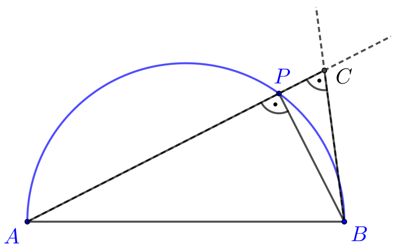
Rechts ist der Thaleskreis mit Durchmesser AB dargestellt.



Jeder Punkt am Thaleskreis (außer A und B) liefert also ein rechtwinkliges Dreieck.
Kann ein anderer Punkt ein rechtwinkliges Dreieck liefern?

Tatsächlich gilt die **Umkehrung** des **Satz des Thales**:
Besitzt ein Dreieck ABC im Eckpunkt C einen rechten Winkel, so liegt C am Thaleskreis über der Strecke AB.

Wir begründen indirekt: Angenommen, C liegt nicht am Thaleskreis.



1) Wir zeichnen die Strahlen AC und BC ein.

2) Unabhängig davon, wo der Eckpunkt C liegt: Zumindest einer der beiden Strahlen muss den Thaleskreis schneiden.

Die Tangenten in A und B sind parallel.

Im rechts dargestellten Dreieck schneidet der Strahl AC den Thaleskreis in einem Punkt P.

3) Das Dreieck ABP ist nach dem Satz des Thales rechtwinklig.

4) Das Dreieck BCP hätte dann zwei rechte Winkel. ↯

Wir haben damit bewiesen:
Die Menge aller Punkte C in der Ebene, für die $\angle ACB = 90°$ gilt, ist genau die Menge aller Punkte des Kreises mit Durchmesser AB, mit Ausnahme der Punkte A und B selbst.

2. Winkelfunktionen am Einheitskreis

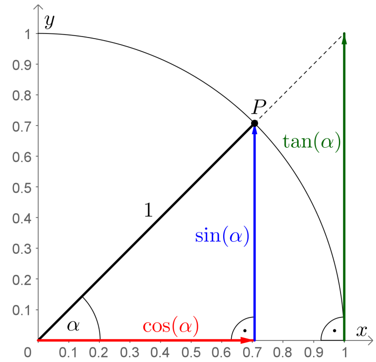
Arbeitsblatt – Winkelfunktionen am Einheitskreis

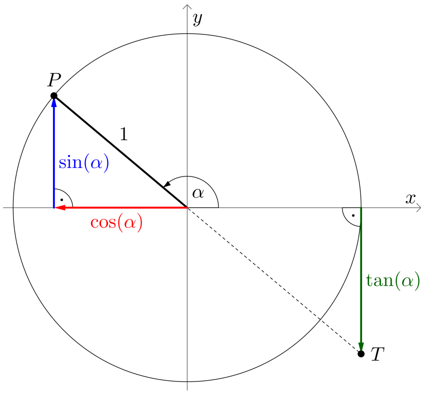
Auf dem Arbeitsblatt – Winkelfunktionen am Einheitskreis behandeln wir die folgenden Fragen:

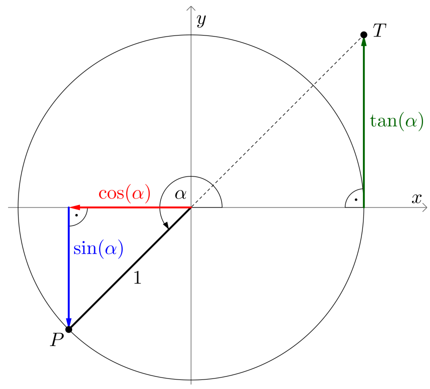
Was ist der **Einheitskreis** und welchen Zusammenhang gibt es zu den Winkelfunktionen?

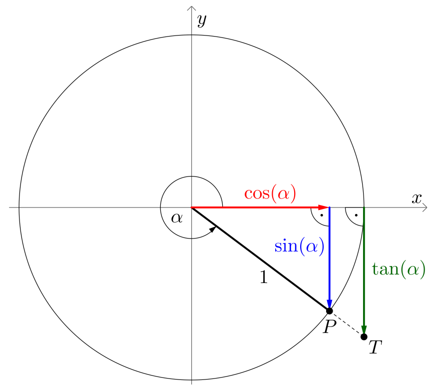
Wie können wir damit die **Winkelfunktionen** für jeden Winkel α definieren?

Welche Winkel α sind Lösungen der Gleichung $\sin(\alpha) = 0{,}6$?



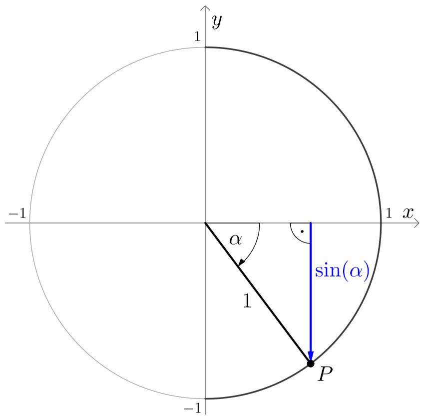


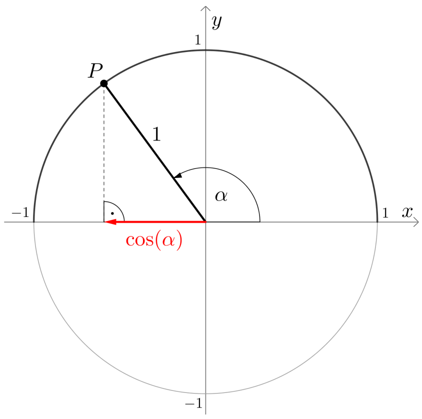


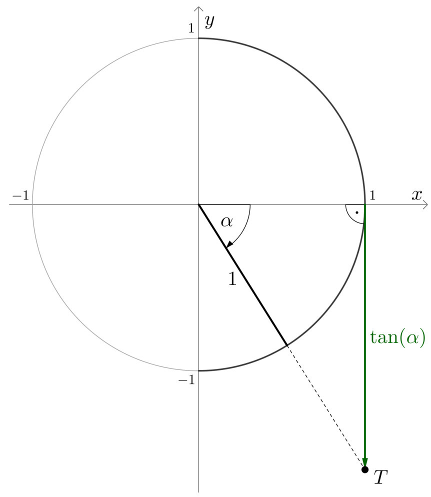


Was sind die Funktionen **Arcussinus**, **Arcuscosinus** und **Arcustangens**?

Wofür können wir sie verwenden?



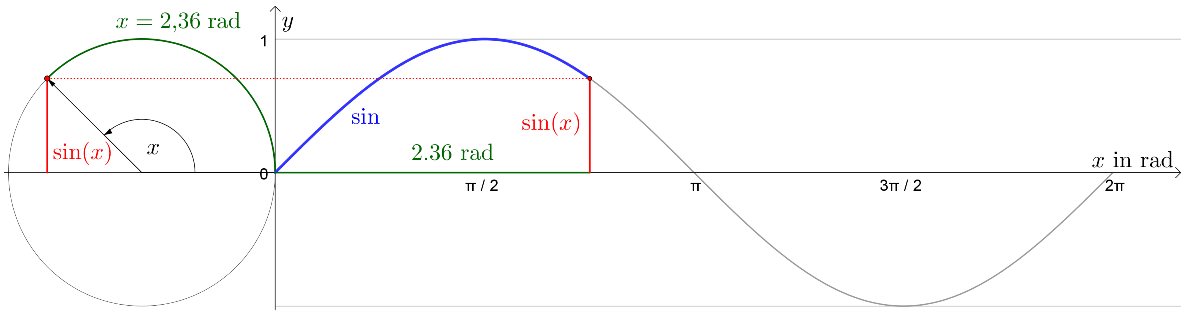


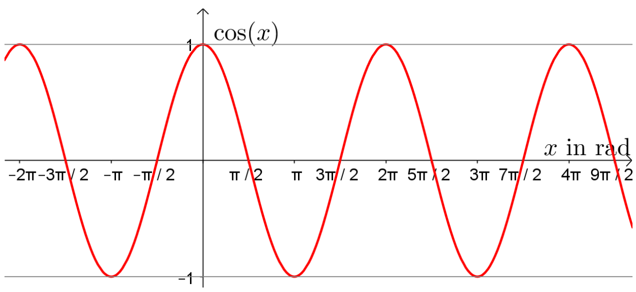


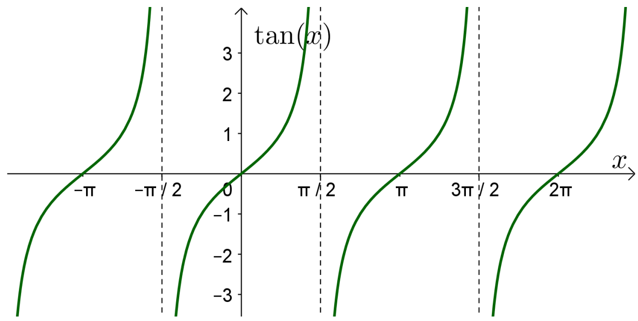
3. Allgemeine Winkelfunktionen

Arbeitsblatt – Graphen der Winkelfunktionen

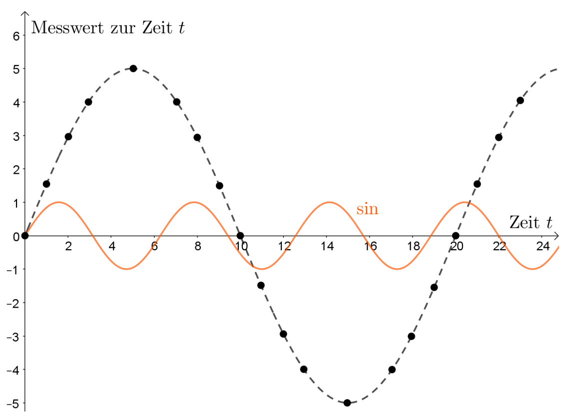
Auf dem Arbeitsblatt – Graphen der Winkelfunktionen behandeln wir den Übergang von Winkelfunktionen am Einheitskreis zu den Graphen der Winkelfunktionen:

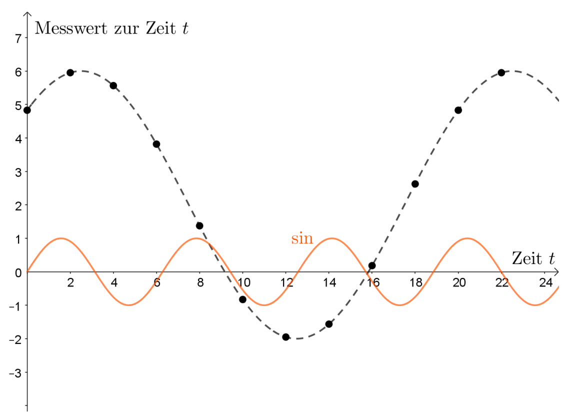






In der Naturwissenschaft und Technik gibt es viele Vorgänge, die mithilfe einer Sinusfunktion beschrieben werden können. Zum Beispiel: Sinustöne in der Akustik, Schwingungen eines Federpendels, Wasserstand bei Ebbe und Flut, Farbübergänge auf Fotos, etc.
Dazu muss die Sinusfunktion allerdings meist etwas angepasst werden:



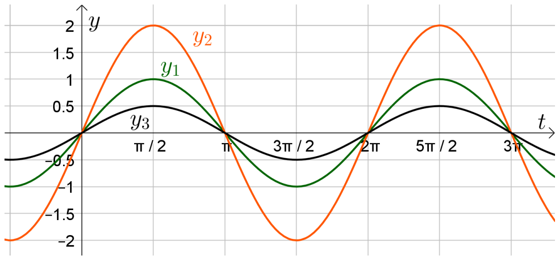


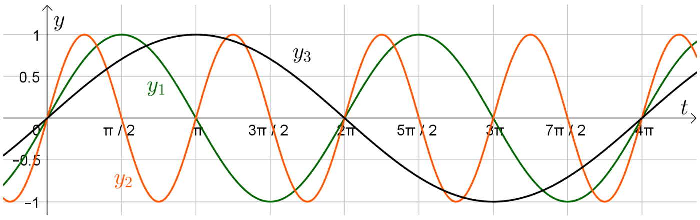
Der Graph der Sinusfunktion (orange) im linken Bild muss horizontal und vertikal gestreckt werden, um die Messwerte (schwarz) beschreiben zu können.
Der Graph der Sinusfunktion im rechten Bild muss nicht nur gestreckt, sondern auch verschoben werden, um die Messwerte beschreiben zu können.

Arbeitsblatt – Graphen der Winkelfunktionen

Auf dem Arbeitsblatt – Graphen der Winkelfunktionen behandeln wir die folgenden Fragen zur allgemeinen Sinusfunktion mit Gleichung $\boldsymbol{y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + c}$.

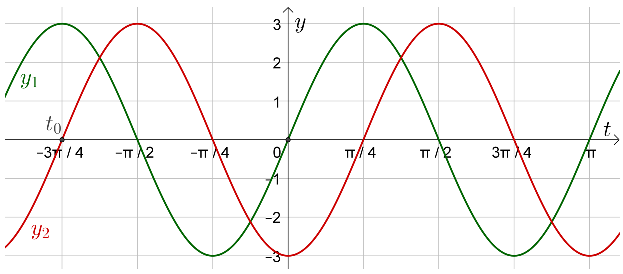
Welchen Einfluss hat die **Amplitude A** auf den Funktionsgraphen?

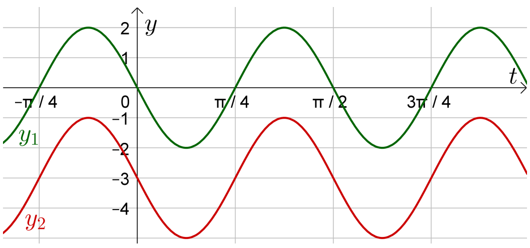




Welchen Einfluss hat die **Kreisfrequenz ω** auf den Funktionsgraphen?

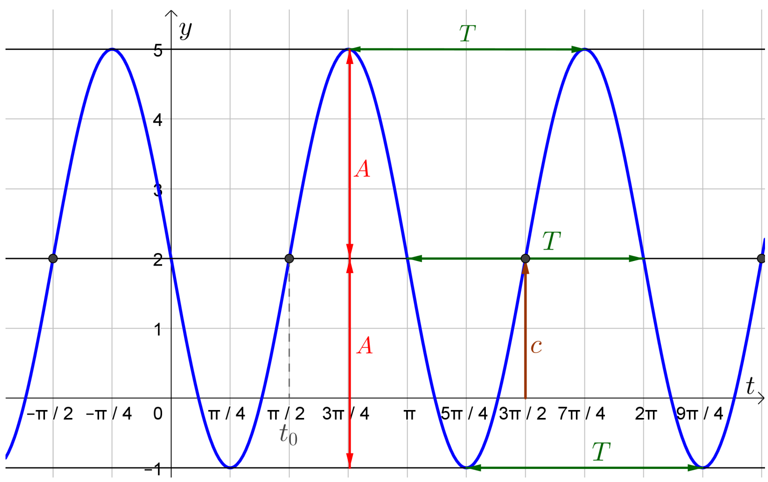
Welchen Einfluss hat der **Nullphasenwinkel φ** auf den Funktionsgraphen?





Welchen Einfluss hat der Parameter c auf den Funktionsgraphen?

Wie können wir ausgehend vom Funktionsgraphen die Parameter A, c, ω und φ ablesen?

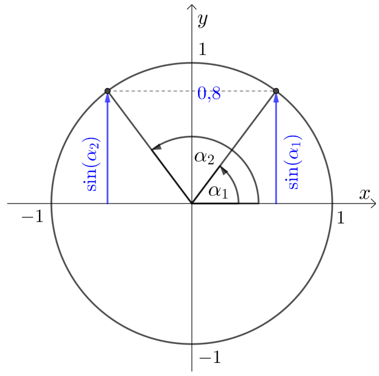


4. Goniometrische Gleichungen

Bei **goniometrischen Gleichungen** tritt die Unbekannte im Argument einer Winkelfunktion auf.

Beispiel 4.1. Berechne alle Winkel α im Intervall $[0°; 360°[$, die Lösungen der Gleichung sind.

a) $\sin(\alpha) = 0{,}8$



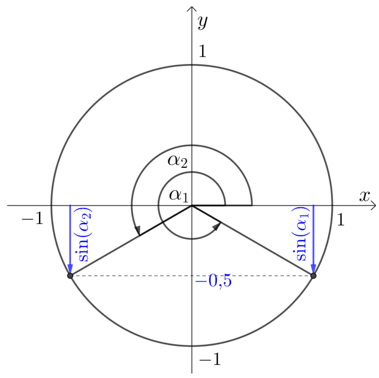
$\arcsin(0{,}8) = 53{,}13...°$

$\alpha_1 = 53{,}13...°$

$\alpha_2 = 180° - \arcsin(0{,}8) = 126{,}86...°$

$\implies$ Lösungsmenge $L = \{53{,}13...°; 126{,}86...°\}$

b) $\sin(\alpha) = -0{,}5$



$\arcsin(-0{,}5) = -30°$

$\alpha_1 = -30° + 360° = 330°$

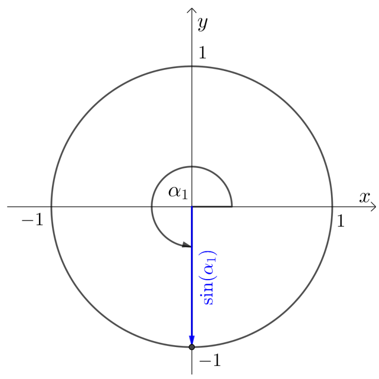
$\alpha_2 = 180° - \arcsin(-0{,}5) = 210°$

$\implies$ Lösungsmenge $L = \{210°; 330°\}$

c) $\sin(\alpha) = 4{,}2$

Die Funktionswerte der Sinusfunktion liegen im Intervall $[-1; 1]$. Der Wert 4,2 kann also nicht angenommen werden. Die Gleichung $\sin(\alpha) = 4{,}2$ hat also keine Lösung.
$\implies$ Lösungsmenge $L = \{\}$ „Leere Menge“

d) $\sin(\alpha) = -1$

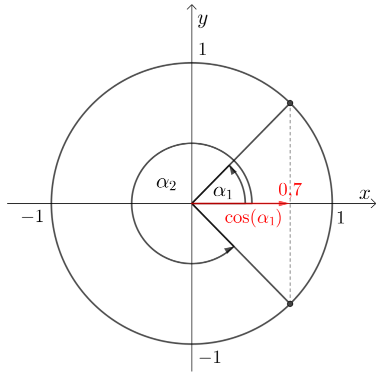


Es gibt am Einheitskreis genau einen Punkt mit y-Koordinate -1, nämlich $(0 \mid -1)$.

Der zugehörige Winkel im Intervall $[0°; 360°[$ ist $\alpha_1 = 270°$.

$\implies$ Lösungsmenge $L = \{270°\}$

e) $\cos(\alpha) = 0{,}7$



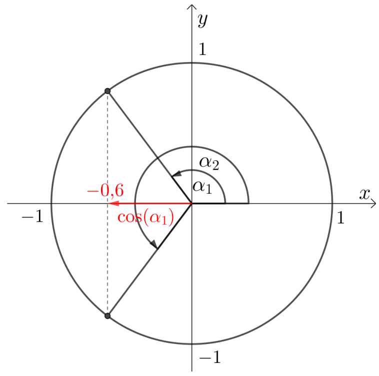
$\arccos(0{,}7) = 45{,}57...°$

$\alpha_1 = 45{,}57...°$

$\alpha_2 = 360° - \arccos(0{,}7) = 314{,}42...°$

$\implies$ Lösungsmenge $L = \{45{,}57...°; 314{,}42...°\}$

f) $\cos(\alpha) = -0{,}6$



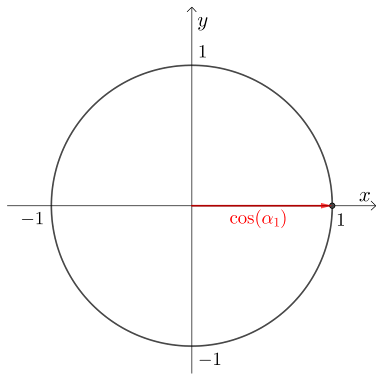
$\arccos(-0{,}6) = 126{,}86...°$

$\alpha_1 = 126{,}86...°$

$\alpha_2 = 360° - \arccos(-0{,}6) = 233{,}13...°$

$\implies$ Lösungsmenge $L = \{126{,}86...°; 233{,}13...°\}$

g) $\cos(\alpha) = 1$

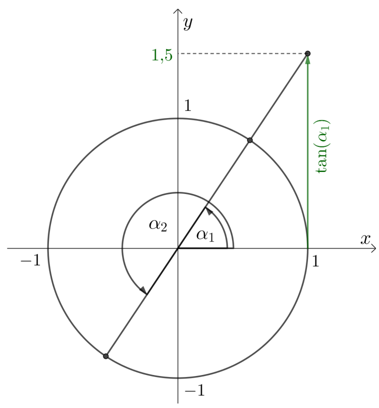


Es gibt am Einheitskreis genau einen Punkt mit x-Koordinate 1, nämlich $(1 \mid 0)$.

Der zugehörige Winkel im Intervall $[0°; 360°[$ ist $\alpha_1 = 0°$.

$\implies$ Lösungsmenge $L = \{0°\}$

h) $\tan(\alpha) = 1{,}5$



$\arctan(1{,}5) = 56{,}30...°$

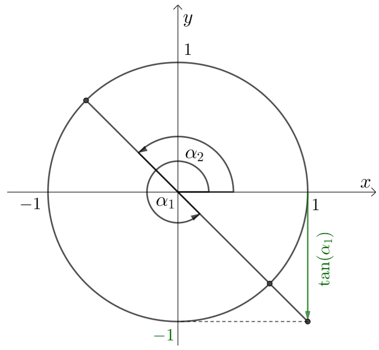
$\alpha_1 = 56{,}30...°$

$\alpha_2 = 180° + \arctan(1{,}5) = 236{,}30...°$

$\implies$ Lösungsmenge $L = \{56{,}30...°; 236{,}30...°\}$

i) $\tan(\alpha) = -1$

$\arctan(-1) = -45°$ Kannst du das Ergebnis auch ohne Taschenrechner erklären?



$\alpha_1 = -45° + 360° = 315°$

$\alpha_2 = 180° + \arctan(-1) = 135°$

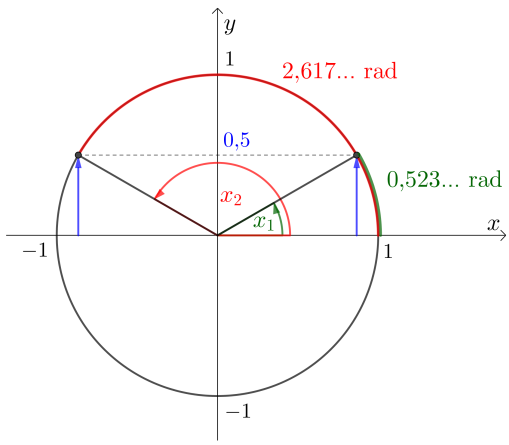
$\implies$ Lösungsmenge $L = \{135°; 315°\}$

Beispiel 4.2. Berechne alle Winkel x (im Bogenmaß), die Lösungen der Gleichung sind.

a) $\sin(x) = 0{,}5$

$\arcsin(0{,}5) = 0{,}523...\,\text{rad}$

Vergiss nicht, deinen Taschenrechner auf das Bogenmaß $\boxed{\text{RAD}}$ umzustellen.



Die beiden Lösungen im Intervall $[0\,\text{rad}; 2\cdot\pi\,\text{rad}[$ sind also

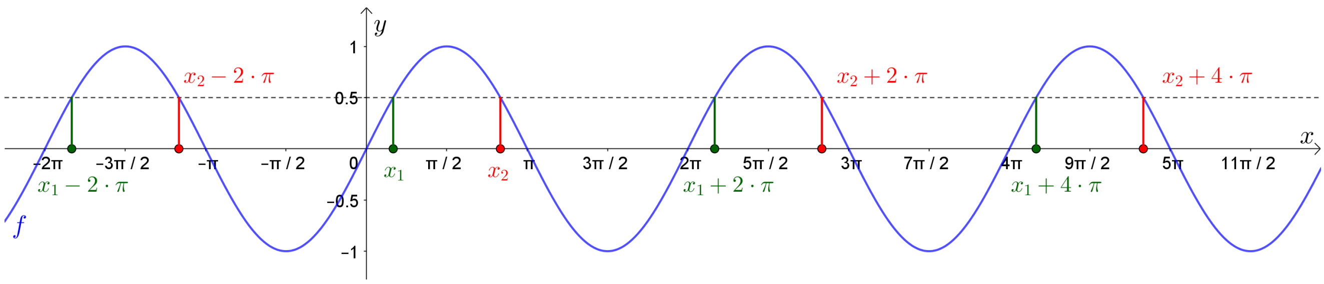
$x_1 = 0{,}523...\,\text{rad}$ und

$x_2 = \pi - 0{,}523...\,\text{rad} = 2{,}617...\,\text{rad}.$

Egal wie oft wir den Winkel um $360° = 2\cdot\pi\,\text{rad}$ verändern, der Sinuswert bleibt unverändert. Die Gleichung $\sin(x) = 0{,}5$ hat also unendlich viele Lösungen:

$$L = \{0{,}523... + k\cdot 2\cdot\pi \text{ rad} \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \cup \quad \{2{,}617... + k\cdot 2\cdot\pi \text{ rad} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Das Symbol $\cup$ bedeutet „vereinigt mit“. Eine Zahl ist eine Lösung, wenn sie in der ersten Menge oder in der zweiten Menge ist.



b) $\cos(4 \cdot x) = 0{,}2$

Es ist $\arccos(0{,}2) = 1{,}369...\,\text{rad}$. Ein Winkel x ist also genau dann eine Lösung der Gleichung, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$ gibt, mit

$$4 \cdot x = 1{,}369... + k \cdot 2 \cdot \pi \text{ rad}$$

$$x = 0{,}342... + k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

ODER

$$4 \cdot x = 2 \cdot \pi - 1{,}369... + k \cdot 2 \cdot \pi \text{ rad}$$

$$x = 1{,}228... + k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

$$L = \left\{0{,}342... + k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ rad} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{1{,}228... + k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ rad} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

c) $\tan(3 \cdot x - 5) = 42$

Es ist $\arctan(42) = 1{,}546...\,\text{rad}$. Egal wie oft wir den Winkel um $180° = \pi$ rad verändern, der Tangenswert bleibt unverändert. Ein Winkel x ist also genau dann eine Lösung der Gleichung, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$ gibt, mit

$$3 \cdot x - 5 = 1{,}546... + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1{,}546... + 5 + k \cdot \pi}{3} = 2{,}182... + k \cdot \frac{\pi}{3} \text{ rad}.$$

Die Lösungsmenge ist also

$$L = \left\{2{,}182... + k \cdot \frac{\pi}{3} \text{ rad} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Beispiel 4.3. Berechne alle Winkel x (im Bogenmaß), die Lösungen der Gleichung sind.

$$4 \cdot \sin\left(3 \cdot x - \frac{5 \cdot \pi}{2}\right) + 43 = 42$$

Lösung. Wir formen die Gleichung in die Form $\sin(☺) = \star$ um:

$$4 \cdot \sin\left(3 \cdot x - \frac{5 \cdot \pi}{2}\right) = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin\left(3 \cdot x - \frac{5 \cdot \pi}{2}\right) = -0{,}25$$

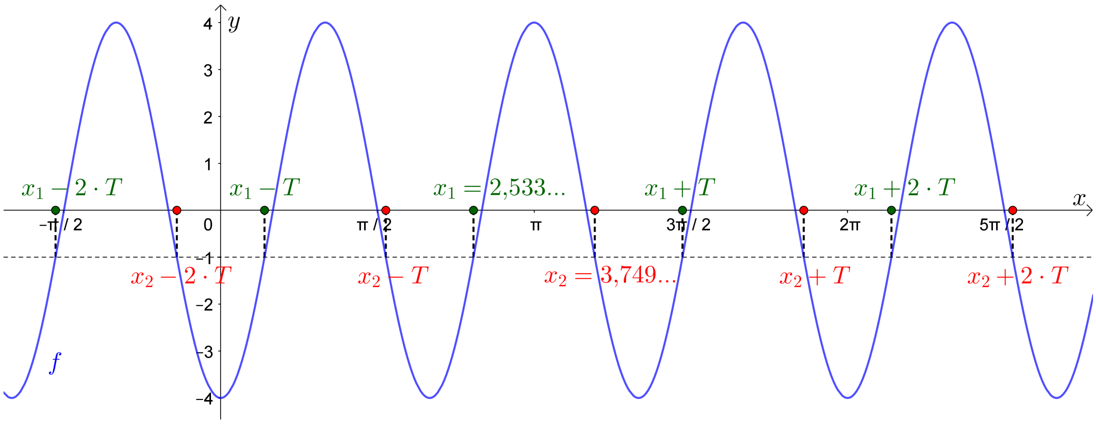
$$3 \cdot x - \frac{5 \cdot \pi}{2} = \arcsin(-0{,}25) + k \cdot 2 \cdot \pi$$

$$x = 2{,}533... + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3} \text{ rad}$$

ODER

$$3 \cdot x + \frac{5 \cdot \pi}{2} = \pi - \arcsin(-0{,}25) + k \cdot 2 \cdot \pi$$

$$x = 3{,}749... + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3} \text{ rad}$$



Die Lösungsmenge der Gleichung ist

$$L = \left\{2{,}533... + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3} \text{ rad} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \quad \cup \quad \left\{3{,}749... + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3} \text{ rad} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \qquad \square$$

Wie kannst du die Periode $T = \frac{2 \cdot \pi}{3}$ direkt aus der Gleichung ablesen?

5. Allgemeines Dreieck

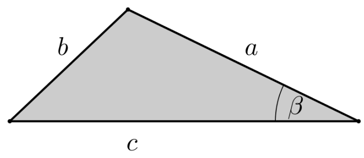
Arbeitsblatt – Allgemeines Dreieck

Auf dem Arbeitsblatt – Allgemeines Dreieck behandeln wir die folgenden Fragen:

Warum gilt die **trigonometrische Flächenformel**

$$\boldsymbol{A = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2}}$$

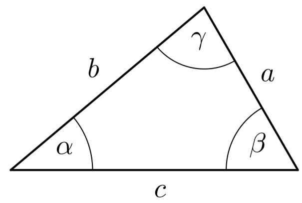
in jedem Dreieck?



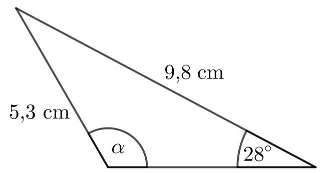
Warum gilt der **Sinussatz**

$$\boldsymbol{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}}$$

in jedem Dreieck?



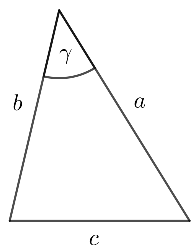
Wie kann man mit dem Sinussatz den **stumpfen Winkel $\boldsymbol{\alpha}$** rechts **berechnen**?



Warum gilt der **Cosinussatz**

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)}$$

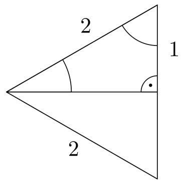
in jedem Dreieck?



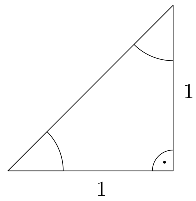
6. Summensätze

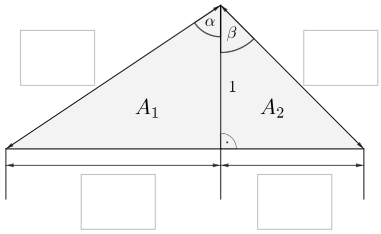
Arbeitsblatt – Summensätze für Winkelfunktionen

Auf dem Arbeitsblatt – Summensätze für Winkelfunktionen behandeln wir die folgenden Fragen:



Sind $\sin(30^\circ + 30^\circ)$ und $\sin(30^\circ) + \sin(30^\circ)$ gleich groß?





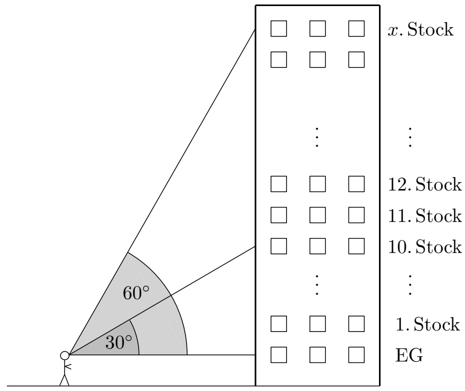
Was sagen die **Summensätze für Winkelfunktionen** aus?

Wie kann man die Formel

$$\boldsymbol{\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)}$$

für spitze Winkel α und β begründen?

Welchen Stock sieht die Person rechts unter dem Höhenwinkel 60°?



Beispiel 6.1. Begründe, warum

$$\frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{2} + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = 0$$

für alle Winkel α gilt.

Lösung.

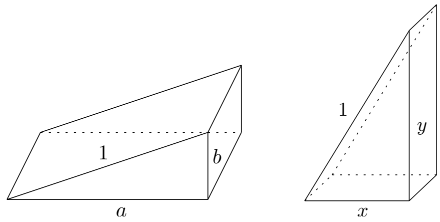
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \underbrace{\cos(-\beta)}_{=\cos(\beta)} - \sin(\alpha) \cdot \underbrace{\sin(-\beta)}_{=-\sin(\beta)} = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\implies \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = -2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

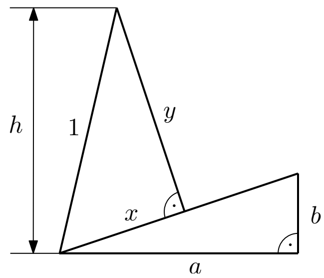
$$\implies \frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{2} + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = -\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = 0$$

□

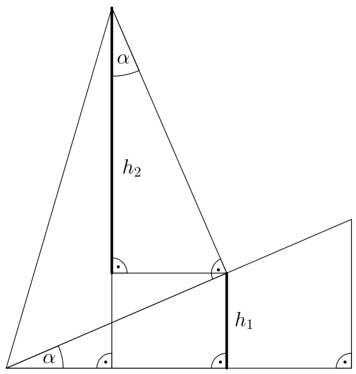
Beispiel 6.2. Von den dargestellten Bausteinen kennst du die Seitenlängen a und b bzw. x und y:



Du stellst einen Baustein so auf den anderen, dass sich die nebenstehende Frontalansicht ergibt.
Stelle mit a, b, x und y eine Formel für die Höhe h der entstandenen Figur auf.



Lösung. Wir teilen die Höhe h in zwei Teile h_1 und h_2:



Ähnliche Dreiecke

i) Erkläre, warum die beiden eingezeichneten Winkel α tatsächlich gleich groß sind.

ii) Erkläre, warum $\dfrac{h_1}{x} = \dfrac{b}{1}$ gilt. Finde ähnliche Dreiecke.

iii) Erkläre, warum $\dfrac{h_2}{y} = \dfrac{a}{1}$ gilt.

Die Höhe der entstandenen Figur beträgt also

$$h = h_1 + h_2 = b \cdot x + a \cdot y. \qquad \square$$

Summensatz

Du hast damit auch den Summensatz

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

für spitze Winkel α und β bewiesen:
Bezeichne in der obigen Skizze den Steigungswinkel des zweiten Bausteins mit β.

1) Erkläre, warum $h = \sin(\alpha + \beta)$ gilt.
2) Erkläre, warum $h_1 = b \cdot x = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)$ gilt.
3) Erkläre, warum $h_2 = a \cdot y = \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ gilt.