KOMPETENZHEFT – WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

Inhaltsverzeichnis

Kompetenzmaterialien – Wahrscheinlichkeitsrechnung

In diesem Kompetenzheft wird ein möglicher Einstieg ins Thema „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ vorgestellt.

Die mit ☆ markierten Inhalte sind für besonders interessierte Personen gedacht.

Die folgenden Materialien sind für den Einsatz im Unterricht konzipiert:

- ✓ Arbeitsblatt – Kombinatorik (Ausarbeitung)
- ✓ Arbeitsblatt – Pascalsches Dreieck I (Ausarbeitung)
- ✓ Arbeitsblatt – Pascalsches Dreieck II (Ausarbeitung)
- ✓ Arbeitsblatt – Laplace-Experimente (Ausarbeitung)
- ✓ Arbeitsblatt – Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeitsräume (Ausarbeitung)
- ✓ Arbeitsblatt – Zufallsvariablen (Ausarbeitung)
- ✓ Arbeitsblatt – Baumdiagramme und Wahrscheinlichkeiten (Ausarbeitung)
- ✓ Arbeitsblatt – Binomialverteilung (Ausarbeitung)
- ✓ Arbeitsblatt – Normalverteilung (Ausarbeitung)
- ✓ Arbeitsblatt – Verteilungsfunktionen (Ausarbeitung)
- ✓ Technologieblatt – Zufallsstreubereiche und Konfidenzintervalle (Ausarbeitung)
- ✓ Technologieblatt – Konfidenzintervalle (Binomialverteilung) (Ausarbeitung)

In der Aufgabensammlung – Wahrscheinlichkeitsrechnung befinden sich passende Übungsaufgaben.

Wir freuen uns über Feedback an mmf@univie.ac.at.

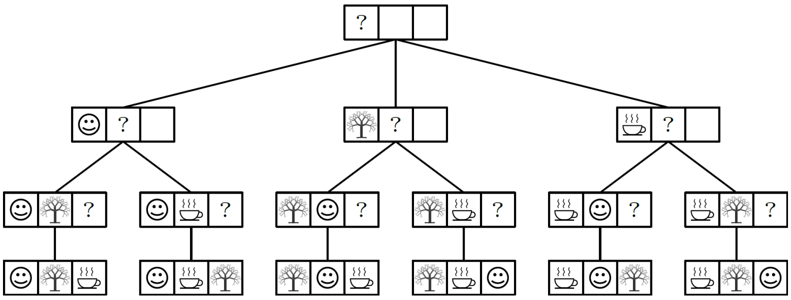
Datum: 13. Januar 2021.

1. Kombinatorik

Arbeitsblatt – Kombinatorik

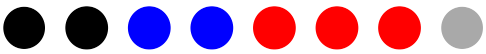
Auf dem Arbeitsblatt – Kombinatorik behandeln wir die folgenden Fragen:

Wie können wir Abzählprobleme lösen, die sich in *unabhängige* Entscheidungen zerlegen lassen?



Was bedeutet die Schreibweise 8! („8 Faktorielle“)?

Wie viele verschiedene Farbmuster sind möglich, wenn 3 schwarze Kugeln und 2 rote Kugeln in einer Reihe angeordnet werden?

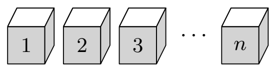


Wie viele verschiedene Farbmuster sind mit den 8 Kugeln links möglich?

Wie berechnet man den Binomialkoeffizienten $\binom{42}{5}$ und welches Abzählproblem löst er?

Warum ist $\binom{42}{5} = \binom{42}{37}$?

Vor dir stehen n Boxen, die von 1 bis n durchnummeriert sind.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, ...



1) ... $k = 5$ unterscheidbare Bälle (nummeriert von 1 bis k) auf $n = 3$ Boxen zu verteilen?

2) ... $k = 5$ unterscheidbare Bälle (nummeriert von 1 bis k) auf $n = 8$ Boxen zu verteilen, wenn in jede Box höchstens ein Ball passt?

3) ... $k = 5$ *nicht* unterscheidbare Bälle auf $n = 8$ Boxen zu verteilen, wenn in jede Box höchstens ein Ball passt?

4) ... $k = 5$ *nicht* unterscheidbare Bälle auf $n = 3$ Boxen zu verteilen?

Beispiel 1.1. In der ersten Reihe sitzen 5 Personen, in der zweiten und dritten Reihe sitzen jeweils 6 Personen und in der letzten Reihe sitzen 4 Personen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus jeder Reihe genau eine Person auszuwählen?

Lösung. Wir können uns *unabhängig* voneinander in jeder Reihe für eine Person entscheiden. Es gibt also $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 = 720$ verschiedene Möglichkeiten. □

Beispiel 1.2. Wie viele dreistellige natürliche Zahlen gibt es?

Lösung.
Möglichkeit 1: Für die Hunderterstelle gibt es 9 Möglichkeiten (sie kann nicht 0 sein). Für die Zehner- und Einerstelle gibt es unabhängig davon jeweils 10 Möglichkeiten. Insgesamt gibt es für (H, Z, E) also $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ Möglichkeiten.
Möglichkeit 2: Von 1 bis 999 gibt es 999 natürliche Zahlen. Davon sind genau die Zahlen von 1 bis 99 nicht dreistellig. Also gibt es 900 dreistellige natürliche Zahlen. □

Beispiel 1.3. Wie viele vierstellige natürliche Zahlen gibt es, die gerade sind?

Lösung.
Möglichkeit 1: Eine natürliche Zahl ist genau dann gerade, wenn die Einerziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 ist. Es gibt also $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$ vierstellige natürliche Zahlen, die gerade sind.
Möglichkeit 2: Es gibt 9000 vierstellige Zahlen. Jede zweite Zahl davon ist gerade. □

Bei manchen Abzählproblemen ist es geschickter, sich das Gegenteil zu überlegen, also wie viele Objekte die angegebenen Bedingungen *nicht* erfüllen.

Beispiel 1.4. Wie viele fünfstellige natürliche Zahlen gibt es, die mindestens einmal die Ziffer 3 enthalten?

Lösung. Das Gegenteil von „mindestens eine Ziffer 3 enthalten“ ist „keine Ziffer 3 enthalten“.
Es gibt $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90\,000$ fünfstellige Zahlen. Davon enthalten $8 \cdot 9^4 = 52\,488$ die Ziffer 3 kein einziges Mal. Also gibt es $90\,000 - 52\,488 = 37\,512$ fünfstellige natürliche Zahlen, die mindestens einmal die Ziffer 3 enthalten. □

Beispiel 1.5. Ein Paket Schnapskarten enthält 20 Karten: Zehn, Bube, Dame, König, Ass jeweils in den 4 Spielfarben. Wir mischen die Karten zu einem Stapel.

1) Wie viele verschiedene Anordnungen können die 20 Karten im Stapel haben?
2) Wie viele verschiedene Anordnungen gibt es, wenn uns die Spielfarbe egal ist?

Lösung.

1) Alle 20 Karten sind voneinander unterscheidbar. Es gibt also
$$20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000 = 2{,}432... \cdot 10^{18}$$
verschiedene Anordnungen.

2) Die 20 Karten sind aufgeteilt in 5 Gruppen mit jeweils 4 nicht unterscheidbaren Karten.
Es gibt also
$$\frac{20!}{4! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!} = \frac{20!}{(4!)^5} = 305\,540\,235\,000 = 3{,}055... \cdot 10^{11}.$$
verschiedene Anordnungen. □

Beispiel 1.6. ☆ Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, um 15 Personen in drei gleich große Gruppen aufzuteilen?

Lösung. Wir stellen die 15 Personen in einer Reihe auf. Dann nehmen wir 15 Karten und beschriften jeweils 5 Karten mit „Gruppe 1“, „Gruppe 2“ und „Gruppe 3“.
Für die Aufteilung der 15 Karten gibt es dann

$$\frac{15!}{5!\cdot 5!\cdot 5!} = 756\,756$$

verschiedene Möglichkeiten. Warum ist das noch nicht das richtige Endergebnis?
Wir zählen dabei jede Aufteilung in 3 Gruppen mehrfach: Ob alle Personen einer Gruppe eine Karte mit „Gruppe 1“ oder alle eine Karte mit „Gruppe 2“ haben, ist für die Gruppenaufteilung ja *nicht* relevant. Jede der $3! = 6$ Vertauschungen der kompletten Kartensets zwischen den Gruppen führt zu der gleichen Gruppenaufteilung. Es gibt also

$$\frac{756756}{3!} = 126\,126$$

verschiedene Möglichkeiten, um aus 15 Personen drei Gruppen mit 5 Personen zu bilden. □

Beispiel 1.7. An einem Wettrennen haben 42 Personen teilgenommen. Die Rangliste der ersten 10 Plätze wird veröffentlicht. Wie viele verschiedene Ranglisten sind möglich?

Lösung. Für den ersten Platz gibt es 42 Möglichkeiten. Unabhängig vom ersten Platz gibt es für den zweiten Platz 41 Möglichkeiten, für den dritten Platz 40 Möglichkeiten usw.
Die Anzahl möglicher Ranglisten ist also

Die Reihenfolge ist wichtig.

$$\underbrace{42\cdot 41\cdot 40\cdot\ldots\cdot 33}_{\text{10 Faktoren}} = \frac{42!}{32!} = 5\,339\,572\,260\,422\,400 = 5{,}339...\cdot 10^{15}.$$

□

Beispiel 1.8. Auf einem Wettschein soll der Ausgang von 13 verschiedenen Fußballpartien getippt werden. Bei jeder Partie muss man ankreuzen, welches der beiden Teams gewinnt oder ob die Partie Unentschieden ausgeht. Den Hauptpreis gewinnt man, wenn man bei allen 13 Partien auf den richtigen Ausgang tippt.
Wie viele verschiedene Wettscheine muss man ausfüllen, um *sicher* den Hauptpreis zu gewinnen?

Lösung. Es gibt 3 verschiedene Möglichkeiten bei jeder der 13 Partien. Bei jeder Partie können wir uns *unabhängig* von den bisherigen Entscheidungen für einen der 3 Ausgänge entscheiden. Die Anzahl verschiedener Wettscheine ist also

$$\underbrace{3\cdot 3\cdot\ldots\cdot 3}_{\text{13 Faktoren}} = 3^{13} = 1\,594\,323.$$

Nur wenn man jeden dieser 1 594 323 Wettscheine ausfüllt, gewinnt man sicher den Hauptpreis. □

Beispiel 1.9. Du würfelst viermal mit einem sechsseitigen Würfel und schreibst die Ergebnisse als Folge an. Zum Beispiel: $(2, 6, 1, 2)$. Wie viele verschiedene Ergebnisfolgen gibt es, bei denen mindestens eine Augenzahl mehrfach vorkommt?

Lösung. Bei dieser Aufgabe ist es geschickter, sich zuerst das Gegenteil zu überlegen.
Insgesamt gibt es $6\cdot 6\cdot 6\cdot 6 = 6^4 = 1296$ mögliche Ergebnisfolgen.
Wie viele dieser Ergebnisfolgen haben *keine* Augenzahl mehrfach?
Dafür gibt es $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 360$ verschiedene Möglichkeiten.
Es gibt also $1296 - 360 = 936$ verschiedene Ergebnisfolgen, bei denen mindestens eine Augenzahl mehrfach vorkommt.

□

Beispiel 1.10. Ein Schatz von 30 (nicht unterscheidbaren) Goldmünzen soll auf den Kapitän und vier seiner Piraten aufgeteilt werden. Wie viele mögliche Aufteilungen gibt es, wenn ...

1) ... der Schatz beliebig aufgeteilt werden kann? Jeder erhält 0 bis 30 Goldmünzen.

2) ... jeder Pirat mindestens 2 Goldmünzen und der Kapitän mindestens 5 Goldmünzen bekommen soll?

3) ... jeder Pirat höchstens 2 Goldmünzen bekommen soll?

4) ... der Kapitän 10 Goldmünzen, zwei (beliebige) Piraten 7 Goldmünzen und zwei (beliebige) Piraten 3 Goldmünzen bekommen sollen?

5) ... der Kapitän 16 Goldmünzen, jeder Pirat mindestens 2 Goldmünzen, aber alle Piraten unterschiedlich viele Goldmünzen bekommen sollen?

6) ... der Kapitän mindestens 28 Goldmünzen bekommen soll?

Lösung.

1) Es handelt sich um ein Auswahlproblem wie auf S.2 mit $k = 30$ nicht unterscheidbaren Bällen, die auf $n = 5$ unterscheidbare Boxen verteilt werden sollen. Jedes Fach darf beliebig oft ausgewählt werden und die Reihenfolge der Auswahl ist egal. Es gibt also $\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{34}{4} = 46\,376$ mögliche Aufteilungen der 30 Goldmünzen.

2) Wenn wir den Piraten und dem Kapitän jeweils die mindestens erforderlichen Goldmünzen geben, bleiben $k = 30 - 4 \cdot 2 - 5 = 17$ Goldmünzen übrig, die wir beliebig auf die $n = 5$ Personen aufteilen können. Die Anzahl verschiedener Aufteilungen ist also $\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{21}{4} = 5985$.

3) Für jeden Piraten können wir *unabhängig* entscheiden, ob wir ihm 0, 1 oder 2 Goldmünzen geben.

Es sind genug Münzen vorhanden, damit jeder Pirat auch 2 Münzen erhalten kann. Die übrigen Münzen bekommt der Kapitän.

Dafür gibt es $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$ Möglichkeiten.

4) Wir können nur entscheiden, welche zwei der vier Piraten 7 Goldmünzen bekommen sollen.
Um eine Gruppe von 2 aus 4 Piraten auszuwählen, gibt es $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten.

5) Für die vier Piraten bleiben 14 Goldmünzen übrig. Damit jeder Pirat mindestens 2 Goldmünzen, aber alle Piraten unterschiedlich viele Goldmünzen bekommen, müssen die Goldmünzen $2+3+4+5 = 14$ aufgeteilt sein. Wir können aber aussuchen, welcher Pirat 5 Goldmünzen, welcher 4, welcher 3 und welcher Pirat 2 Goldmünzen erhält. Für den Pirat mit 5 Goldmünzen haben wir 4 Möglichkeiten, *unabhängig* von dieser Auswahl bleiben 3 Möglichkeiten für die 4 Goldmünzen, und so weiter. Es gibt also $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ mögliche Aufteilungen.

6) Der Kapitän bekommt 28 Goldmünzen. Die anderen $k = 2$ Goldmünzen können wir beliebig auf $n = 5$ Personen aufteilen. Dafür gibt es $\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{6}{4} = 15$ Möglichkeiten. □

2. Pascalsches Dreieck & Binomischer Lehrsatz

Arbeitsblatt – Pascalsches Dreieck I

Auf dem Arbeitsblatt – Pascalsches Dreieck I haben wir die folgenden Fragen behandelt:

Was ist das **Pascalsche Dreieck**?

Wie hilft es bei den folgenden Berechnungen?

$$(a+b)^2 = \mathbf{1}\cdot a^2 + \mathbf{2}\cdot a\cdot b + \mathbf{1}\cdot b^2$$

$$(a+b)^3 = \mathbf{1}\cdot a^3 + \mathbf{3}\cdot a^2\cdot b + \mathbf{3}\cdot a\cdot b^2 + \mathbf{1}\cdot b^3$$

$$(a+b)^4 = \mathbf{1}\cdot a^4 + \mathbf{4}\cdot a^3\cdot b + \mathbf{6}\cdot a^2\cdot b^2 + \mathbf{4}\cdot a\cdot b^3 + \mathbf{1}\cdot b^4$$

$$(a+b)^5 = \mathbf{1}\cdot a^5 + \mathbf{5}\cdot a^4\cdot b + \mathbf{10}\cdot a^3\cdot b^2 + \mathbf{10}\cdot a^2\cdot b^3 + \mathbf{5}\cdot a\cdot b^4 + \mathbf{1}\cdot b^5$$

Arbeitsblatt – Pascalsches Dreieck II

Auf dem Arbeitsblatt – Pascalsches Dreieck II behandeln wir die folgenden Fragen:

Warum besteht das Pascalsche Dreieck genau aus den folgenden Binomialkoeffizienten?

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&\mathbf{1}&&&&& \\ &&&&\mathbf{1}&&\mathbf{1}&&&& \\ &&&\mathbf{1}&&\mathbf{2}&&\mathbf{1}&&& \\ &&\mathbf{1}&&\mathbf{3}&&\mathbf{3}&&\mathbf{1}&& \\ &\mathbf{1}&&\mathbf{4}&&\mathbf{6}&&\mathbf{4}&&\mathbf{1}& \\ \mathbf{1}&&\mathbf{5}&&\mathbf{10}&&\mathbf{10}&&\mathbf{5}&&\mathbf{1} \end{array} = \begin{array}{ccccccccccc} &&&&&\binom{0}{0}&&&&& \\ &&&&\binom{1}{0}&&\binom{1}{1}&&&& \\ &&&\binom{2}{0}&&\binom{2}{1}&&\binom{2}{2}&&& \\ &&\binom{3}{0}&&\binom{3}{1}&&\binom{3}{2}&&\binom{3}{3}&& \\ &\binom{4}{0}&&\binom{4}{1}&&\binom{4}{2}&&\binom{4}{3}&&\binom{4}{4}& \\ \binom{5}{0}&&\binom{5}{1}&&\binom{5}{2}&&\binom{5}{3}&&\binom{5}{4}&&\binom{5}{5} \end{array}$$

Woher kommt die Bezeichnung **Binomialkoeffizient** und was ist der **Binomische Lehrsatz**?

Was ist ein **Multinomialkoeffizient**?

Kombinatorische Beweise

Es gibt zahlreiche Zusammenhänge zwischen Binomialkoeffizienten. Zum Beispiel:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Man kann solche Identitäten rechnerisch beweisen. Binomischer Lehrsatz: $(1+1)^n$

In der Kombinatorik bevorzugt man kombinatorische Erklärungen:

Um welches Abzählproblem geht es? Aus n Personen eine beliebige Anzahl von Personen auswählen.

Warum steht auf beiden Seiten der Gleichung eine Lösung für das gleiche Abzählproblem?

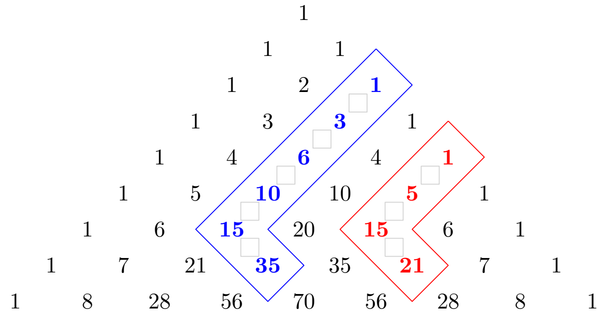
Hockey-Stick-Rule

Die **Hockey-Stick-Rule** beschreibt einen Zusammenhang zwischen den Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck. Wir haben für dich 2 Hockey-Sticks ins Pascalsche Dreieck eingezeichnet:

Hast du eine Vermutung, welcher Zusammenhang zwischen den Zahlen in einem Hockey-Stick gilt?

Zeichne einen weiteren Hockey-Stick ein und überprüfe dort deine Vermutung.

Tatsächlich gilt für alle natürlichen Zahlen mit $0 \leq k \leq n$, dass



$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Wir können die Hockey-Stick-Rule kombinatorisch so erklären: Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7 genau drei Zahlen auszuwählen? Zum Beispiel:

1	2	3	4	5	6	7

Wir lösen dieses Abzählproblem auf 2 verschiedene Arten. Die eine Variante:
Aus 7 unterscheidbaren Objekten soll eine *Menge* von 3 Objekten ausgewählt werden.
Dafür gibt es $\binom{7}{3} = 35$ Möglichkeiten. Die andere Variante:

1	2	3	4	5	6	7

Wenn 7 die größte ausgewählte Zahl ist, dann bleiben $\binom{6}{2} = 15$ Möglichkeiten für die anderen beiden Zahlen.

1	2	3	4	5	6	7

Wenn 6 die größte ausgewählte Zahl ist, dann bleiben $\binom{5}{2} = 10$ Möglichkeiten für die anderen beiden Zahlen.

1	2	3	4	5	6	7

Wenn 5 die größte ausgewählte Zahl ist, dann bleiben $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten für die anderen beiden Zahlen.

1	2	3	4	5	6	7

Wenn 4 die größte ausgewählte Zahl ist, dann bleiben $\binom{3}{2} = 3$ Möglichkeiten für die anderen beiden Zahlen.

1	2	3	4	5	6	7

Wenn 3 die größte ausgewählte Zahl ist, dann bleibt $\binom{2}{2} = 1$ Möglichkeit für die anderen beiden Zahlen.

$$\Longrightarrow \binom{7}{3} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2}$$

3. Zufallsexperimente

Mit welchem Verlust sollte ich rechnen, wenn ich regelmäßig Lotto „6 aus 45“ spiele?
Wie zuverlässig sind Wahlumfragen?
Wie können medizinische Tests effizient durchgeführt werden?

Die Wahrscheinlichkeitstheorie wurde erst im 20. Jahrhundert auf ein solides Fundament gestellt. Damit ist sie ein Jungspund innerhalb der Mathematik. Trotzdem ist sie aus modernen Anwendungsbereichen nicht mehr wegzudenken.

Arbeitsblatt – Laplace-Experimente

Auf dem Arbeitsblatt – Laplace-Experimente behandeln wir die folgenden Fragen:

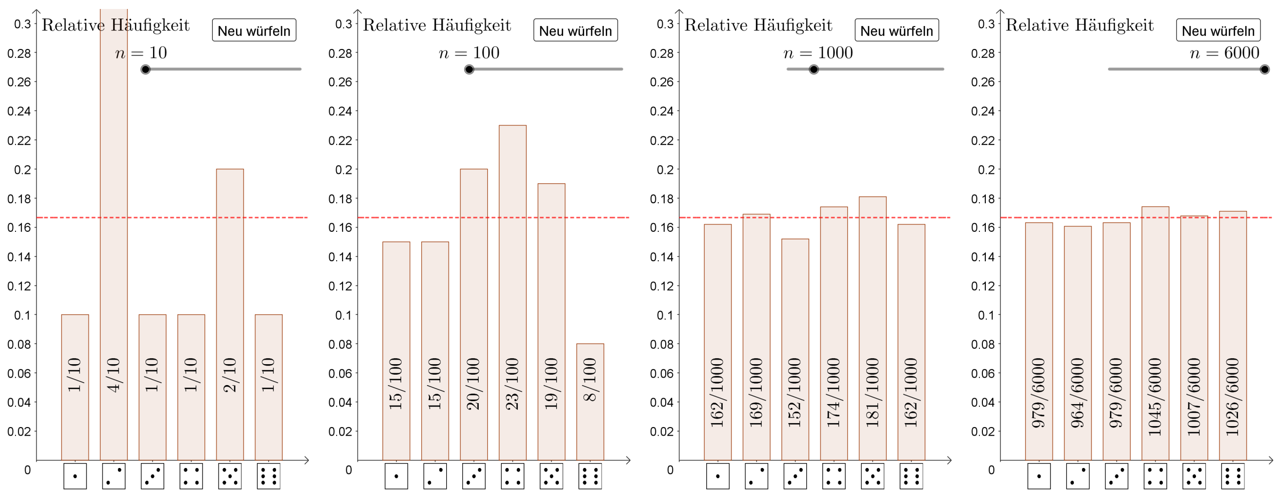
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
beim Wurf mit 2 gewöhnlichen Spielwürfeln
die Augensumme 11 zu würfeln?

Was ist ein **Laplace-Experiment**?
Wie können wir bei Laplace-Experimenten
Wahrscheinlichkeiten berechnen?

Wie groß sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten
bei Roulette?

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Was besagt das **Empirische Gesetz der großen Zahlen**?



An einem Roulette-Tisch ist 7 Mal hintereinander Rot gekommen.
Wie wahrscheinlich ist es, dass gleich noch einmal Rot kommt?

Beispiel 3.1. In der aktuellen Losauflage „Schatztruhe“ gibt es 13 Mio. Rubbellose.

Der Preis pro Rubbellos beträgt 2 € .
Die absoluten Häufigkeiten der „Gewinnlose“ sind in der nebenstehenden Tabelle dargestellt.

Anzahl	Auszahlung
20	30 000 €
40	3000 €
250	300 €
4400	100 €
13 000	60 €
31 000	30 €
100 000	8 €
440 000	6 €
1 000 000	4 €
2 282 500	2 €

1) Wie groß ist der Gewinn der Lotterie, wenn alle Lose der Auflage verkauft werden, und alle Gewinne abgeholt werden?

Ohne Beachtung der Produktionskosten, Steuern, usw.

2) Berechne die Auszahlung, die du durchschnittlich pro gekauftem Los erwarten kannst. Wie viel Euro verlierst du durchschnittlich pro gekauftem Los?

3) Wie groß müsste der Preis pro Rubellos mindestens sein, damit der Gewinn der Lotterien bei Verkauf der gesamten Auflage mindestens 4 200 000 € beträgt?

Lösung.

1) Die Einnahmen sind $E = 2\,€ \cdot 13\,\text{Mio.} = 26\,\text{Mio.}\,€$. Die Auszahlungen betragen insgesamt

$$A = 20 \cdot 30\,000 + 40 \cdot 3000 + 250 \cdot 300 + \cdots + 2\,282\,500 \cdot 2 = 14\,950\,000\,€\,.$$

Wenn alle Lose verkauft werden, beträgt der Gewinn der Lotterie $G = E - A = 11\,050\,000\,€$.

2) Die durchschnittliche Auszahlung pro Los beträgt $\dfrac{A}{13 \cdot 10^6} = 1{,}15\,€$. Der durchschnittliche Verlust pro Los beträgt also $2\,€ - 1{,}15\,€ = 0{,}85\,€$.

3) Der gesuchte Preis p ist die Lösung der Gleichung

$$p \cdot 13 \cdot 10^6 - A = 4\,200\,000 \qquad \Longleftrightarrow \qquad p = \frac{4\,200\,000 + A}{13 \cdot 10^6} = 1{,}473...\,€$$

Wenn alle Lose um 1,48 € verkauft werden, beträgt der Gewinn der Lotterie über 4 200 000 € . □

Beispiel 3.2. Beim Glücksspiel Lotto „6 aus 45“ gibt es 45 Kugeln, die mit den Zahlen von 1 bis 45 nummeriert sind.
Mit einem Lotto-Tipp entscheidet man sich für 6 von diesen 45 Zahlen. Zum Beispiel: $\{3, 6, 23, 26, 37, 42\}$
Bei der Lotto-Ziehung werden dann 6 der 45 Kugeln gezogen und aufsteigend sortiert.

Die Reihenfolge der gezogenen Kugeln ist also egal.

1) Wie viele verschiedene Ergebnisse sind bei einer Lotto-Ziehung möglich?
2) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass du genau 6, 5, 4 bzw. 3 der gezogenen Kugeln richtig tippst.

Lösung.

1) Aus 45 unterscheidbaren Kugeln wird eine Menge von 6 Kugeln ausgewählt.
Es gibt also $\binom{45}{6} = 8\,145\,060$ mögliche Ergebnisse bei einer Lotto-Ziehung.

Mehr zu solchen Abzählproblemen findest du am Arbeitsblatt – Kombinatorik.

2) Jedes der 8 145 060 möglichen Ergebnisse bei einer Lotto-Ziehung ist gleich wahrscheinlich.
Es gibt genau ein Ergebnis, das genau aus den 6 getippten Zahlen $\{3, 6, 23, 26, 37, 42\}$ besteht.
Die Wahrscheinlichkeit für einen „Sechser“ ist also

$$\frac{1}{8\,145\,060} = 0{,}000\,012\ldots\,\% = 1 : 8\,145\,060$$

Wie viele Ergebnisse gibt es, bei denen genau 5 der 6 Kugeln richtig getippt sind?
Von den 6 getippten Zahlen $\{3, 6, 23, 26, 37, 42\}$ können wir eine Menge von 5 Zahlen auswählen.
Dafür gibt es $\binom{6}{5} = 6$ Möglichkeiten.
Unabhängig davon können wir aus den 39 *nicht* getippten Zahlen 1 Zahl auswählen.
Dafür gibt es $\binom{39}{1} = 39$ Möglichkeiten.
Es gibt also $6 \cdot 39 = 234$ Ergebnisse, bei denen genau 5 Kugeln richtig getippt sind.
Die weiteren Ergebnisse sind in der Tabelle zusammengefasst:

	Anzahl günstige Ergebnisse	Wahrscheinlichkeit	≈ 1 zu ...
6 richtige Zahlen	1	0,000 012... %	8 145 060
5 richtige Zahlen	$\binom{6}{5} \cdot \binom{39}{1} = 234$	0,002 872... %	34 808
4 richtige Zahlen	$\binom{6}{4} \cdot \binom{39}{2} = 11\,115$	0,1364... %	733
3 richtige Zahlen	$\binom{6}{3} \cdot \binom{39}{3} = 182\,780$	2,244... %	45

□

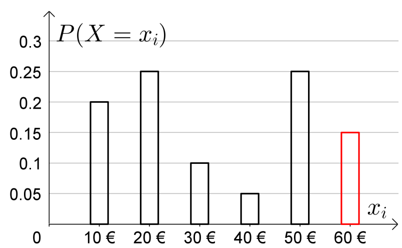
Arbeitsblatt – Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeitsräume

Auf dem Arbeitsblatt – Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeitsräume behandeln wir die folgenden Fragen:

Was ist ein **Zufallsexperiment**?

Was sind **Ergebnisse**?
Was ist der **Ergebnisraum** bei einem Zufallsexperiment?

Was sind **Ereignisse**?
Wie berechnet man die **Wahrscheinlichkeit** für ein Ereignis?



4. Zufallsvariablen

Arbeitsblatt – Zufallsvariablen

Auf dem Arbeitsblatt – Zufallsvariablen behandeln wir die folgenden Fragen:

Was ist eine **Zufallsvariable**?

Zufall 

$\Omega = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$ z. B. ⚄ $\xmapsto{\text{Zufalls-variable } X}$ $X($⚄$) = 50$ €

mögliche Ergebnisse

Ergebnis des Zufallsexperiments

Was ist der **Erwartungswert** einer Zufallsvariable und wie berechnet man ihn?
Wie berechnet man **Varianz** und **Standardabweichung** einer Zufallsvariable?
Unter welcher Bedingung ist ein Spiel **fair**?

Beispiel 4.1. Du wirfst einen fairen 6-seitigen Würfel mit den Augenzahlen 1 bis 6.
Wenn du eine gerade Augenzahl würfelst, dann gewinnst du die Hälfte der gewürfelten Augenzahl in Euro.
Wenn du eine ungerade Augenzahl würfelst, dann verlierst du 2 Euro.

1) Ergänze die fehlenden Werte in der Tabelle.

Ergebnis ω_i	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
$P(\{\omega_i\})$						
$X(\omega_i)$						

2) Berechne die Wahrscheinlichkeiten $P(X = -2\text{ €})$, $P(X \geq 2\text{ €})$ und $P(X \leq 1{,}5\text{ €})$.

Lösung.

1)

Ergebnis ω_i	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
$P(\{\omega_i\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$X(\omega_i)$	-2 €	1 €	-2 €	2 €	-2 €	3 €

2) Wir müssen zwischen dem Würfelergebnis – zum Beispiel $\omega_4 = 4$ – und dem zugehörigen Wert der Zufallsvariable $X(\omega_4) = 2$ € unterscheiden.

$P(X = -2\text{ €}) = P(\{$⚀, ⚂, ⚄$\}) = \frac{3}{6}$

$P(X \geq 2\text{ €}) = P(\{$⚃, ⚅$\}) = \frac{2}{6}$

$P(X \leq 1{,}5\text{ €}) = P(\{$⚀, ⚁, ⚂, ⚄$\}) = \frac{4}{6}$

Mit $X = -2$ € ist formal das Ereignis gemeint, das genau jene Ergebnisse vom Zufallsexperiment enthält, bei denen X den Wert -2 € annimmt, also $\{$⚀, ⚂, ⚄$\}$.

□

Beispiel 4.2. Der Kauf einer „Schatztruhe" (siehe Beispiel 3.1) ist ein Laplace-Experiment mit 13 Millionen möglichen Ergebnissen. In diesem Modell ist also jedes einzelne Los ein mögliches Ergebnis.
Wie groß ist die erwartete Auszahlung pro Los?

Lösung. Die Zufallsvariable X gibt die Auszahlung abhängig vom gekauften Los an.
Die möglichen Werte von X sind $x_1 = 0\,€$, $x_2 = 2\,€$, $x_3 = 4\,€$, ..., $x_{11} = 30\,000\,€$.

Den Erwartungswert der Auszahlung X berechnen wir also folgendermaßen:

$$E(X) = 2 \cdot \frac{2\,282\,500}{13 \cdot 10^6} + 4 \cdot \frac{1\,000\,000}{13 \cdot 10^6} + \dots + 30\,000 \cdot \frac{20}{13 \cdot 10^6} =$$
$$= \frac{2 \cdot 2\,282\,500 + 4 \cdot 1\,000\,000 + \dots + 30\,000 \cdot 20}{13 \cdot 10^6} = 1{,}15\,€\,.$$

Vergleiche mit Beispiel 3.1.

□

Interpretation des Erwartungswerts

Wir wiederholen ein Zufallsexperiment immer wieder unabhängig unter denselben Bedingungen.
Bei jeder Wiederholung notieren wir den Wert, den die Zufallsvariable dem Ergebnis zuordnet.
Nach vielen Wiederholungen bilden wir dann den Mittelwert der notierten Werte.
Dieser Mittelwert liegt dann mit hoher Wahrscheinlichkeit nahe am Erwartungswert $E(X)$.
☆ Mathematisch exakt gilt für alle $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P(\text{„Mittelwert ist nach } n \text{ Wiederholungen mindestens } \varepsilon \text{ von } E(X) \text{ entfernt"}) = 0$$

Das ist das (schwache) **Gesetz der großen Zahlen.**

Beispiel 4.3. Martina bietet folgendes Spiel an: Nach einem Einsatz von 10 € wirft man einen fairen 6-seitigen Würfel. Würfelt man einen Sechser erhält man G € zurück. In allen anderen Fällen ist der Einsatz verloren. Wie groß muss G sein, damit das Spiel fair ist?

Martina soll also auf lange Sicht weder Gewinn noch Verlust erwarten.

Lösung. X ... Gewinn von Martina bei einer Spielrunde.

$$X = \begin{cases} 10\,€\,, & \text{wenn kein Sechser gewürfelt wird.} \\ 10 - G\,€\,, & \text{wenn ein Sechser gewürfelt wird.} \end{cases}$$

Der Erwartungswert von X ist

$$E(X) = 10 \cdot P(X = 10) + (10 - G) \cdot P(X = 10 - G) = 10 \cdot \frac{5}{6} + (10 - G) \cdot \frac{1}{6} = 10 - \frac{G}{6}.$$

Damit das Spiel fair ist, muss $E(X) = 0$ sein, also:

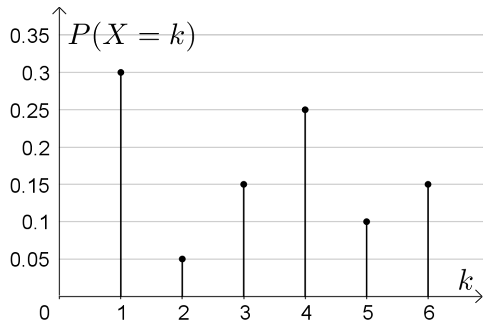
$$0 = 10 - \frac{G}{6} \quad \Longleftrightarrow \quad G = 60$$

Damit das Spiel fair ist, muss Martina bei einem Sechser also 60 € auszahlen. □

Beispiel 4.4. Würfelt man mit einem *gezinkten* 6-seitigen Würfel, so sind die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Augenzahlen bei einem Wurf *nicht* alle gleich groß.

Die Zufallsvariable X gibt die gewürfelte Augenzahl an. Die Wahrscheinlichkeiten für die sechs möglichen Werte von X sind rechts in einem Stabdiagramm dargestellt.

Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.



Lösung. Der Erwartungswert von X ist

$$\mu = E(X) = 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + \cdots + 6 \cdot P(X = 6)$$
$$= 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}05 + 3 \cdot 0{,}15 + 4 \cdot 0{,}25 + 5 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}15 = 3{,}25.$$

Die Varianz von X ist

$$V(X) = (1-\mu)^2 \cdot P(X = 1) + (2-\mu)^2 \cdot P(X = 2) + \cdots + (6-\mu)^2 \cdot P(X = 6) = 3{,}1875.$$

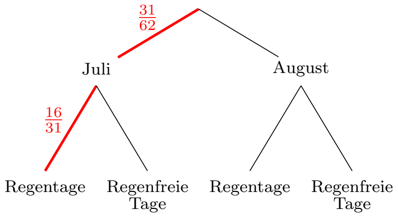
Die Standardabweichung von X ist also

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1{,}785...$$ □

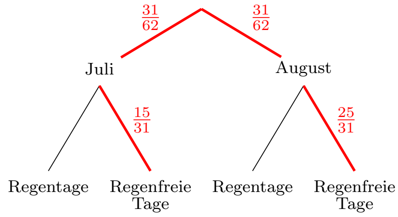
5. Mehrstufige Zufallsexperimente & Baumdiagramme

Arbeitsblatt – Relative Häufigkeiten und Baumdiagramme

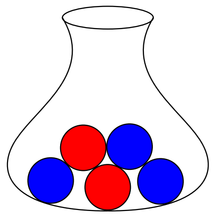
Das Arbeitsblatt – Relative Häufigkeiten und Baumdiagramme bietet sich auch schon zu einem früheren Zeitpunkt im Unterricht bei der Behandlung von relativen Häufigkeiten an.
Dort beantworten wir die folgenden Fragen:



Was sind **absolute Häufigkeiten**?
Was sind **relative Häufigkeiten**?
Was sind die **Pfadregeln** bei Baumdiagrammen?



Beispiel 5.1. Eine Urne enthält 2 rote und 3 blaue Kugeln. Wir ziehen zweimal blind hintereinander.



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ...

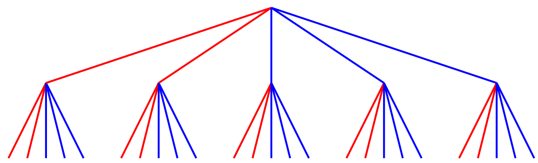
a) ... zwei rote Kugeln zu ziehen?
b) ... zwei blaue Kugeln zu ziehen?
c) ... eine rote und eine blaue Kugel (in beliebiger Reihenfolge) zu ziehen?

Die Antwort hängt davon ab, ob wir die erste gezogene Kugel vor der zweiten Ziehung ...

1) ... in die Urne zurücklegen oder „Ziehen mit Zurücklegen“
2) ... *nicht* in die Urne zurücklegen. „Ziehen ohne Zurücklegen“

1) Wir legen die zuerst gezogene Kugel zurück. Die möglichen Abläufe sind rechts dargestellt.

Es gibt $5 \cdot 5 = 25$ mögliche Ergebnisse, die alle gleich wahrscheinlich sind.



a) Von den 25 möglichen Ergebnissen sind $2 \cdot 2 = 4$ günstig.
Die Wahrscheinlichkeit, zwei rote Kugeln zu ziehen, beträgt also

$$\frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 5} = \frac{4}{25}\,.$$

b) Von den 25 möglichen Ergebnissen sind $3 \cdot 3 = 9$ günstig.
Die Wahrscheinlichkeit, zwei blaue Kugeln zu ziehen, beträgt also

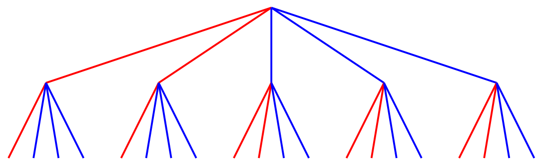
$$\frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 5} = \frac{9}{25}\,.$$

c) Von den 25 möglichen Ergebnissen sind $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$ günstig.
Die Wahrscheinlichkeit, eine rote und eine blaue Kugel zu ziehen, beträgt also

$$\frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 2}{5 \cdot 5} = \frac{12}{25}\,.$$

2) Wir legen die zuerst gezogene Kugel *nicht* zurück. Die möglichen Abläufe sind rechts dargestellt.

Es gibt $5 \cdot 4 = 20$ mögliche Ergebnisse, die alle gleich wahrscheinlich sind.



a) Von den 20 möglichen Ergebnissen sind $2 \cdot 1 = 2$ günstig.
Die Wahrscheinlichkeit, zwei rote Kugeln zu ziehen, beträgt also

$$\frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 4} = \frac{2}{20}\,.$$

b) Von den 20 möglichen Ergebnissen sind $3 \cdot 2 = 6$ günstig.
Die Wahrscheinlichkeit, zwei blaue Kugeln zu ziehen, beträgt also

$$\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 4} = \frac{6}{20}\,.$$

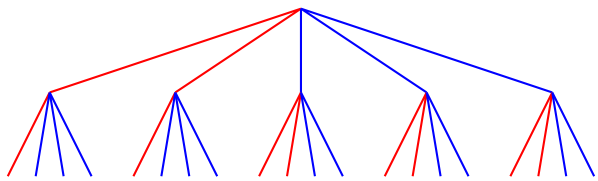
c) Von den 20 möglichen Ergebnissen sind $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$ günstig.
Die Wahrscheinlichkeit, eine rote und eine blaue Kugel zu ziehen, beträgt also

$$\frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 2}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20}\,.$$

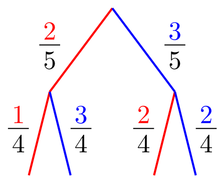
Baumdiagramme

Wir verwenden Baumdiagramme, um mehrstufige Zufallsexperimente zu modellieren.

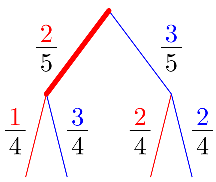
Rechts siehst du die möglichen Ablaufe beim 2-maligen Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Urne mit 2 roten Kugeln und 3 blauen Kugeln. Jede Verzweigung ist ein Laplace-Experiment.



Bei den Ereignissen, für die wir uns interessieren, unterscheiden wir die Kugeln nur nach Farbe. Deshalb fassen wir bei jeder Verzweigung die Kanten derselben Farbe zusammen und beschriften das „Kantenbündel“ mit seiner Laplace-Wahrscheinlichkeit. Das Ergebnis siehst du rechts.

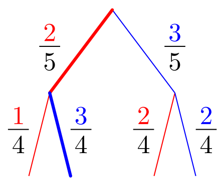


Jeder Pfad durch so ein Baumdiagramm, der oben beginnt und Richtung unten verläuft, stellt ein Ereignis des Zufallsexperiments dar.



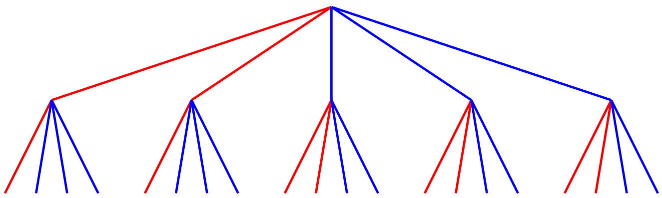
Der einstufige Pfad, den wir links hervorheben, stellt das Ereignis „Beim 1. Zug rot ziehen“ dar.

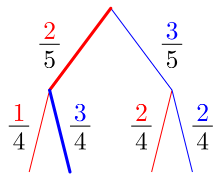
Der rechts hervorgehobene, zweistufige Pfad steht für das Ereignis „Zuerst rot ziehen, dann blau ziehen“.



Multiplikationssatz

1. Pfadregel (Multiplikationssatz): Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, das von einem Pfad in einem Baumdiagramm dargestellt wird, ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades.
Das Ereignis „Zuerst rot, dann blau ziehen“ ist im Baumdiagramm rechts als Pfad dargestellt:



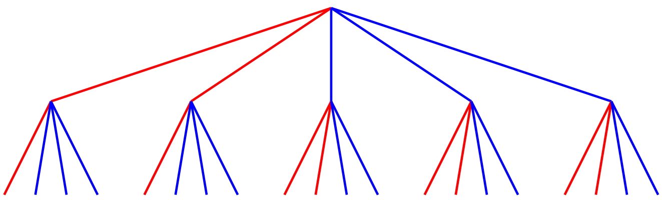


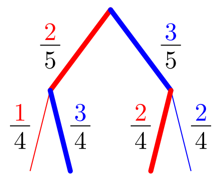
Die Wahrscheinlichkeit, zuerst eine rote Kugel und danach eine blaue Kugel zu ziehen, ist also

$$\frac{2\cdot 3}{5\cdot 4} = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{6}{20}\,.$$

Additionssatz

2. Pfadregel (Additionssatz): In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der für dieses Ereignis günstigen Pfade.
Dem Ereignis „Eine rote und eine blaue Kugel (in beliebiger Reihenfolge) ziehen“ entsprechen zum Beispiel 2 Pfade im Baumdiagramm rechts:





Die Summe ihrer Wahrscheinlichkeiten ist

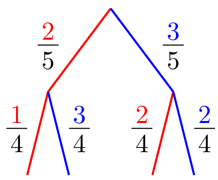
$$\frac{2\cdot 3 + 3\cdot 2}{5\cdot 4} = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{12}{20}\,.$$

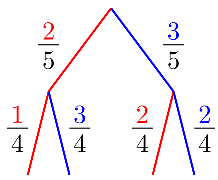
Pfade disjunkter Ereignisse

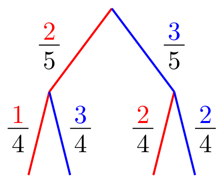
Jedem der 3 Ereignisse

$A =$ „Zuerst blau ziehen“, $B =$ „2 Mal rot ziehen“ und $C =$ „Zuerst blau, dann rot ziehen“

entspricht jeweils genau ein Pfad im Baumdiagramm. Zeichne ihn ein:







Es gilt $P(A \text{ oder } B) = P(A) + P(B)$, aber $P(A \text{ oder } C) \neq P(A) + P(C)$. Die Ereignisse A und C schließen einander nämlich nicht aus. Wie kannst du das auch an den Pfaden erkennen?

Beispiel 5.2. In einer Urne befinden sich 8 rote Kugeln, 5 blaue Kugeln und 7 grüne Kugeln.
Wenn du eine rote oder blaue Kugel ziehst, legst du sie wieder zurück.
Wenn du eine grüne Kugel ziehst, legst du sie *nicht* zurück.
Du ziehst 2 Mal hintereinander eine Kugel aus der Urne.

a) Zeichne ein zugehöriges Baumdiagramm.

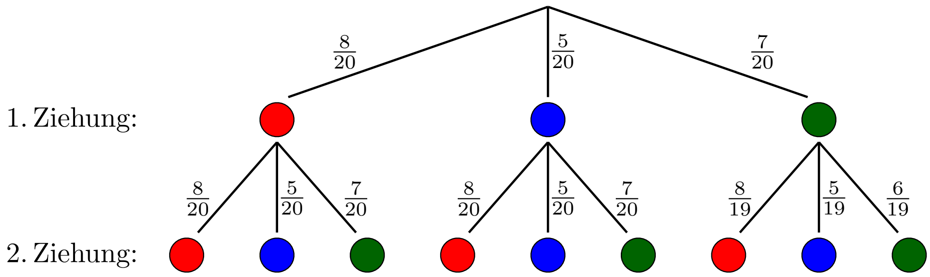
b) Wie groß ist die WS, dass unter den beiden gezogenen Kugeln *keine* blaue Kugel ist?

c) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gezogenen grünen Kugeln an.
Berechne den Erwartungswert von X.

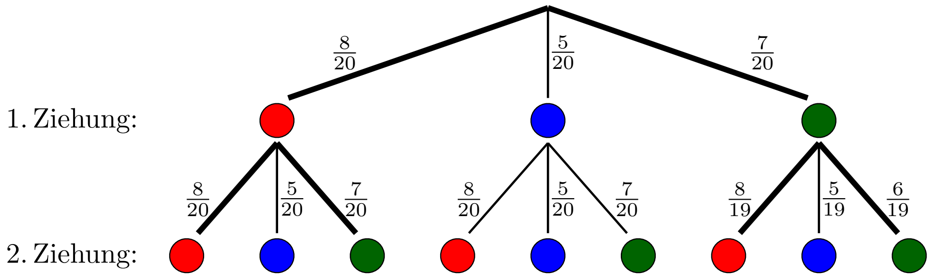
d) Die erste gezogene Kugel ist grün. Wie groß ist die WS, dass dann die zweite Kugel rot ist?

Lösung.

a)



b) Es gibt 4 zweistufige Pfade im Baumdiagramm, bei denen keine blaue Kugel gezogen wird:



Die WS, dass keine blaue Kugel unter den 2 gezogenen Kugeln ist, beträgt also

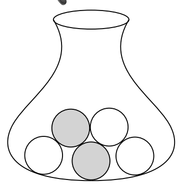
$$\frac{8}{20}\cdot\frac{8}{20}+\frac{8}{20}\cdot\frac{7}{20}+\frac{7}{20}\cdot\frac{8}{19}+\frac{7}{20}\cdot\frac{6}{19}=55{,}78...\%.$$

c) Die Zufallsvariable X kann die drei Werte 0, 1 oder 2 annehmen.

$$P(X=0)=\frac{8}{20}\cdot\frac{8}{20}+\frac{8}{20}\cdot\frac{5}{20}+\frac{5}{20}\cdot\frac{8}{20}+\frac{5}{20}\cdot\frac{5}{20}=42{,}25\,\%.$$
$$P(X=1)=\frac{8}{20}\cdot\frac{7}{20}+\frac{5}{20}\cdot\frac{7}{20}+\frac{7}{20}\cdot\frac{8}{19}+\frac{7}{20}\cdot\frac{5}{19}=46{,}49\,\%.$$
$$P(X=2)=\frac{7}{20}\cdot\frac{6}{19}=11{,}05...\,\%.$$
$$\implies E(X)=0\cdot P(X=0)+1\cdot P(X=1)+2\cdot P(X=2)=0{,}688....\ \text{grüne Kugeln.}$$

d) Wenn die erste Kugel grün ist, dann bleiben 19 Kugeln in der Urne.
Davon sind 8 Kugeln rot. Die WS, dass die zweite Kugel dann rot ist, beträgt also $\frac{8}{19}=42{,}10...\%$. □

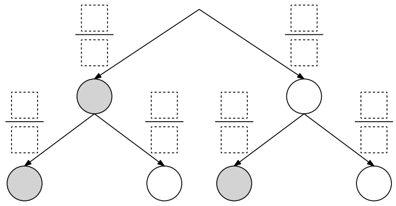
Arbeitsblatt – Baumdiagramme und Wahrscheinlichkeiten



Auf dem Arbeitsblatt – Baumdiagramme und Wahrscheinlichkeiten behandeln wir die folgenden Fragen:

Wie können mehrstufige Zufallsexperimente in einem **Baumdiagramm** veranschaulicht werden?
Wie können Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm mit den **Pfadregeln** berechnet werden?

Was ist eine **Vierfeldertafel**?
Was sind **bedingte Wahrscheinlichkeiten**?
Wie kann der **Satz von Bayes** bei der Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten helfen?



Damit können wir in Beispiel 5.2 auch die umgekehrte Frage beantworten: „Angenommen wir wissen, dass die 2. Kugel rot ist. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die 1. Kugel grün war?“

$$P(\text{1. Kugel grün} \mid \text{2. Kugel rot}) = \frac{P(\text{1. Kugel grün und 2. Kugel rot})}{P(\text{2. Kugel rot})}$$
$$= \frac{\frac{7}{20} \cdot \frac{8}{19}}{\frac{8}{20} \cdot \frac{8}{20} + \frac{5}{20} \cdot \frac{8}{20} + \frac{7}{20} \cdot \frac{8}{19}} = 36{,}17...\,\%$$

Die bedingte WS $P(\text{1. Kugel grün} \mid \text{2. Kugel rot})$ ist etwas größer als $P(\text{1. Kugel grün}) = 35\,\%$.
Das Ereignis „2. Kugel rot“ *begünstigt* also das Ereignis „1. Kugel grün“.

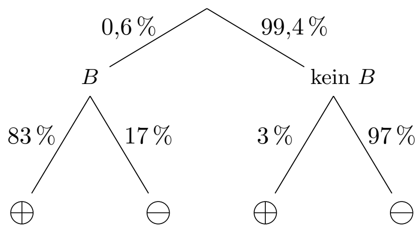
Dass die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A \mid B)$ und $P(B \mid A)$ nicht gleich groß sein müssen, wird beim folgenden Beispiel besonders deutlich. Wir lassen uns hier leicht von unserer Intuition täuschen.

Beispiel 5.3. Unter allen 55-jährigen Frauen sind etwa 0,6 % an Brustkrebs erkrankt.
Bei einem Mammographie-Screening wird untersucht, ob eine Brustkrebserkrankung vorliegt.

- Die Wahrscheinlichkeit, dass bei Vorliegen einer Brustkrebserkrankung das Untersuchungsergebnis „positiv“ ist, also die Erkrankung erkannt wird, beträgt 83 %.
  „Richtig-Positiv-Rate“ / „Sensitivität des Tests“
- Wenn keine Brustkrebserkrankung vorliegt, ist das Ergebnis der Untersuchung mit einer Wahrscheinlichkeit von 97 % „negativ“ (also korrekt). „Richtig-Negativ-Rate“ / „Spezifität des Tests“

Eine zufällig gewählte 55-jährige Frau führt ein Mammographie-Screening durch und erhält ein „positives“ Untersuchungsergebnis.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie tatsächlich Brustkrebs hat? Was schätzt du?

Lösung. Wir stellen die Wahrscheinlichkeiten in einem Baumdiagramm dar.



Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung $\oplus$, also

$$P(B \mid \oplus) = \frac{P(B \text{ und } \oplus)}{P(\oplus)}.$$

Mit den Pfadregeln berechnen wir

$$P(B \text{ und } \oplus) = 0{,}006 \cdot 0{,}83 = 0{,}004\,98$$

und

$$P(\oplus) = 0{,}006 \cdot 0{,}83 + 0{,}994 \cdot 0{,}03 = 0{,}0348.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte 55-jährige Frau mit „positivem“ Untersuchungsergebnis tatsächlich Brustkrebs hat, beträgt also

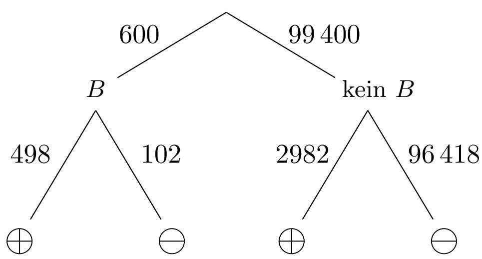
$$P(B \mid \oplus) = \frac{P(B \text{ und } \oplus)}{P(\oplus)} = \frac{0{,}004\,98}{0{,}0348} = 0{,}1431... = 14{,}31...\%.$$

Da das Ergebnis auf den ersten Blick derartig überraschend ist, überprüfen wir, welches Ergebnis wir bei einer großen Stichprobe von 100 000 zufällig gewählten 55-jährigen Frauen erwarten würden.

Die (erwarteten) absoluten Häufigkeiten sind rechts im Baumdiagramm dargestellt. Es wären also $498 + 2982 = 3480$ „positive“ Ergebnisse zu erwarten, aber nur 498 „richtig-positive“ Ergebnisse. Wir erwarten also tatsächlich, dass nur

$$\frac{498}{3480} = 14{,}31...\%$$

der „positiven“ Ergebnisse auch „richtig-positiv“ sind.



Das überraschende Ergebnis liegt an der geringen Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Frau ohne Vorwissen („a priori“) Brustkrebs hat. Bei einem „positiven“ Ergebnis sind also jedenfalls weitere Untersuchungen notwendig, bevor eine (wahrscheinlich) richtige Diagnose gestellt werden kann. □

Gegenereignis

Ist A ein Ereignis bei einem Zufallsexperiment, dann bezeichnen wir mit $\bar{A}$ das **Gegenereignis** von A. Das Gegenereignis $\bar{A}$ tritt genau dann ein, wenn A nicht eintritt.

Zum Beispiel: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$

Gegenwahrscheinlichkeit

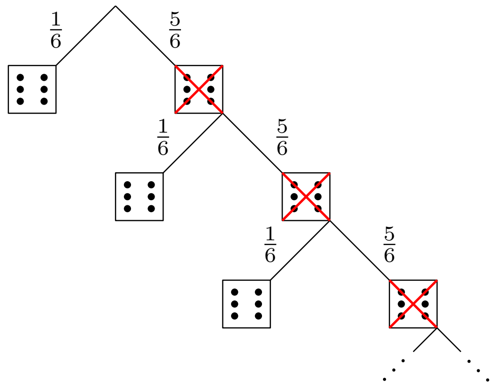
Erkläre, warum die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis von A

$$\boldsymbol{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

beträgt. $\boldsymbol{P(\bar{A})}$ nennen wir auch die **Gegenwahrscheinlichkeit** von A.

Beispiel 5.4. Wie oft muss man einen 6-seitigen Würfel mindestens werfen, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Sechser mindestens 99 % beträgt?

Lösung. Es ist einfacher die Gegenwahrscheinlichkeit zu berechnen, also die Wahrscheinlichkeit, dass unter n Würfen *kein* Sechser ist.



Das (abgeschnittene) Baumdiagramm ist rechts dargestellt. Nur ein einziger Pfad beschreibt das Ereignis, *keinen* Sechser zu würfeln. Seine Wahrscheinlichkeit ist:

$$P(\text{kein Sechser unter } n \text{ Würfen}) = \underbrace{\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{5}{6}}_{n \text{ Faktoren}} = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass unter n Würfen mindestens ein Sechser ist, beträgt also

$$P(\text{mindestens ein Sechser unter } n \text{ Würfen}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Für welches n ist die Wahrscheinlichkeit über 99 %?

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0{,}99 \iff 0{,}01 \geq \left(\frac{5}{6}\right)^n \iff \ln(0{,}01) \geq n \cdot \ln\left(\frac{5}{6}\right) \iff$$

$$\iff \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \leq n \iff n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} = 25{,}25\ldots$$

Das Ungleichheitszeichen dreht sich wegen $\ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0$ um.

Man muss mindestens 26 Mal werfen, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Sechser über 99 % liegt. □

6. BINOMIALVERTEILUNG

Arbeitsblatt – Binomialverteilung

Auf dem Arbeitsblatt – Binomialverteilung behandeln wir die folgenden Fragen:

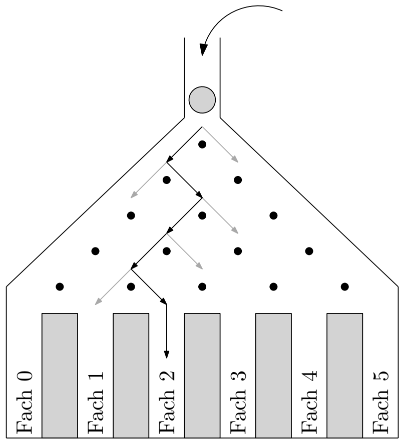
Wie wahrscheinlich ist es bei 10 Würfen mit einem gewöhnlichen Spielwürfel genau 3 Mal einen Sechser zu würfeln?

Was ist ein **Bernoulli-Experiment**?

Was ist eine **binomialverteilte Zufallsvariable**?

Wie berechnet man die **Wahrscheinlichkeiten** für die Werte einer binomialverteilten Zufallsvariable mit Technologieeinsatz und ohne Technologieeinsatz?

Wie groß sind **Erwartungswert**, **Varianz** und **Standardabweichung** einer binomialverteilten Zufallsvariable?

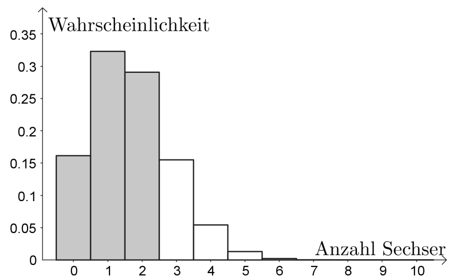


Beispiel 6.1. Du wirfst einen fairen 6-seitigen Würfel insgesamt 10 Mal.
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gewürfelten Sechser an.

Erkläre, warum X eine binomialverteilte Zufallsvariable ist. Wie groß sind die Parameter n und p?

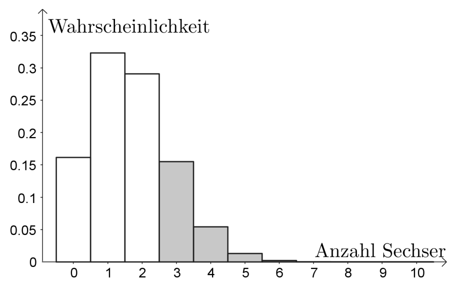
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ...

... höchstens zwei Sechser zu würfeln?



$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$
$$= 16{,}14...\,\% + 32{,}30...\,\% + 29{,}07...\,\%$$
$$= 77{,}52...\,\%$$

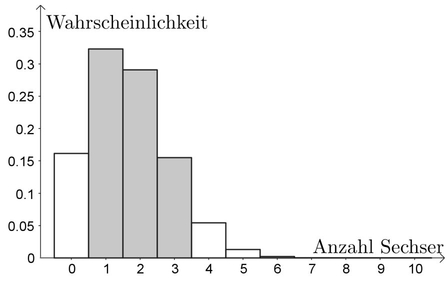
... mehr als zwei Sechser zu würfeln?



$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$$
$$= 100\,\% - 77{,}52...\,\%$$
$$= 22{,}47...\,\%$$

… ein, zwei oder drei Sechser zu würfeln?

$$\begin{aligned}P(1 \leq X \leq 3) &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)\\ &= 32{,}30\ldots\% + 29{,}07\ldots\% + 15{,}50\ldots\%\\ &= 76{,}87\ldots\%\end{aligned}$$



Ränder beachten

$$\begin{aligned}P(\text{„}X \text{ ist mindestens } 3\text{“}) &= P(X \geq 3) & \quad P(\text{„}X \text{ ist größer als } 3\text{“}) &= P(X > 3)\\ P(\text{„}X \text{ ist höchstens } 3\text{“}) &= P(X \leq 3) & \quad P(\text{„}X \text{ ist kleiner als } 3\text{“}) &= P(X < 3)\\ P(\text{„}X \text{ ist } 3 \text{ oder kleiner“}) &= P(X \leq 3) & \quad P(\text{„}X \text{ ist } 3 \text{ oder größer“}) &= P(X \geq 3)\end{aligned}$$

Beispiel 6.2. Aus einer Gruppe von 16 Personen wird jede Woche zufällig eine Person zur Stundenwiederholung ausgewählt. Die Auswahl erfolgt zum Beispiel mit einem fairen 16-seitigen Würfel.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Person im Zeitraum von 28 Wochen …

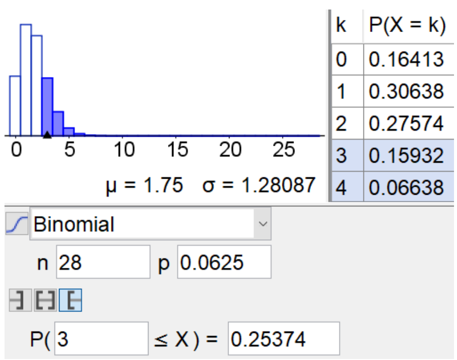
1) … mindestens einmal ausgewählt wird?
2) … öfter als zweimal ausgewählt wird?
3) … mindestens zweimal, aber höchstens fünfmal ausgewählt wird?

Lösung. Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft diese bestimmte Person ausgewählt wird.
Das gleiche Bernoulli-Experiment („Bestimmte Person ausgewählt oder nicht ausgewählt?“) wird 28 Mal unabhängig voneinander durchgeführt. Die „Erfolgswahrscheinlichkeit“ ist jedes Mal $\frac{1}{16}$.
X ist damit eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern $n = 28$ und $p = \frac{1}{16}$.

1) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{15}{16}\right)^{28} = 83{,}58\ldots\%$

2) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)$

$$\begin{aligned}P(X = 0) &= \left(\frac{15}{16}\right)^{28} = 16{,}41\ldots\%\\ P(X = 1) &= \binom{28}{1} \cdot \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^{27} \cdot = 30{,}63\ldots\%\\ P(X = 2) &= \binom{28}{2} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{2} \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^{26} = 27{,}57\ldots\%\\ \Longrightarrow P(X > 2) &= 25{,}37\ldots\%\end{aligned}$$



Im Bild rechts berechnen wir $P(X > 2) = P(X \geq 3)$ mit dem Wahrscheinlichkeitsrechner von GeoGebra.

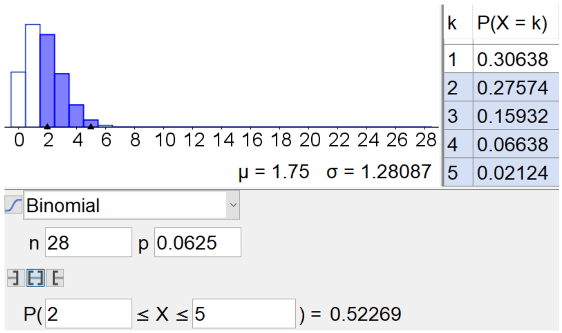
3) $P(2 \leq X \leq 5) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

$$P(X = 3) = \binom{28}{3} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^3 \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^{25} = 15{,}93...\%$$

$$P(X = 4) = \binom{28}{4} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^4 \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^{24} = 6{,}63...\%$$

$$P(X = 5) = \binom{28}{5} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^5 \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^{23} = 2{,}12...\%$$

$$\implies P(2 \leq X \leq 5) = 52{,}26...\%$$



□

Beispiel 6.3. Eine Fluglinie hat die Erfahrung gemacht, dass 3 % der gebuchten Flugtickets nicht in Anspruch genommen werden. Die Fluglinie verkauft für einen Flug mit 350 Sitzplätzen insgesamt 355 Tickets. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der in Anspruch genommenen Tickets an.
Wir nehmen an, dass X binomialverteilt ist.

Annahmen

Die Binomialverteilung ist hier ein Modell, das als Annäherung der Realität verwendet wird.
Welche Voraussetzung für eine Binomialverteilung ist in der Praxis wohl nicht erfüllt?

Nimmt jeder gebuchte Passagier wirklich *unabhängig* von *allen* anderen Passagieren das Flugticket in Anspruch?

a) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden höchstens so viele Tickets in Anspruch genommen, wie es Sitzplätze gibt?

Lösung. Ob ein Fluggast ein Ticket in Anspruch nimmt, ist ein Bernoulli-Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 97\,\%$. Nach unserer Annahme ist X binomialverteilt mit $n = 355$ und $p = 0{,}97$.

a) $E(X) = n \cdot p = 344{,}35$ Tickets, $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 3{,}214...$ Tickets.
b) Mit Technologieeinsatz berechnen wir $P(X \leq 350) = 0{,}9821... = 98{,}21...\%$. □

Unabhängigkeit

Ein Zufallsexperiment wird n Mal durchgeführt.
Bei jeder Durchführung ist die Wahrscheinlichkeit für einen „Erfolg“ konstant p.
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Erfolge unter den n Durchführungen an.
Dann folgt noch *nicht*, dass X binomialverteilt sein muss.

Tatsächlich ist es wesentlich, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg nicht nur konstant ist, sondern auch dass die Durchführungen *unabhängig* voneinander sind. Das heißt für jede Durchführung:
Die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg hängt *nicht* von den Ergebnissen in den vorherigen Durchführungen ab.

Zum Beispiel: Hans hat eine Zaubermünze in der Hand.

- Beim ersten Wurf verhält sie sich wie eine gewöhnliche faire Münze.
- Nach dem ersten Wurf wird der Zauber aktiviert:
  Bei jedem weiteren Wurf landet die Münze immer auf der jeweils anderen Seite als im Wurf davor.

Hans wirft die Zaubermünze insgesamt $n = 42$ Mal.
Dann gibt es nur zwei verschiedene Abläufe, die beide gleich wahrscheinlich sind:

$$(\text{Kopf}, \text{Zahl}, \text{Kopf}, \text{Zahl} \ldots, \text{Kopf}, \text{Zahl}) \quad \text{oder} \quad (\text{Zahl}, \text{Kopf}, \text{Zahl}, \text{Kopf} \ldots, \text{Zahl}, \text{Kopf})$$

Bevor Hans die Zaubermünze zum ersten Mal wirft, ist also bei jedem der $n = 42$ Würfe die Wahrscheinlichkeit für Kopf konstant $p = \frac{1}{2}$.
Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft die Münze auf der Seite „Kopf“ landet.
Dann ist X *nicht* binomialverteilt, sondern es gilt mit Sicherheit $X = 21$.

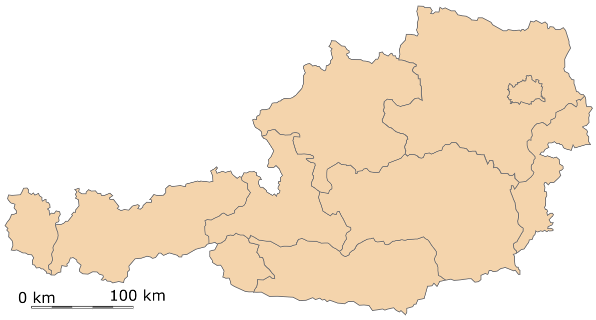
7. Normalverteilung

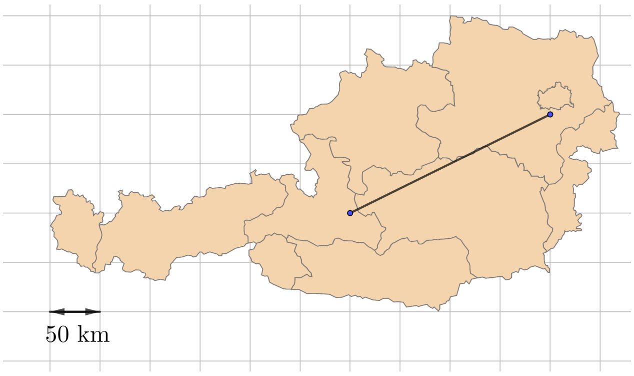
Wir beginnen mit ein paar Überlegungen, wie wir bei der Darstellung von Flächeninhalten auf die Skalierung von vertikaler und horizontaler Achse achten müssen. Diese Ideen können wir später gut gebrauchen, um den Übergang von der Binomialverteilung zur Normalverteilung sichtbar zu machen.

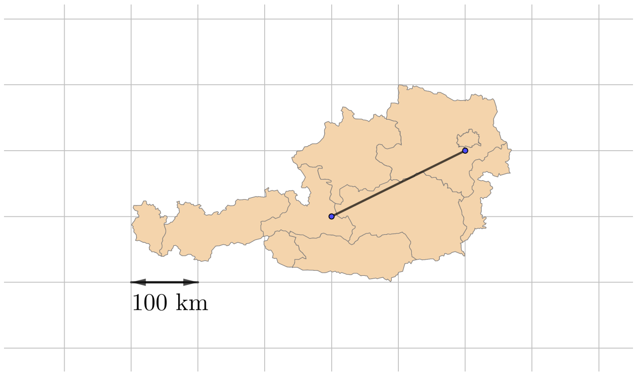
Maßstäbe

Wir sind es gewohnt, dass Landkarten einen Maßstab haben, der in jeder Richtung stimmt.

Mit dem Lineal messen wir Abstände zwischen Orten, die auf der Karte eingezeichnet sind. Mit Hilfe des Maßstabs und einer einfachen Schlussrechnung bestimmen wir dann den wirklichen Abstand der Orte.







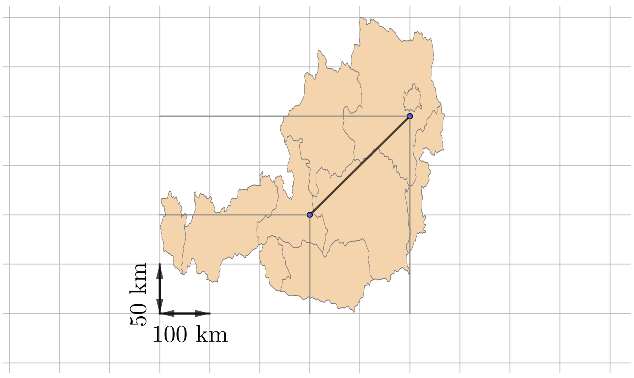
________ mm $\hat{=}$ 50 km

________ mm $\hat{=}$ ________ km

________ mm $\hat{=}$ 100 km

________ mm $\hat{=}$ ________ km

Im nächsten Bild sind horizontale und vertikale Achse *nicht* im selben Verhältnis skaliert.

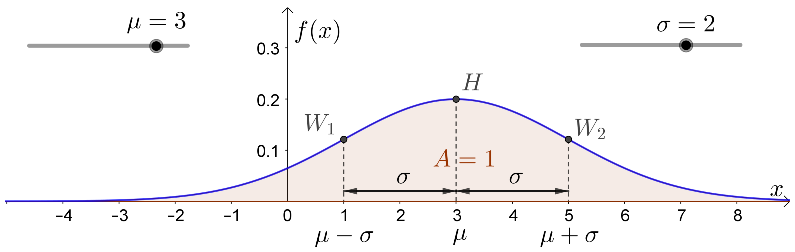


Österreich ist in horizontaler Richtung gestaucht abgebildet.

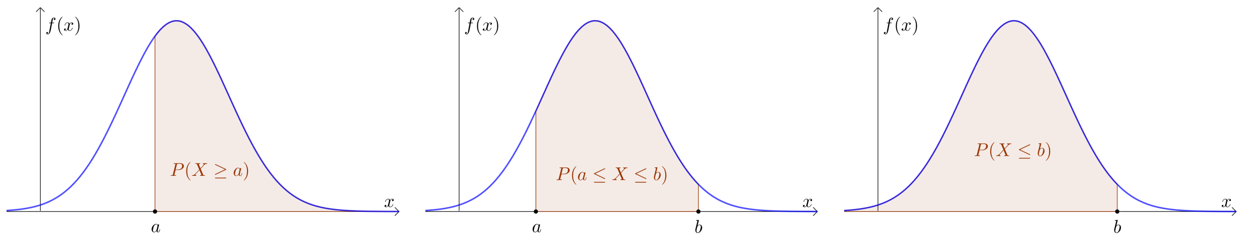
Erkläre, wie du den wirklichen Abstand von Orten in einer solchen, ungewöhnlichen Karte bestimmen kannst.

Arbeitsblatt – Normalverteilung

Auf dem Arbeitsblatt – Normalverteilung behandeln wir die folgenden Fragen:
Wie können **Flächeninhalte** als **Wahrscheinlichkeiten** interpretiert werden?
Was ist die **Dichtefunktion** der **Normalverteilung** mit **Erwartungswert** $\boldsymbol{\mu}$ und **Standardabweichung** $\boldsymbol{\sigma}$?



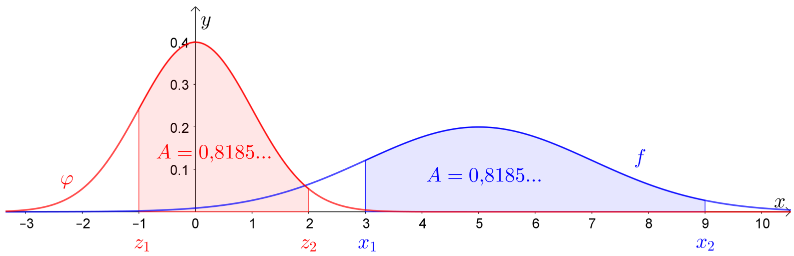
Welche **Eigenschaften** hat die Dichtefunktion?
Was ist eine **normalverteilte Zufallsvariable** X?

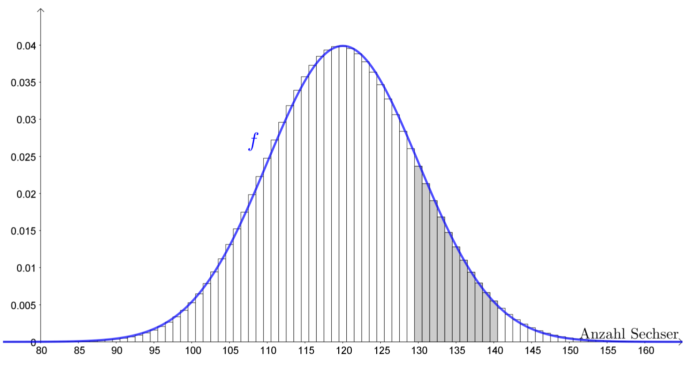


Wie kann man die Wahrscheinlichkeit $\boldsymbol{P(a \leq X \leq b)}$ mit Technologieeinsatz berechnen?

Was ist die **Dichtefunktion** der **Standardnormalverteilung**?

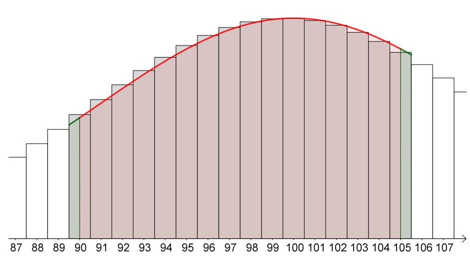
Was ist die **Standardisierung** normalverteilter Zufallsvariablen?





Welchen **Zusammenhang** gibt es zwischen binomialverteilten Zufallsvariablen und normalverteilten Zufallsvariablen?

Was ist die **Stetigkeitskorrektur**?



Beispiel 7.1. Eine normalverteilte Zufallsvariable X hat den Erwartungswert $\mu = 173$, und es gilt $P(166 \leq X \leq 180) = 95\,\%$. Wie groß ist die Standardabweichung σ von X?

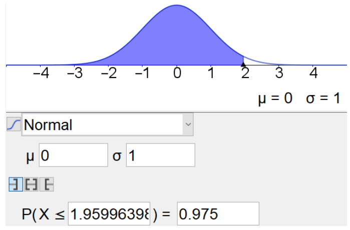
Lösung. Das Intervall $[166; 180]$ liegt symmetrisch um $\mu = 173$. Das entsprechende Intervall bei der standardnormalverteilten Zufallsvariable Z liegt damit auch symmetrisch um $\mu_Z = 0$.

Wir suchen also jenen „z-Wert“ mit

$$P(-z \leq Z \leq z) = 0{,}95.$$

Der Flächeninhalt links und rechts vom Intervall beträgt also jeweils $\frac{1-0{,}95}{2} = 0{,}025$.

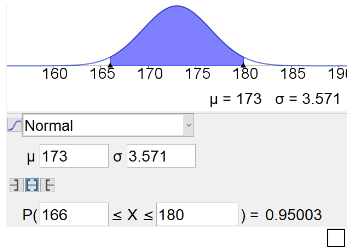
$$P(Z \leq z) = 0{,}975 \implies z = 1{,}959\ldots$$



Aus $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ können wir σ berechnen:

$$\sigma = \frac{180 - 173}{z} = 3{,}571\ldots$$

Rechts kontrollieren wir noch einmal das Ergebnis.



68-95-99,7-Regel

Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ.
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert von X um höchstens $k \cdot \sigma$ von μ abweicht, also

$$P(\mu - k \cdot \sigma \leq X \leq \mu + k \cdot \sigma),$$

hängt nur von k ab, aber nicht von μ oder σ. Kannst du erklären, warum? Es gilt:

$$P(\mu - 1 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 1 \cdot \sigma) = P(-1 \leq Z \leq 1) = 68{,}26\ldots\%,$$
$$P(\mu - 2 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 2 \cdot \sigma) = P(-2 \leq Z \leq 2) = 95{,}44\ldots\%,$$
$$P(\mu - 3 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 3 \cdot \sigma) = P(-3 \leq Z \leq 3) = 99{,}73\ldots\%.$$

Zentraler Grenzwertsatz

Warum sind so viele Merkmale, die wir beobachten, näherungsweise normalverteilt?

Bei einer binomialverteilten Zufallsvariable S_n wird das gleiche Bernoulli-Experiment n Mal unabhängig voneinander durchgeführt. Für großes n hat das Säulendiagramm von S_n annähernd die „Glockenform“ einer Normalverteilung. **Satz von Moivre-Laplace**.

Tatsächlich erhalten wir auch dann näherungsweise die „Glockenform“ einer Normalverteilung, wenn wir ein *beliebiges* Zufallsexperiment mit endlichem Erwartungswert μ und positiver Standardabweichung σ unabhängig voneinander n Mal durchführen. Diese Eigenschaft folgt aus dem sogenannten **Zentralen Grenzwertsatz**.

Zum Beispiel: 1000 Mal einen fairen Würfel werfen und die Augensumme berechnen.
Aber auch: 1000 Mal einen *gezinkten* Würfel werfen und die Augensumme berechnen.
Oder: Die Körpergröße resultiert aus dem additiven Zusammenwirken vieler verschiedener Gene. Additive Polygenie

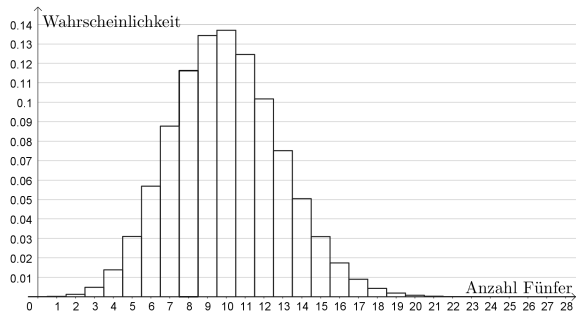
8. Verteilungsfunktionen

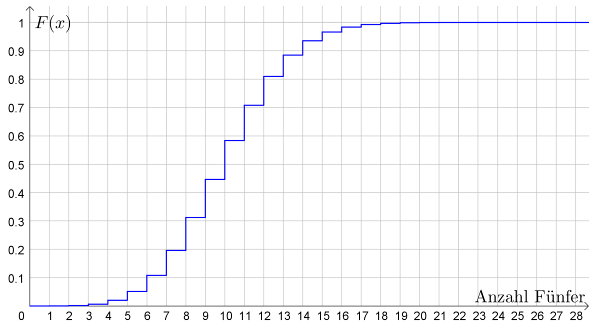
Arbeitsblatt – Verteilungsfunktionen

Auf dem Arbeitsblatt – Verteilungsfunktionen behandeln wir die folgenden Fragen:

Wie ist die **Verteilungsfunktion** einer Zufallsvariable definiert?

X ist eine **binomialverteilte** Zufallsvariable.
Wie hängt das zugehörige Säulendiagramm mit dem Graphen der Verteilungsfunktion von X zusammen?





X ist eine **normalverteilte** Zufallsvariable.
Welchen Zusammenhang gibt es zwischen der zugehörigen Dichtefunktion f und der Verteilungsfunktion F?
Welche Eigenschaften hat die Verteilungsfunktion?