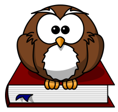
KOMPETENZHEFT – VEKTORRECHNUNG

INHALTSVERZEICHNIS



Kompetenzmaterialien – Vektorrechnung

In diesem Kompetenzheft wird ein möglicher Einstieg ins Thema „Vektorrechnung“ vorgestellt.

Die mit ☆ markierten Inhalte sind für besonders interessierte Personen gedacht.

Die folgenden Materialien sind für den Einsatz im Unterricht konzipiert:

✓ Arbeitsblatt – Vektorrechnung in der Ebene (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Vektorrechnung im Raum (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Parameterdarstellung von Geraden in der Ebene (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Parameterdarstellung von Geraden im Raum (Ausarbeitung)

In der Aufgabensammlung – Vektorrechnung und Analytische Geometrie befinden sich passende Übungsaufgaben.

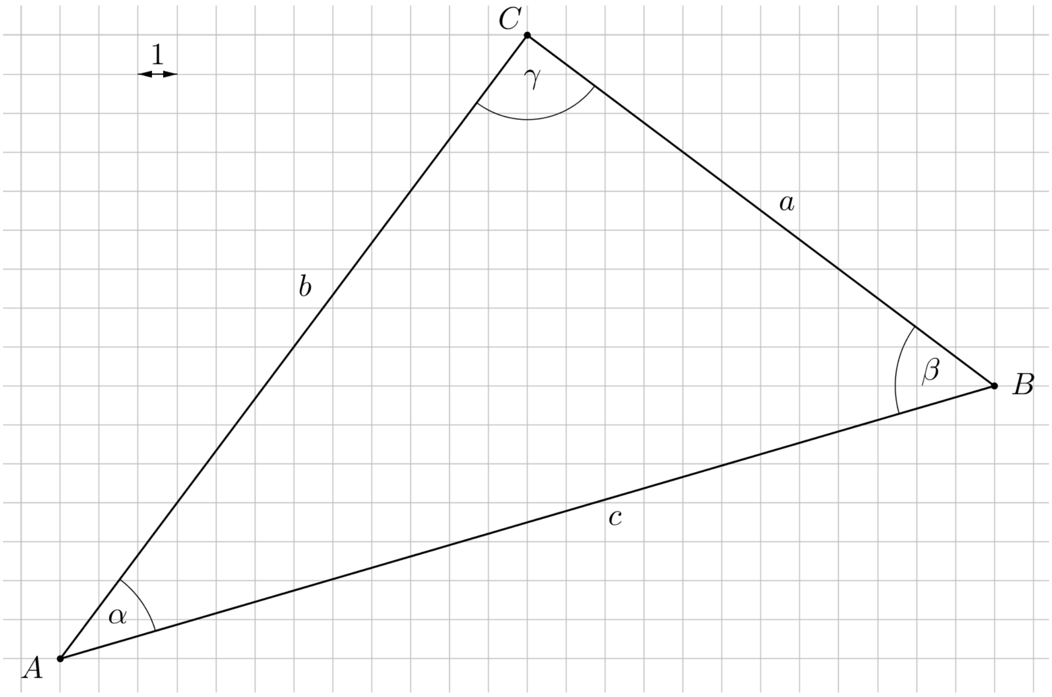
Wir freuen uns über Feedback an mmf@univie.ac.at.

Datum: 26. November 2020.

1. Vektorrechnung in der Ebene

Pythagoras

Die Quadrate, aus denen sich das folgende Raster zusammensetzt, haben Seitenlänge 1:



1) Berechne die Seitenlängen a, b und c mit dem Satz von Pythagoras.
2) Berechne die Winkel α, β und γ mit dem Cosinussatz.

Um den Weg von einem Punkt A zu einem anderen Punkt B zu beschreiben, müssen wir die exakten Koordinaten der Punkte nicht kennen. Uns kümmert nur, um wie viel sich die Koordinaten auf dem Weg von A nach B verändern. In obigem Fenster sieht das so aus:

Bewege dich **horizontal**[1] um **+24** Einheiten, und dann **vertikal**[2] um **+7** Einheiten.

Die Anleitung für eine solche Verschiebung fassen wir kurz in einem sogenannten **Vektor**

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} +24 \\ +7 \end{pmatrix}$$

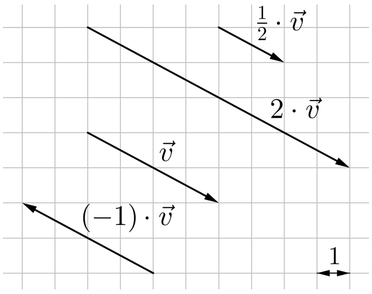
zusammen. Die Zahlen, die den Vektor bilden, heißen die **Komponenten** des Vektors. Der Vektor beschreibt, wie wir einen beliebigen Anfangspunkt zu einem Endpunkt verschieben. Der Pfeil von Anfangspunkt zum Endpunkt ist eine Darstellung des Vektors.

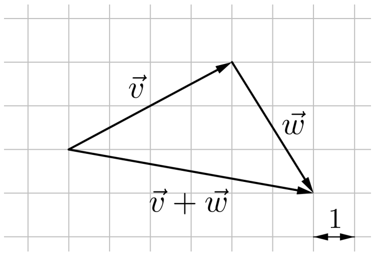
[1] Himmel und Meer treffen sich am Horizont, besonders in kitschigen Texten.
[2] Im Mittelpunkt des Filmklassikers „Vertigo“ von A. Hitchcock steht ein Polizist mit Höhenangst.

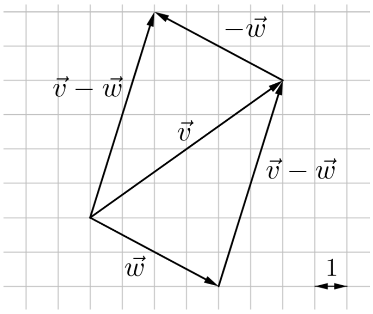
Arbeitsblatt – Vektorrechnung in der Ebene

Auf dem Arbeitsblatt – Vektorrechnung in der Ebene behandeln wir die folgenden Fragen:

Was sind **Vektoren** und wie **rechnet** man mit ihnen?
Wie kann man diese Rechenoperationen grafisch veranschaulichen?



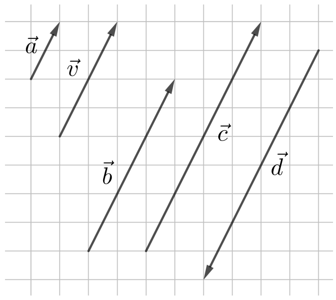


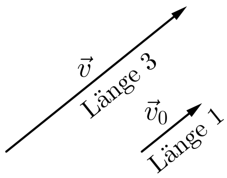


Wie erkennt man, ob zwei Vektoren die gleiche **Richtung** haben?

Wie erkennt man, ob zwei Vektoren die gleiche **Orientierung** haben?

Was ist der **Gegenvektor** eines Vektors?



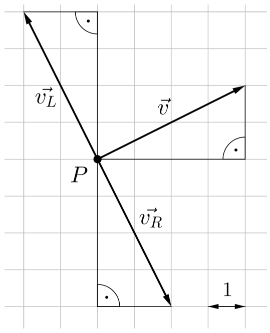


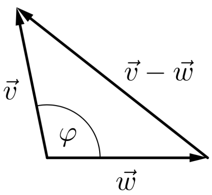
Wie berechnet man die **Länge (Betrag)** eines Vektors?

Was ist der **Einheitsvektor** eines Vektors?

Was sind **Normalvektoren** eines Vektors?

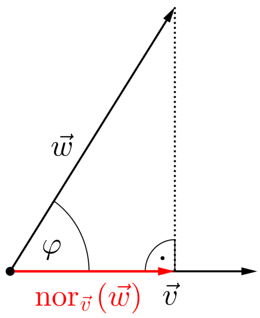
Wie berechnet man das **Skalarprodukt** zweier Vektoren?
Wie kann man das Ergebnis geometrisch interpretieren?





Wie berechnet man den **Winkel**,
den zwei Vektoren einschließen?

Was ist die **Normalprojektion** von
einem Vektor auf einen anderen Vektor?



2. Koordinatengeometrie

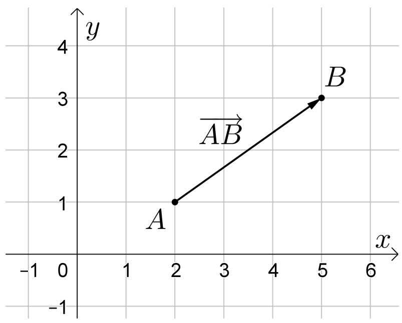
Bisher haben wir Vektoren als Verschiebungen in einem Raster veranschaulicht. Ist kein Anfangspunkt gegeben, können wir die gleiche Wegbeschreibung von jedem beliebigen Punkt aus einzeichnen.

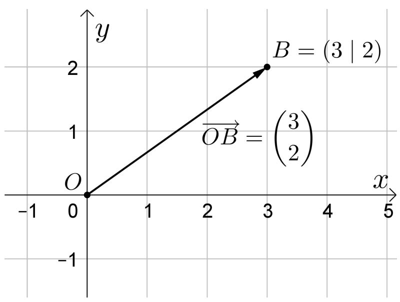
Wir erweitern das Raster zu einem Koordinatensystem, indem wir einen Koordinatenursprung $O = (0 \mid 0)$ wählen. Jeder Punkt in der Zahlenebene ist dann durch seine zwei Koordinaten festgelegt.

Arbeitsblatt – Vektorrechnung in der Ebene

Auf dem Arbeitsblatt – Vektorrechnung in der Ebene behandeln wir auch die folgenden Fragen:

Was sagt die **„Spitze minus Schaft – Regel“** aus?



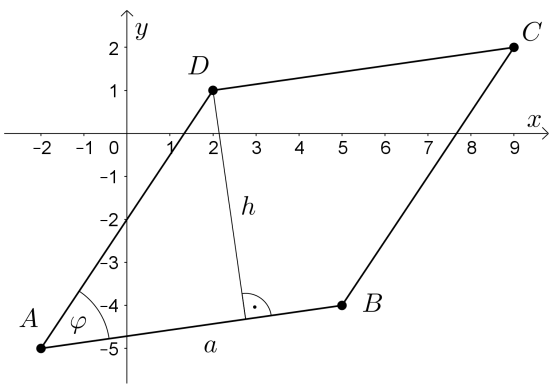


Was ist ein **Ortsvektor**?

Was ist der Unterschied zwischen $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $(3 \mid 2)$?

Beispiel 2.1. Von einem Parallelogramm sind die Eckpunkte $A = (-2 \mid -5)$, $B = (5 \mid -4)$ und $C = (9 \mid 2)$ bekannt. Berechne den vierten Eckpunkt D und den Flächeninhalt des Parallelogramms.

Lösung.



$$D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -5 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$$

$$\implies D = (2 \mid 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 1 \end{smallmatrix}\right),\ \overrightarrow{AD} = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|}\right) = \arccos\left(\frac{34}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{52}}\right)$$

$$\implies \varphi = 48{,}17\ldots^\circ$$

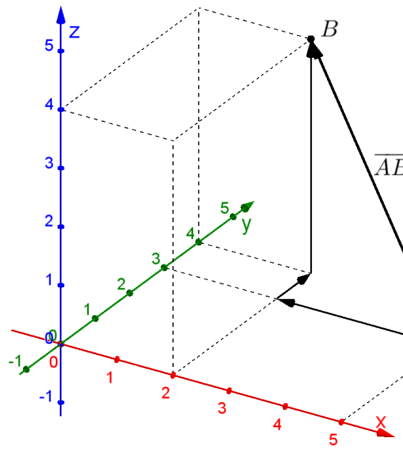
$$A = a \cdot h = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \sin(\varphi) = 38$$

$\square$

3. Vektorrechnung im Raum

Arbeitsblatt – Vektorrechnung im Raum

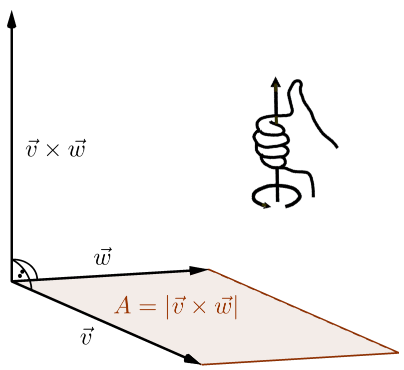
Auf dem Arbeitsblatt – Vektorrechnung im Raum behandeln wir die folgenden Fragen:



Was sind **3-dimensionale Vektoren**?

Wie kann man sie grafisch veranschaulichen?

Wie **rechnet** man mit 3-dimensionalen Vektoren?



Wie berechnet man das **Vektorprodukt** $\boldsymbol{\vec{v} \times \vec{w}}$ zweier Vektoren?

Welche Eigenschaften hat das Vektorprodukt?

Beispiel 3.1. Berechne den von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ eingeschlossenen Winkel.

Lösung.

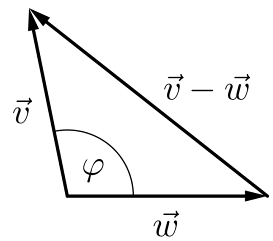
$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{36}} = \frac{8}{18} \implies \varphi = \arccos\left(\frac{8}{18}\right) = 63{,}61\ldots^\circ$$

□

Herleitung der Vektor-Winkel-Formel

Erkläre bei jedem der Umformungsschritte, welche der Rechenregeln verwendet wird:

$$\begin{aligned}
|\vec{v} - \vec{w}|^2 &= (\vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) \\
&= (\vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{w} \\
&= \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{w} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{w} \\
&= |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2 \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}.
\end{aligned}$$



Vom Cosinussatz wissen wir aber auch, dass $|\vec{v} - \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2 \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi)$.

Beispiel 3.2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Berechne das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{w}$ und überprüfe, dass es normal auf $\vec{v}$ und $\vec{w}$ steht.

Lösung.

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ -19 \end{pmatrix}$$

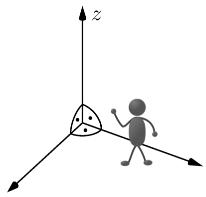
$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ -19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = -33 - 5 + 38 = 0 \checkmark$$

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ -19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = -22 + 3 + 19 = 0 \checkmark$$

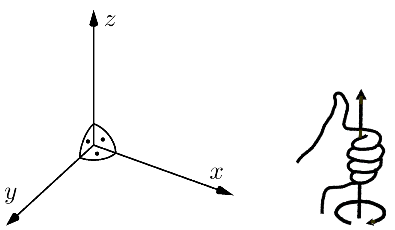
□

Linkssystem und Rechtssystem

In der Grafik rechts sind die positive x, y und z-Achse dargestellt.
Welche ist die x-Achse und welche ist die y-Achse?

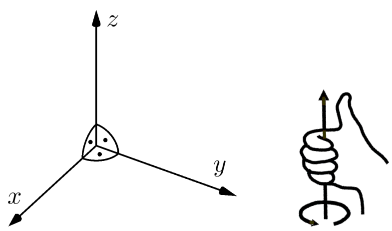


Du umgreifst die z-Achse mit der **linken** Hand und schraubst **im Uhrzeigersinn**. Damit drehst du die x-Achse auf kürzestmöglichem Weg auf die vorherige Position der y-Achse:



Die positive x-, y- und z-Achse bilden dann ein sogenanntes **Linkssystem**.

Du umgreifst die z-Achse mit der **rechten** Hand und schraubst **gegen den Uhrzeigersinn**. Damit drehst du die x-Achse auf kürzestmöglichem Weg auf die vorherige Position der y-Achse:



Die positive x-, y- und z-Achse bilden dann ein sogenanntes **Rechtssystem**.

Drei verschiedene Multiplikationen

1) Beim Skalarprodukt $\vec{v} \cdot \vec{w}$ werden zwei Vektoren multipliziert.
Das Ergebnis $v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3$ ist ein Skalar.

2) Bei $r \cdot \vec{v}$ werden ein Skalar und ein Vektor multipliziert.
Das Ergebnis $\begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \\ r \cdot v_3 \end{pmatrix}$ ist ein Vektor.

3) Beim Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{w}$ werden zwei Vektoren multipliziert.
Das Ergebnis $\begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - w_2 \cdot v_3 \\ -(v_1 \cdot w_3 - w_1 \cdot v_3) \\ v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2 \end{pmatrix}$ ist ein Vektor.

Eigenschaften des Vektorprodukts

1) Rechne nach, dass $\vec{v} \times \vec{w}$ normal auf $\vec{v}$ und normal auf $\vec{w}$ steht, also:

$$\boldsymbol{(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - w_2 \cdot v_3 \\ -(v_1 \cdot w_3 - w_1 \cdot v_3) \\ v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0}$$

$$\boldsymbol{(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - w_2 \cdot v_3 \\ -(v_1 \cdot w_3 - w_1 \cdot v_3) \\ v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = 0}$$

2) Die Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{v} \times \vec{w}$ bilden ein Rechtssystem.

3) Rechne nach:

$$\boldsymbol{\vec{v} \times \vec{w} = -(\vec{w} \times \vec{v})}$$

4) Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen ein Parallelogramm mit Flächeninhalt $|\vec{v} \times \vec{w}|$ auf.

5) Zeige mithilfe von **4)**, dass

$$\boldsymbol{|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(\varphi)},$$

wobei φ der von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ eingeschlossene Winkel ist.

6) Rechne nach:

$$\boldsymbol{\vec{v} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{(r \cdot \vec{v}) \times \vec{w} = r \cdot (\vec{v} \times \vec{w})}$$

Genau dann, wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ die gleiche Richtung haben, gilt $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

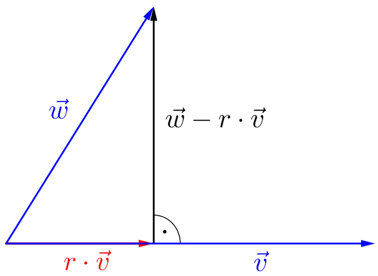
Normalprojektionsformel – Herleitung

Wir suchen jene Zahl $r \in \mathbb{R}$, sodass die Vektoren

$$r \cdot \vec{v}, \quad \vec{w} - r \cdot \vec{v} \quad \text{und} \quad \vec{w}$$

ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Für diese Zahl r gilt also

$$\vec{v} \cdot (\vec{w} - r \cdot \vec{v}) = 0.$$



Rechne nach:

$$r = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}|^2}$$

Der Vektor $r \cdot \vec{v}$ ist dann genau die Normalprojektion von $\vec{w}$ auf $\vec{v}$, abgekürzt: $\text{nor}_{\vec{v}}(\vec{w})$.
Erkläre damit die Formel

$$\boldsymbol{\text{nor}_{\vec{v}}(\vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v_0}},$$

wobei $v_0 = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$ der Einheitsvektor von $\vec{v}$ ist.

Die Formeln für Winkel und Normalprojektion aus der Ebene gelten also genauso auch im Raum.

4. Parameterdarstellung von Geraden

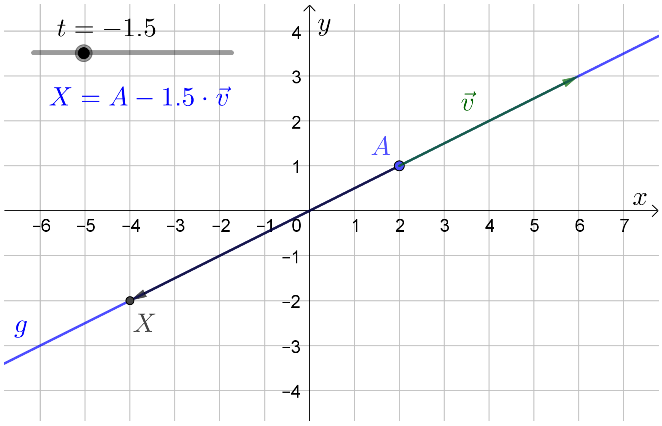
Arbeitsblatt – Parameterdarstellung von Geraden in der Ebene

Auf dem Arbeitsblatt – Parameterdarstellung von Geraden in der Ebene behandeln wir die folgenden Fragen:

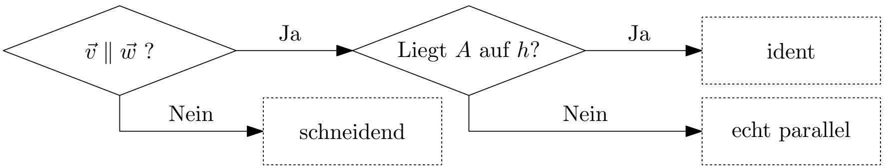
Auf welche Arten können wir eine Gerade in der Ebene *eindeutig* festlegen?

Was steckt hinter der Rechnung $A + \vec{v} = B$? „Punkt + Vektor = Punkt“

Wie kann man Geraden mithilfe einer **Parameterdarstellung** eindeutig festlegen?

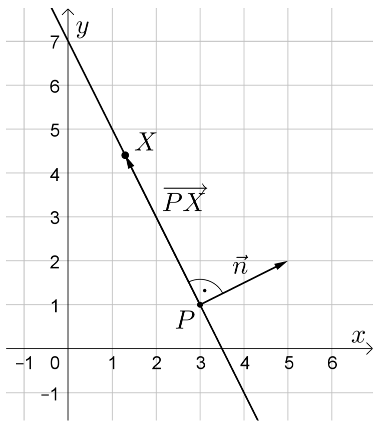


Welche **Lagebeziehung** können zwei Geraden in der Ebene haben?
Wie kann man diese Lagebeziehung aus den Parameterdarstellungen der Geraden ermitteln?



Eine Gerade verläuft durch den Punkt P, und $\vec{n} = \binom{n_1}{n_2}$ ist ein Normalvektor dieser Gerade.

Wie kann man diese Gerade in **Normalvektorform** darstellen?

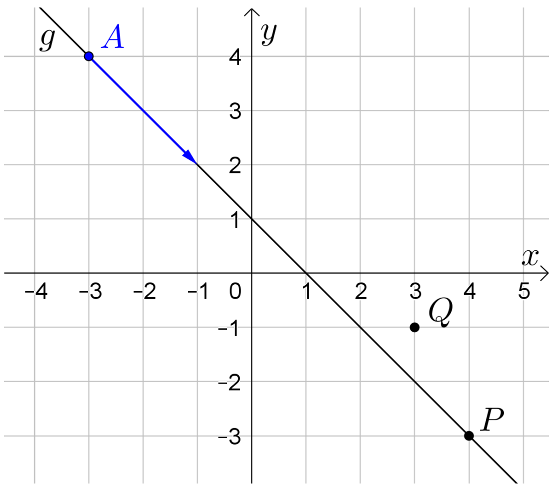


Beispiel 4.1. Gegeben ist eine Gerade g in Parameterdarstellung:

$$g: \ X = \binom{-3}{4} + t \cdot \binom{2}{-2}.$$

Bestimme rechnerisch und grafisch, ob die Punkte $P = (4 \mid -3)$ bzw. $Q = (3 \mid -1)$ auf der Gerade liegen.

Lösung.



Wenn P auf der Gerade liegt, muss es einen passenden Wert für t geben, sodass

$$\binom{4}{-3} = \binom{-3}{4} + t \cdot \binom{2}{-2}.$$

Aus der ersten Komponente können wir den einzigen Kandidaten für t berechnen:

$$4 = -3 + 2 \cdot t \implies t = 3{,}5.$$

Mit dem Parameterwert $t = 3{,}5$ landen wir im Punkt

$$\binom{-3}{4} + 3{,}5 \cdot \binom{2}{-2} = \binom{4}{-3},$$

also liegt $P = (4 \mid -3)$ auf der Gerade.

Gibt es einen Wert für t, mit dem wir in $Q = (3 \mid -1)$ landen? Also suchen wir eine Lösung von $\binom{3}{-1} = \binom{-3}{4} + t \cdot \binom{2}{-2}$. Aus der ersten Komponente erhalten wir

$$3 = -3 + t \cdot 2 \implies t = 3$$

Mit $t = 3$ landen wir aber in $\binom{-3}{4} + 3 \cdot \binom{2}{-2} = \binom{3}{-2}$, also liegt Q nicht auf der Gerade. □

Beispiel 4.2. Berechne den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$g: \ X = \binom{-2}{-1} + t \cdot \binom{1}{1} \quad \text{und} \quad h: \ X = \binom{1}{5} + s \cdot \binom{1}{-2}.$$

Lösung. Wir suchen einen Wert für t und einen Wert für s, sodass

$$\binom{-2}{-1} + t \cdot \binom{1}{1} = \binom{1}{5} + s \cdot \binom{1}{-2}.$$

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{I}: -2 + t &= 1 + s \\ \text{II}: -1 + t &= 5 - 2 \cdot s \end{aligned}$$

hat die Lösung $s = 1$, $t = 4$.
Durch Einsetzen in die Parameterdarstellung erhalten wir den Schnittpunkt S:

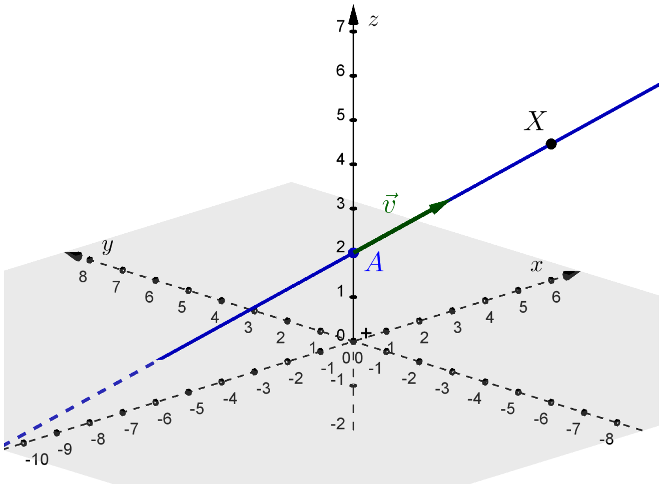
$$S = \binom{-2}{-1} + 4 \cdot \binom{1}{1} = \binom{2}{3} \quad \left(= \binom{1}{5} + 1 \cdot \binom{1}{-2}\right)$$

□

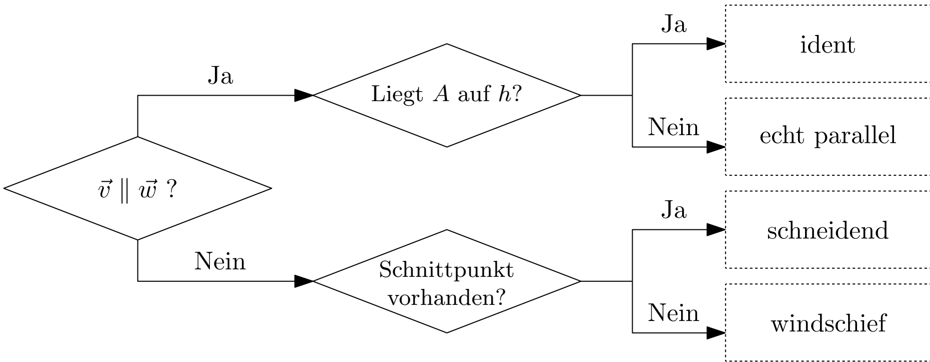
Arbeitsblatt – Parameterdarstellung von Geraden im Raum

Auf dem Arbeitsblatt – Parameterdarstellung von Geraden im Raum behandeln wir die folgenden Fragen:

Wie kann man Geraden im Raum mithilfe einer **Parameterdarstellung** eindeutig festlegen?



Welche **Lagebeziehung** können zwei Geraden im Raum haben?
Wie kann man diese Lagebeziehung aus den Parameterdarstellungen der Geraden ermitteln?



5. Ebenengleichungen

Ebene eindeutig festlegen

Es gibt mehrere Möglichkeiten eine Ebene im 3-dimensionalen Raum eindeutig zu beschreiben:

1) Ein Punkt in der Ebene und **zwei Vektoren**, die *nicht* parallel sind.

2) Ein Punkt in der Ebene und **ein Normalvektor** der Ebene.

3) Drei Punkte in der Ebene, die *nicht* auf einer Gerade liegen.

Parameterdarstellung einer Ebene

Wir starten vom Punkt $A = (0 \mid -2 \mid 0)$ und erlauben beliebige Bewegungen in Richtung der Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Folgen wir zum Beispiel zweimal dem Vektor $\vec{u}$, dann landen wir im Punkt

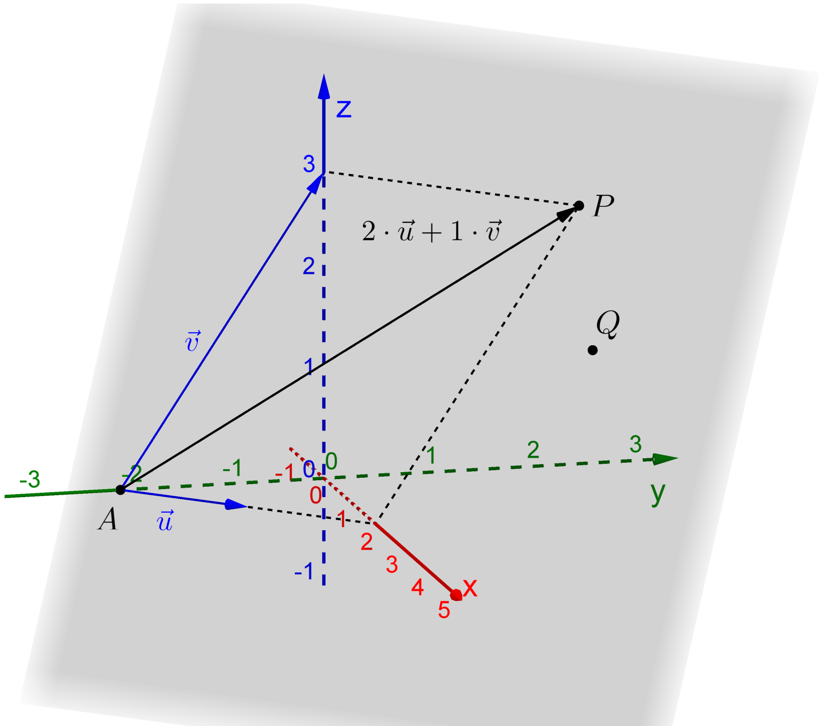
$$A + 2 \cdot \vec{u} = (2 \mid 0 \mid 0)\,.$$

Bewegen wir uns stattdessen einmal in Richtung $\vec{v}$, dann landen wir im Punkt

$$A + 1 \cdot \vec{v} = (0 \mid 0 \mid 3)\,.$$

Führen wir vom Punkt A ausgehend beide Bewegungen hintereinander durch, dann landen wir im Punkt

$$A + 2 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v} = (2 \mid 2 \mid 3)\,.$$



Tatsächlich liegen alle Punkte, die du so erreichen kannst, auf einer gemeinsamen Ebene.

Ein Punkt X liegt genau dann auf der Ebene, wenn es zwei Zahlen $s, t \in \mathbb{R}$ gibt, mit:

$$\boldsymbol{X = A + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}}. \qquad (1)$$

Wie bei der Gerade nennen wir die Zahlen s und t Parameter, und (1) eine **Parameterdarstellung der Ebene**.

Normalvektoren

Erinnere dich, dass in der Ebene die Vektoren

$$\overrightarrow{v_L} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{v_R} = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$$

normal auf den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ stehen.

Es ist $\vec{v} \cdot \overrightarrow{v_L} = 0$ und $\vec{v} \cdot \overrightarrow{v_R} = 0$.

Welche Vektoren stehen im Raum normal auf den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$?

Nimm dir dazu zwei Stifte.
Mach aus einem Stift den Vektor $\vec{v}$ und zeige in eine bestimmte Richtung.
Beschreibe, wie du den anderen Stift dazuhalten kannst, damit die Stifte einen rechten Winkel einschließen.

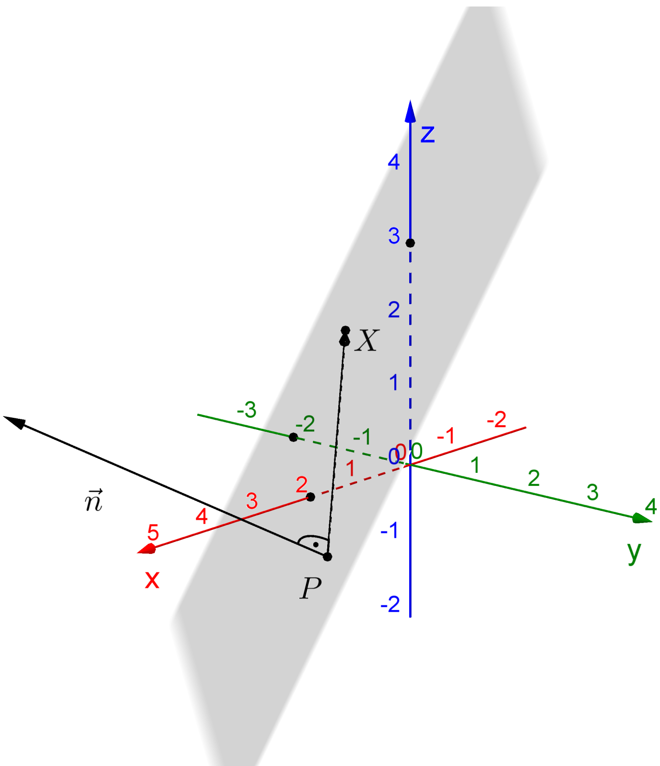
Normalebene

Der Punkt $P = (4 \mid 2 \mid 0)$ und der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind gegeben.

Wir suchen alle Punkte $X = (x \mid y \mid z)$, für die $\vec{n}$ normal auf den Verbindungsvektor $\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} x-4 \\ y-2 \\ z \end{pmatrix}$ steht.

Nimm wieder zwei Stifte.

Alle Punkte X mit dieser Eigenschaft liegen auf der dargestellten Ebene.



Die Gleichung der Ebene ist

$$\boldsymbol{\vec{n} \cdot \overrightarrow{PX} = 0},$$

also

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-4 \\ y-2 \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$3 \cdot (x-4) - 3 \cdot (y-2) + 2 \cdot z = 0$$

$$3 \cdot x - 3 \cdot y + 2 \cdot z = 6$$

Komponenten des Normalvektors $\vec{n}$

Die Ebene verläuft also zum Beispiel auch durch die Punkte

$$(2 \mid 0 \mid 0)\,,\ (0 \mid -2 \mid 0) \ \text{und} \ (0 \mid 0 \mid 3)\,.$$

Normalvektorform einer Ebene

Die Lösungen $X = (x \mid y \mid z)$ der Gleichung

$$\boldsymbol{\vec{n} \cdot \overrightarrow{PX} = 0} \quad \text{mit } \vec{n} \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

sind genau die Punkte in jener Ebene, die durch den Punkt P verläuft, und die normal auf den Vektor $\vec{n}$ steht.

Diese Darstellung der Ebene nennen wir daher auch **Normalvektorform**.

Koordinatenform einer Ebene

Die Lösungen $X = (x \mid y \mid z)$ der Gleichung

$$\boldsymbol{a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d}$$

sind genau die Punkte in jener Ebene, die normal auf den Vektor $\vec{n} = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ steht und den Abstand $\frac{|d|}{|\vec{n}|}$ vom Koordinatenursprung hat.

Diese Darstellung der Ebene nennen wir auch **Koordinatenform**.

Beispiel 5.1. Bestimme eine Gleichung

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$$

jener Ebene, die von den Vektoren $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ und $\vec{w} = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ aufgespannt wird und den Punkt $P = (3 \mid 0 \mid 1)$ enthält.

Lösung. Wir suchen einen Normalvektor $\vec{n} = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ der Ebene, also einen Vektor der auf $\vec{v}$ und $\vec{w}$ normal steht:

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 14 \\ 9 \\ -20 \end{smallmatrix}\right)$$

1. Lösungsweg:

$$14 \cdot x + 9 \cdot y - 20 \cdot z = d.$$

P einsetzen:

$$14 \cdot 3 + 9 \cdot 0 - 20 \cdot 1 = d \implies d = 22$$

Eine Gleichung der Ebene ist somit

$$14 \cdot x + 9 \cdot y - 20 \cdot z = 22.$$

2. Lösungsweg:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PX} = 0$$

$$\left(\begin{smallmatrix} 14 \\ 9 \\ -20 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x-3 \\ y \\ z-1 \end{smallmatrix}\right) = 0$$

$$14 \cdot x - 42 + 9 \cdot y - 20 \cdot z + 20 = 0$$

□