GeoGebra-Kompendium zu SRDP-Aufgaben

23. März 2020

Informationen zum GeoGebra-Kompendium

1) Dieses Kompendium enthält eine Abfolge von typischen SRDP-Aufgaben, zu deren Lösung höherer Technologieeinsatz unterstützend eingesetzt werden *kann*.
Viele dieser Aufgaben sind auch händisch mit einem einfachen Taschenrechner sinnvoll lösbar.
Je mehr Aufgaben du auf beiden Wegen lösen kannst, desto besser bist du für die SRDP bzw. ein MINT-Studium vorbereitet.

2) Nicht jede dieser Aufgaben ist für alle Schultypen bei der SRDP relevant.
Umgekehrt erhebt das Kompendium nicht den Anspruch, jeden möglichen Aufgabentyp abzudecken.

3) Die beschriebenen Lösungswege wurden mit GeoGebra Classic 5 getestet.
Einige Aufgabentypen können auf verschiedenen Wegen mit GeoGebra gelöst werden.
Solche alternative Lösungsschritte sind dann zum Beispiel mit **2a)** bzw. **2b)** angegeben.

4) Das Kompendium erklärt *nicht* die Mathematik hinter den GeoGebra-Befehlen.
Wenn du den mathematischen Hintergrund verstehen möchtest, findest du im Kompendium an den entsprechenden Stellen Querverweise zu den passenden MmF-Kompetenzmaterialien.

5) Wir freuen uns über Feedback und Hinweise zu fehlenden Aufgabentypen und Lösungswegen.

Inhaltsverzeichnis

Gleichungen lösen . . . 3

Gleichungen auf eine bestimmte Variable umformen . . . 4

Lineare Funktion mit 2 Punkten aufstellen . . . 4

Exponentialfunktion mit 2 Punkten aufstellen . . . 4

Stammfunktionen / Unbestimmtes Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ . . . 5

Tangenten . . . 5

Nullstellen . . . 6

Lokales Minimum (Tiefpunkt) / Lokales Maximum (Hochpunkt) . . . 7

Wendepunkt bzw. Punkt mit maximaler/minimaler Steigung . . . 7

Steigungswinkel / Neigungswinkel einer Funktion f an der Stelle x_0 . . . 8

Schnittpunkte zweier Funktionen f und g . . . 9

Schnittwinkel . . . 10

Bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ . . . 10

Flächeninhalt zwischen Funktionsgraphen . . . 11

Bogenlänge des Graphen einer Funktion f im Intervall $[a;b]$ . . . 12

Gleichungssysteme lösen . . . 12

Umgekehrte Kurvenuntersuchungen . . . 13

Regression / Ausgleichsfunktionen . . . 14

Differentialgleichungen . . . 14

Binomialverteilung . . . 15

Normalverteilung: μ und σ gegeben . . . 15

Normalverteilung: μ oder σ gesucht . . . 16

Normalverteilung: 2-seitiger Zufallsstreubereich für einen Einzelwert . . . 16

Normalverteilung: 2-seitiger Zufallsstreubereich für den Stichprobenmittelwert . . . 17

Normalverteilung: Konfidenzintervall für μ bei bekanntem σ . . . 17

Normalverteilung: Konfidenzintervall für μ bei unbekanntem σ . . . 18

Statistische Auswertungen (Liste von Einzelwerten) . . . 19

Statistische Auswertungen (Klassen mit Häufigkeiten) . . . 20

Komplexe Zahlen . . . 20

Vektorrechnung . . . 21

Parameterdarstellung von Geraden . . . 21

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(1) Kugelstoßen ist eine Disziplin bei den Olympischen Sommerspielen.
Eine Metallkugel muss so weit wie möglich aus einem Kreis in einen vorgegebenen Aufschlagbereich gestoßen werden.
Die Bahnkurve einer gestoßenen Kugel lässt sich näherungsweise durch den Graphen der quadratischen Funktion h beschreiben:

$$h(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 0{,}75 \cdot x + 2 \qquad \text{mit } x \geq 0$$

$x \ldots$ horizontale Entfernung der Kugel von der Abstoßstelle in m
$h(x) \ldots$ Höhe der Kugel über dem Boden bei der horizontalen Entfernung x in m

1) Geben Sie an, in welcher Höhe die Kugel abgestoßen wird.

2) Ermitteln Sie, in welcher horizontalen Entfernung von der Abstoßstelle die Kugel auf dem Boden aufschlägt.

Gleichungen lösen

1) CAS: Gleichung eingeben.

2a) Gleichung markieren und exakt lösen. x=

Ergebnis bei Bedarf runden. ≈

2b) Gleichung markieren und numerisch lösen. x≈

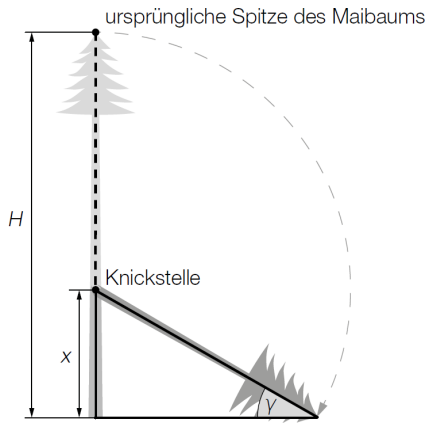
Falls die Gleichung mehrere Lösungen hat, den Startwert bei Bedarf mit $x = \ldots$ in der Nähe der gesuchten Lösung wählen. Dann wieder numerisch lösen klicken.

Es gibt Gleichungen in x, die eine Lösung haben, aber nicht auf x umgeformt werden können. Zum Beispiel: $x^2 = e^x$

In solchen Fällen reagiert das CAS beim exakten Lösungsversuch mit {?}. Numerisch kann die Lösung trotzdem auf beliebig viele Nachkommmastellen ermittelt werden. Mehr dazu erfährst du auf dem AB – Newtonsches Näherungsverfahren

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(2) Bei einem starken Unwetter knickt ein Maibaum der Höhe H um.
Der geknickte Teil schließt mit dem horizontalen Boden einen Winkel γ ein (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze).



1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von x aus H und γ auf.

Gleichungen auf eine bestimmte Variable umformen

1) CAS: Löse(<Gleichung>, <Variable>)
Anmerkung: Wenn man eine Gleichung markiert und [x=] klickt, wird automatisch der Befehl Löse(<Gleichung>, x) aufgerufen.

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(3) Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe über dem Meeresspiegel (Seehöhe) ab. Der Zusammenhang kann durch Exponentialfunktionen oder näherungsweise durch lineare Funktionen beschrieben werden. Zu Beginn des Jahres 2013 wurden im Schigebiet Kaprun-Kitzsteinhorn folgende Werte für den Luftdruck gemessen:

Seehöhe	Luftdruck
990 m	1040 hPa
1980 m	930 hPa

1) Bestimmen Sie mithilfe eines linearen Modells aus diesen Daten den Luftdruck in einer Höhe von 1300 m über dem Meeresspiegel.

Lineare Funktion mit 2 Punkten aufstellen

1) Eingabe: Punkte eingeben. Zum Beispiel: Eingabe: A=(990,1040)

2a) Gerade durch 2 Punkte legen. [ ]

3a) Algebra: Gleichung ablesen. (evtl. Rechtsklick $\rightarrow y = k \cdot x + d$)

Mehr zu linearen Funktionen erfährst du im KH – Lineare Funktionen.

2b) Eingabe: TrendPoly({A, B}, 1)

Mit TrendPoly wird eine Funktion definiert. Das ist praktischer, wenn du mit der Funktion weiterrechnen möchtest.

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(4) Ein neues, kostenloses Spiel für Smartphones verbreitet sich rasant. Eine Woche nach Erscheinen haben 700 Smartphonebesitzer/innen dieses Spiel heruntergeladen. Eine Woche später sind es bereits 1900. Nehmen Sie an, dass die Verbreitung dieses Spiels mithilfe eines exponentiellen Wachstums beschrieben werden kann.

1) Erstellen Sie eine zugehörige exponentielle Wachstumsfunktion f mit:

$$f(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$$

$t \ldots$ Zeit in Wochen ab dem Erscheinen des Spiels
$f(t) \ldots$ Anzahl der Smartphonebesitzer/innen, die das Spiel bis zum Zeitpunkt t heruntergeladen haben

Exponentialfunktion mit 2 Punkten aufstellen

1) Eingabe: Punkte A und B eingeben.

2a) Eingabe: TrendExp({A, B}) für $f(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x}$ oder TrendExp2({A, B}) für $f(x) = c \cdot a^x$.

Mehr zu Exponentialfunktionen erfährst du im KH – Exponential- und Logarithmusfunktionen.

2b) CAS: Mit den beiden Punkten jeweils eine Gleichung aufstellen.
Beide Gleichungen markieren und das Gleichungssystem lösen. [x=] / [x≈]

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(5) Für den Bau einer Bohrinsel wird Material in Fässer gefüllt und im Meer versenkt. Die Geschwindigkeit, mit der ein Fass absinkt, lässt sich annähernd durch folgende Funktion v beschreiben:

$$v(t) = a \cdot (1 - e^{b \cdot t}) \qquad \text{mit} \qquad a = 18\,\text{m/s} \;\text{ und }\; b = -0{,}012\,\text{s}^{-1}$$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden (s)
$v(t) \ldots$ Sinkgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s) zum Zeitpunkt t

Der von einem Fass in der Zeit t (in Sekunden) zurückgelegte Weg in Metern kann durch eine Funktion s beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von s in Abhängigkeit von t unter der Anfangsbedingung $s(0) = 0\,\text{m}$.

Stammfunktionen / Unbestimmtes Integral $\int f(x)\,dx$

1) Eingabe: Funktion f eingeben. Zum Beispiel: $f(x) := x^2$

2) CAS: Integral(f) liefert eine Stammfunktion mit Integrationskonstante c_1. $\frac{1}{3} \cdot x^3 + c_1$

3) CAS: Ergebnis anklicken und eine neue Funktion definieren. $F(x) := \frac{1}{3} \cdot x^3 + c_1$

4) Falls bestimmte Stammfunktion mit Anfangsbedingung gesucht ist: Zum Beispiel: $F(0) = 6$
CAS: Gleichung mit Anfangsbedingung lösen. x= / x≈ $c_1 = 6$

Mehr zur Berechnung von Stammfunktionen erfährst du im KH – Stammfunktionen.

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(6) Die Flugbahn des Vogels Chuck kann zu Beginn durch den Graphen der Funktion g beschrieben werden:

$$g(x) = -0{,}5 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 3 \qquad \text{mit } x \geq 0$$

$x \ldots$ horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in LE
$g(x) \ldots$ Flughöhe des Vogels über dem horizontalen Boden an der Stelle x in LE

Der Spieler löst in 3 LE horizontaler Entfernung vom Abschusspunkt durch einen Mausklick eine Spezialfunktion aus. Der Vogel bewegt sich ab diesem Punkt bis zu einer horizontalen Entfernung von 5 LE vom Abschusspunkt entlang der Tangente an den gegebenen Funktionsgraphen.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente im Punkt $P = (3 \mid g(3))$.

Tangenten

1) Eingabe: Funktion f eingeben.

2) Eingabe: Punkt am Graphen eingeben, in dem die Tangente gelegt werden soll.
Zum Beispiel: $(42, f(42))$

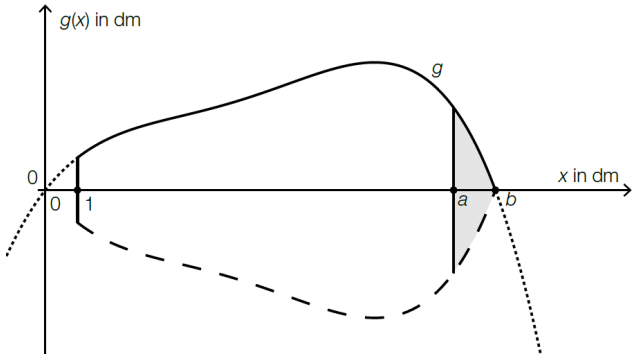
3) Tangenten-Werkzeug: Punkt und Funktion anklicken.

Mehr zur Berechnung von Tangentengleichungen erfährst du im KH – Differenzieren I.

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(7) Abrissbirnen sind kugel- oder birnenförmige Werkzeuge zum Abreißen von Gebäuden.
Durch Rotation des Graphen der Funktion g im Intervall $[1; b]$ um die x-Achse entsteht die Form einer weiteren Abrissbirne (siehe nachstehende Abbildung):

$$g(x) = -0{,}001\,57 \cdot x^4 + 0{,}036\,88 \cdot x^3 - 0{,}298\,82 \cdot x^2 + 1{,}263\,25 \cdot x$$



1) Berechnen Sie die Nullstelle b.

Nullstellen

1) Eingabe: Funktion f eingeben.

2a) Nullstellen-Werkzeug: Funktionsgraphen anklicken.

2b) Eingabe: Nullstelle(f)

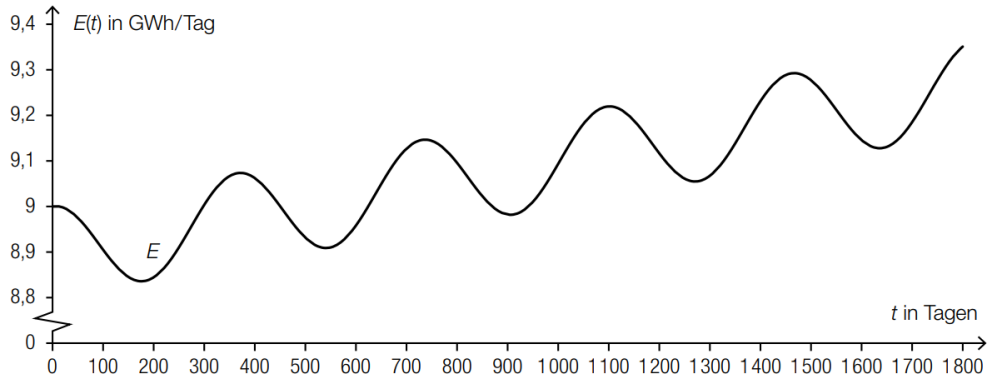
2c) CAS: $f(x) = 0$ lösen. x= / x≈

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(8) Der Energieverbrauch einer Großstadt unterliegt Schwankungen.
Mit der Funktion E wird der voraussichtliche Energieverbrauch pro Tag für die nächsten 5 Jahre modelliert:

$$E(t) = 8{,}9 + 0{,}0002 \cdot t + 0{,}1 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{365} + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{mit } t \geq 0$$

t ... Zeit in Tagen
$E(t)$ ... Energieverbrauch zur Zeit t in Gigawattstunden pro Tag (GWh/Tag)



1) Lesen Sie aus dem oben dargestellten Graphen ab, nach wie vielen Tagen der Energieverbrauch ständig über 9,1 GWh pro Tag liegen wird.

2) Berechnen Sie die Minimumstelle der Funktion E im Zeitintervall $[400; 700]$.

Lokales Minimum (Tiefpunkt) / Lokales Maximum (Hochpunkt)

1) Eingabe: Funktion f eingeben.

2a) Extremum-Werkzeug: Funktionsgraphen anklicken.

2b) Eingabe: Extremum(f)

2c) CAS: $f'(x) = 0$ lösen. x= / x≈

Mehr zur Berechnung von Extrempunkten erfährst du im KH – Differenzieren II.

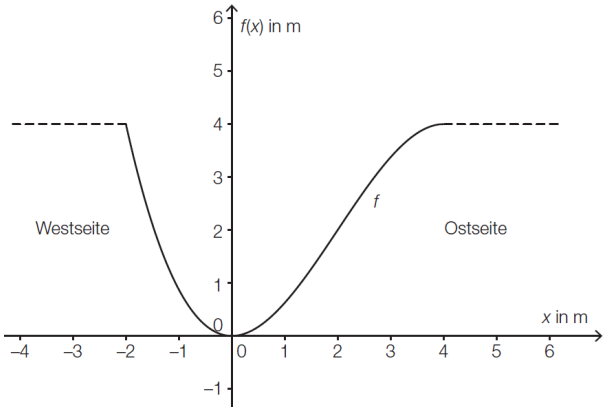
BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(9) Das Querschnittsprofil eines künstlichen Flusslaufes kann annähernd durch den Graphen der Polynomfunktion f beschrieben werden:

$$f(x) = -\frac{1}{8} \cdot x^3 + \frac{3}{4} \cdot x^2 \quad \text{mit } -2 \leq x \leq 4$$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in Metern (m)

Der Graph dieser Funktion ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.



1) Berechnen Sie diejenige Stelle, an der das Querschnittsprofil auf der Ostseite am stärksten ansteigt.

Wendepunkt bzw. Punkt mit maximaler/minimaler Steigung

1) Eingabe: Funktion f eingeben.

2a) Eingabe: Wendepunkt(f)

Wendepunkt(f) funktioniert nur bei Polynomfunktionen zuverlässig.

2b) CAS: $f''(x) = 0$ lösen. x= / x≈

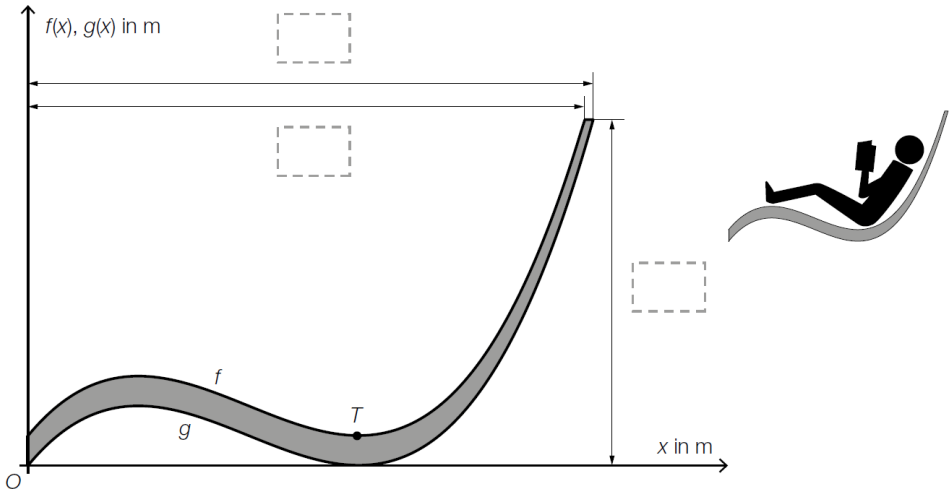
Mehr zur Berechnung von Wendepunkten erfährst du im KH – Differenzieren II.

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(10) Der Profilverlauf einer Liege kann mithilfe der Funktionen f und g näherungsweise beschrieben werden. Mit folgendem Ausdruck kann der Inhalt der in der nachstehenden Abbildung grau dargestellten Fläche berechnet werden:

$$\int_0^a (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + (b-a)\cdot c - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

1) Tragen Sie die fehlenden Beschriftungen a, b und c in der nachstehenden Abbildung in die entsprechenden Kästchen ein.



Es gilt:

$$f(x) = 1{,}033\cdot x^3 - 2{,}26\cdot x^2 + 1{,}237\cdot x + 0{,}1$$
$$g(x) = 1{,}033\cdot x^3 - 2{,}26\cdot x^2 + 1{,}237\cdot x$$

x, $f(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in m

2) Berechnen Sie die Koordinaten des Tiefpunkts T des Graphen der Funktion f.

3) Berechnen Sie den Steigungswinkel von f an der Stelle $x_0 = 1{,}6$.

Steigungswinkel / Neigungswinkel einer Funktion f an der Stelle x_0

1) Eingabe: Funktion f eingeben.

2a) CAS: $\arctan(f'(x_0))$ für Winkel in rad oder $\operatorname{arctand}(f'(x_0))$ für Winkel in °

2b) Eingabe: Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$ am Funktionsgraphen eingeben.

3b) Tangente im Punkt einzeichnen.

4b) Parallele Gerade zur x-Achse durch den Punkt einzeichnen.

5b) Winkel zwischen paralleler Gerade und Tangente einzeichnen.

Der Winkel wird gegen den Uhrzeigersinn eingezeichnet. Die Reihenfolge, in der man die Geraden auswählt, ist entscheidend.

Mehr zur Berechnung von Steigungswinkeln/Neigunswinkeln einer Funktion an einer Stelle erfährst du im KH – Differenzieren I.

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(11) Ein Kindergarten bestellt für den täglichen Bedarf Joghurt.
Für die Produktion der Joghurtbecher liegen 2 Angebote vor.
Die Gesamtkosten K_1 und K_2 werden durch folgende Funktionen beschrieben:

$$K_1(x) = 0{,}4 \cdot x + 270$$

$$K_2(x) = 0{,}001\,125 \cdot x^2 + 0{,}125 \cdot x + 200$$

$x \ldots$ Anzahl der produzierten Joghurtbecher mit $x \geq 0$
$K_1(x) \ldots$ Gesamtkosten im 1. Angebot in Euro (€) bei x produzierten Joghurtbechern
$K_2(x) \ldots$ Gesamtkosten im 2. Angebot in Euro (€) bei x produzierten Joghurtbechern

1) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der beiden Funktionsgraphen.

2) Interpretieren Sie den Schnittpunkt beider Funktionsgraphen im Bezug auf die Kosten.

Schnittpunkte zweier Funktionen f und g

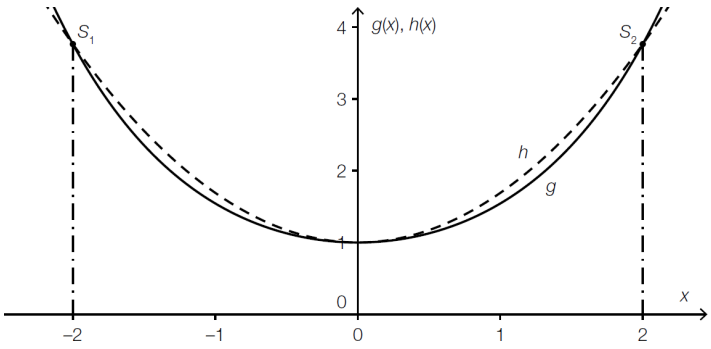
1) Eingabe: Funktionen f und g eingeben.

2a) Schneiden-Werkzeug auswählen und beide Funktionsgraphen anklicken.

2b) CAS: Gleichung $f(x) = g(x)$ lösen. x= / x≈

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(12) Der Verlauf eines zwischen zwei Punkten S_1 und S_2 durchhängenden Seils kann durch den Graphen der Funktion g mit $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ dargestellt werden. Näherungsweise kann dieser Seilverlauf durch den Graphen einer quadratischen Funktion h mit $h(x) = a \cdot x^2 + c$ dargestellt werden (siehe nachstehende Abbildung).
Die Graphen der beiden Funktionen schneiden einander in den Punkten S_1 und S_2.



1) Lesen Sie aus der nebenstehenden Abbildung den Parameter c ab.

2) Ermitteln Sie den Parameter a.

3) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Graphen von g und h im Schnittpunkt S_2.

Schnittwinkel

1) Eingabe: Funktionen f und g eingeben.

2a) Schnittwinkel = Größerer Steigungswinkel − Kleinerer Steigungswinkel → CAS

Mehr zur Berechnung des Schnittwinkels zweier Graphen in einem Schnittpunkt erfährst du im KH – Differenzieren I.

2b) Schnittpunkt S ermitteln.

3b) Im Schnittpunkt an beide Funktionsgraphen jeweils die Tangente legen.

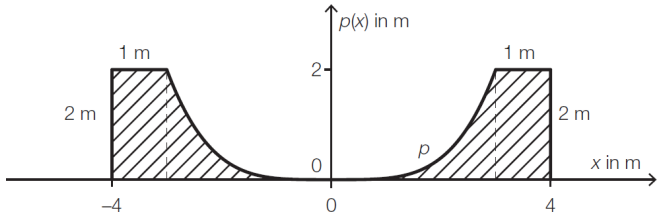
4b) Winkel zwischen den Tangenten ermitteln.

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

13 Ein Skatepark ist ein speziell für Skater/innen eingerichteter Bereich mit Startrampen und verschiedenen Hindernissen, die befahren werden können.
Für eine Halfpipe soll in einem Skatepark Material aufgeschüttet werden.
Ein Teil des Verlaufs der Halfpipe im Querschnitt lässt sich annähernd durch die Funktion p beschreiben:

$$p(x) = \frac{2}{81} \cdot x^4 \quad \text{mit } -3 \leq x \leq 3$$

$x \ldots$ horizontale Koordinate in Metern (m)
$p(x) \ldots$ Höhe an der Stelle x in m
Die nachstehende Abbildung zeigt die Querschnittsfläche der Halfpipe.



1) Ermitteln Sie den Inhalt der schraffierten Querschnittsfläche.

Bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

1) Eingabe: Funktion f eingeben.

2) Eingabe: Integral(f, a, b)

Mehr zum bestimmten Integral erfährst du im KH – Integrieren I.

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

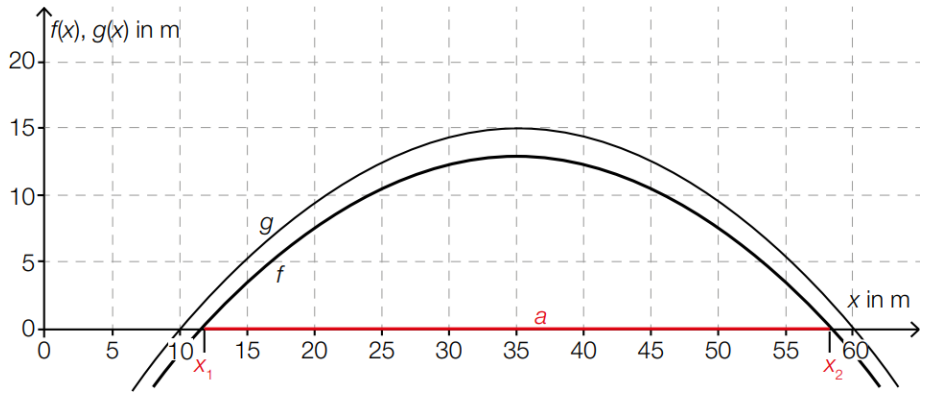
(14) Der innere Teil eines Brückenbogens kann durch die Funktion f beschrieben werden. Der äußere Teil des Brückenbogens kann durch die Funktion g beschrieben werden.

$$f(x) = -\frac{3}{125} \cdot x^2 + \frac{42}{25} \cdot x - \frac{82}{5}$$

Anmerkung: Die ursprünglichen Aufgabenstellungen sind hier zu Berechnungen abgeändert worden.

$$g(x) = f(x) + 2$$

$x, f(x), g(x) \ldots$ Koordinaten in m



1) Berechnen Sie die Spannweite a (siehe obige Grafik) des inneren Teils des Brückenbogens.

2) Berechnen Sie den höchsten Punkt des inneren Teils des Brückenbogens.

3) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen den beiden Teilen des Brückenbogens und der x-Achse.

Flächeninhalt zwischen Funktionsgraphen

1) Eingabe: Funktionen f und g eingeben.

2) Integralgrenzen A und B der oberen Funktion g ermitteln.

3) Eingabe: $F1 = \text{Integral}(g,\ A,\ B)$

4) Integralgrenzen C und D der unteren Funktion f ermitteln.

5) Eingabe: $F2 = \text{Integral}(f,\ C,\ D)$

6) CAS: $F1 - F2$

Für den Spezialfall gleicher Integralgrenzen ($A = C$ und $B = D$) gibt es den IntegralZwischen-Befehl:

Eingabe: IntegralZwischen(g, f, A, B)

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(15) Im Computerspiel Angry Birds muss man mithilfe einer Schleuder Schweine treffen. Als Wurfgeschoße stehen verschiedene Vögel zur Verfügung. Einige dieser Vögel haben besondere Funktionen, die durch einen Mausklick ausgelöst werden können. Koordinaten bzw. Abstände sind im Folgenden in Längeneinheiten (LE) angegeben. Die Flugparabel des Vogels Red bei einem Wurf kann durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden:

$$f(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 0{,}9 \cdot x + 1 \qquad \text{mit} \quad x \geq 0$$

x ... horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in Längeneinheiten (LE)
$f(x)$ ... Flughöhe des Vogels über dem horizontalen Boden an der Stelle x in LE

Red trifft kein Schwein und prallt auf den Boden auf.

1) Berechnen Sie, in welcher horizontalen Entfernung vom Abschusspunkt der Vogel auf dem Boden aufprallt.

Der Weg, den der Vogel vom Abschusspunkt bis zum Aufprall am Boden zurücklegt, entspricht der Länge der Kurve zwischen diesen Punkten.

2) Berechnen Sie den vom Vogel zurückgelegten Weg vom Abschusspunkt bis zum Aufprall am Boden.

Bogenlänge des Graphen einer Funktion f im Intervall $[a; b]$

MATHEMATIK macht FREU(N)DE

1) Eingabe: Funktion f eingeben.

2) Eingabe: Länge(f, a, b)

Mehr zur Berechnung von Bogenlängen erfährst du im KH – Integrieren III.

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(16) Katharina und Georg arbeiten als Pflegekräfte in einem Heim. Sie bekommen das gleiche monatliche Grundgehalt. Im Februar lag in diesem Heim ein besonderer Arbeitsbedarf vor. Georg leistete 14 Überstunden, Katharina leistete 46 Überstunden. Ihr jeweiliges Gesamtentgelt setzt sich aus dem Grundgehalt und der Abgeltung für die geleisteten Überstunden zusammen. Jede Überstunde wird dabei gleich abgegolten. Das Gesamtentgelt von Georg betrug im Februar 2617 €, jenes von Katharina betrug 3433 €.

1) Ermitteln Sie das Grundgehalt und die Abgeltung für eine Überstunde.

Gleichungssysteme lösen

MATHEMATIK macht FREU(N)DE

1) CAS: Gleichungen eingeben.

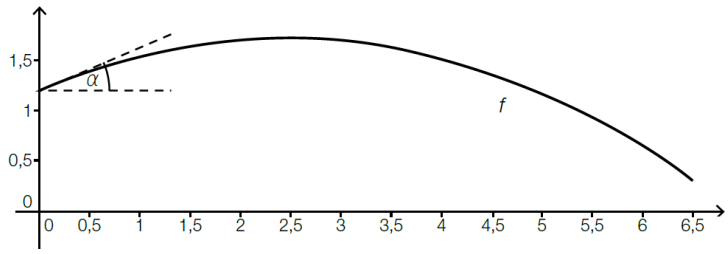
2a) CAS: Gleichungen markieren und exakt lösen. x=

Ergebnis bei Bedarf runden. ≈

2b) CAS: Gleichungen markieren und numerisch lösen. x≈

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(17) Sprungkurven beim Weitsprung lassen sich näherungsweise durch quadratische Funktionen beschreiben.
Der Körperschwerpunkt eines Weitspringers befindet sich beim Absprung in einer Höhe von 1,2 m.
Der Absprungwinkel α beträgt 23 °. Die Sprungweite beträgt 6,5 m. An der Stelle der Landung befindet sich der Körperschwerpunkt 30 cm über dem Boden.
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Funktion f dargestellt.



$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

x ... horizontale Entfernung des Körperschwerpunkts von der Absprungstelle in m
$f(x)$ ... horizontale Entfernung des Körperschwerpunkts von der Absprungstelle in m

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung des Koeffizienten a, b und c.

2) Ermitteln Sie die Koeffizienten von f.

Umgekehrte Kurvenuntersuchungen

1) CAS: Funktion mit allgemeinen Koeffizienten eingeben. Zum Beispiel: $f(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

2) CAS: Gleich viele Gleichungen wie unbekannte Koeffizienten eingeben.

3) CAS: Gleichungssystem lösen. x= / x≈

4) Koeffizienten mit Drag & Drop zur Ausgabe $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ verschieben. GeoGebra Classic 5

5) Funktionsgraphen anzeigen lassen. 7

Mehr zu umgekehrten Kurvenuntersuchungen erfährst du am TB – Umgekehrte Kurvenuntersuchungen.

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(18) Ein Thermistor oder Heißleiter ist ein Halbleiter, dessen elektrischer Widerstand R mit zunehmender Temperatur T abnimmt.

Für einen bestimmten Heißleiter wurden die nebenstehenden Werte gemessen.
Zur weiteren Auswertung wird eine Polynomfunktion 3. Grades als Ausgleichsfunktion verwendet.

T in K	R in Ω
293	510
313	290
333	178
353	120
373	80

1) Ermitteln Sie diese Ausgleichsfunktion.

Regression / Ausgleichsfunktionen

1) Tabelle: Wertepaare in 2 Spalten eingeben.

2) Alle Wertepaare markieren → Rechtsklick → Erzeugen → Liste von Punkten oder
Alle Wertepaare markieren → Werkzeug: Liste von Punkten

Abhängig von der Aufgabenstellung:

- Lineare Ausgleichsfunktion / Regressionsgerade: TrendPoly(<Liste>, 1)
- KorrelationsKoeffizient(<Liste>)
- Quadratische Ausgleichsfunktion: TrendPoly(<Liste>, 2)
- Kubische Ausgleichsfunktion: TrendPoly(<Liste>, 3)
- Exponentielle Ausgleichsfunktion: TrendExp(<Liste>) oder TrendExp2(<Liste>)
- Logarithmische Ausgleichsfunktion: TrendLog(<Liste>)

Mehr zu Ausgleichsfunktionen erfährst du am TB – Regression und am AB – Interpolation und Regression.

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(19) Die Bewegung eines Bootes wird durch folgende Differenzialgleichung beschrieben:

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -k \cdot v$$

$m \ldots$ Masse des Bootes
$v > 0 \ldots$ Geschwindigkeit des Bootes
$k > 0 \ldots$ Konstante
$t \ldots$ Zeit

1) Argumentieren Sie mathematisch anhand der Differenzialgleichung, dass die Geschwindigkeit mit zunehmender Zeit t abnimmt.

2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung.

Differentialgleichungen

1) Variablen in Differentialgleichung umbenennen (x bzw. y).
Zum Beispiel: $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 3 \cdot N + 42 \cdot t \quad \Longleftrightarrow \quad y' = 3 \cdot y + 42 \cdot x$

Abhängig von der Aufgabenstellung:

- CAS: Allgemeine Lösung mit LöseDgl(<Gleichung>) ermitteln.
  Zum Beispiel: LöseDgl($y' = 3 \cdot y + 42 \cdot x$).
- CAS: Spezielle Lösung mit LöseDgl(<Gleichung>, <Punkt>) ermitteln.
  Zum Beispiel: LöseDgl($y' = 3 \cdot y + 42 \cdot x$, $(2, 5)$) liefert die spezielle Lösung mit $y(2) = 5$.

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(20) Karl Landsteiner entwickelte das AB0-Blutgruppensystem.
Er entdeckte auch die beiden Rhesusfaktoren Rh+ und Rh–.
37 % der österreichischen Bevölkerung haben die Blutgruppe A, Rh+.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter 60 zufällig ausgewählten Personen der österreichischen Bevölkerung höchstens 15 Personen die Blutgruppe A, Rh+ haben.

2) Ermitteln Sie, wie viele zufällig ausgewählte Personen mindestens Blut spenden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens eine Person mit der Blutgruppe A, Rh+ darunter ist.

Binomialverteilung

1) Ansicht → Wahrscheinlichkeitsrechner → Binomial

2) Parameter n und p eingeben.

3) Je nach Aufgabenstellung linksseitig / zweiseitig / rechtsseitig auswählen.

4) Gesuchte Wahrscheinlichkeiten bzw. Intervallgrenzen ermitteln.

Mehr zur Binomialverteilung erfährst du im KH – Stochastik II.

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(21) Die Masse von Minigolfbällen eines bestimmten Typs ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 41\,\text{g}$ und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}1\,\text{g}$.
Wenn ein Minigolfball mehr als 41,25 g wiegt, wird er aussortiert.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Minigolfball aussortiert wird.

Normalverteilung: μ und σ gegeben

1) Ansicht → Wahrscheinlichkeitsrechner → Normal

2) Parameter μ und σ eingeben.

3) Je nach Aufgabenstellung linksseitig / zweiseitig / rechtsseitig auswählen.

4) Gesuchte Wahrscheinlichkeiten bzw. Intervallgrenzen ermitteln.

5) Wechsel zwischen Dichtefunktion und Verteilungsfunktion mit Klick auf den linken Funktionsknopf:

Mehr zur Normalverteilung erfährst du im KH – Stochastik III.

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(22) Ein für Digitalkameras relevantes Qualitätsmerkmal ist die Anzahl der Linienpaare pro Bildhöhe (LP/BH).
Für einen bestimmten Objektiv-Typ ist diese Kenngröße annähernd normalverteilt. Die Objektive werden von 3 verschiedenen Herstellern – A, B und C – jeweils mit dem Erwartungswert $\mu = 1950\,\text{LP/BH}$ und der Standardabweichung σ_A, σ_B bzw. σ_C produziert.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein neu produziertes Objektiv des Herstellers C mindestens 1900 LP/BH darstellen kann, beträgt 97,7 %.

1) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung σ_C.

Normalverteilung: μ oder σ gesucht

1) Ansicht → Wahrscheinlichkeitsrechner → Normal

2) Parameter $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ sind bereits eingegeben.

3) Mit gegebener Wahrscheinlichkeit den zugehörigen z-Wert ermitteln.

Zum Beispiel: $P(X \leq 42) = 7\,\%$, $\mu = 46$

$$P(Z \leq z) = 7\,\% \implies z = -1{,}475...$$

4) Aus $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ die gesuchte Größe ermitteln. Zum Beispiel:

$$-1{,}475... = \frac{42 - \mu}{\sigma} \implies \sigma = 2{,}710...$$

Mehr zur Normalverteilung erfährst du im KH – Stochastik III.

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(23) Auf einer Drehmaschine werden Stahlzylinder gefertigt. Die Durchmesser der Zylinder sind annähernd normalverteilt mit den Parametern $\mu = 60\,\text{mm}$ (Erwartungswert) und $\sigma = 0{,}3\,\text{mm}$ (Standardabweichung).

a) Bei einer Überprüfung wird ein Zylinder zufällig ausgewählt.

1) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit in Prozent, dass der Durchmesser dieses Zylinders innerhalb eines Bereichs von $60{,}1\,\text{mm} \pm 0{,}6\,\text{mm}$ liegt.

b) 1) Berechnen Sie jenen um den Erwartungswert symmetrisch liegenden Bereich, in dem erwartungsgemäß $90\,\%$ aller Durchmesser der Werkstücke liegen.

Normalverteilung: 2-seitiger Zufallsstreubereich für einen Einzelwert

1) Ansicht → Wahrscheinlichkeitsrechner → Normal

Allgemeine Formel: $\left[\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma;\ \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma\right]$

2) Parameter μ und σ eingeben.

3) Intervallgrenzen des Zufallsstreubereichs $[a; b]$ ermitteln.
Zum Beispiel: Symmetrischer $90\,\%$-Zufallsstreubereich um μ.

$$P(X \leq a) = 5\,\% \implies a = \ldots \qquad P(X \geq b) = 5\,\% \implies b = \ldots$$

Mehr zu Zufallsstreubereichen erfährst du am TB – Zufallsstreubereiche und Konfidenzintervalle.

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(24) In einer Fertigungsanlage werden Werkstücke erzeugt, deren Längen erfahrungsgemäß normalverteilt sind.
Die Länge eines Werkstücks ist normalverteilt mit $\mu = 72{,}3\,\text{mm}$ und $\sigma = 0{,}5\,\text{mm}$.
Im Rahmen der Qualitätssicherung werden Stichproben vom Umfang $n = 7$ entnommen.
Für jede Stichprobe wird der Mittelwert der Längen bestimmt.

1) Geben Sie die Parameter der Verteilung der Stichprobenmittelwerte $\bar{X}$ an.

2) Berechnen Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß $95\,\%$ aller Stichprobenmittelwerte liegen.

Normalverteilung: 2-seitiger Zufallsstreubereich für den Stichprobenmittelwert

1) Ansicht → Wahrscheinlichkeitsrechner → Normal

Allgemeine Formel: $\left[\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

2) Der Stichprobenmittelwert $\bar{X}$ ist normalverteilt mit Parametern $\mu_{\bar{X}} = \mu$ und $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

3) Parameter $\mu_{\bar{X}}$ für μ und $\sigma_{\bar{X}}$ für σ in Wahrscheinlichkeitsrechner eingeben.

4) Intervallgrenzen des Zufallsstreubereichs $[a; b]$ ermitteln.
Zum Beispiel: Symmetrischer 99 %-Zufallsstreubereich um μ.

$$P(X \leq a) = 0{,}5\,\% \implies a = \ldots \qquad P(X \geq b) = 0{,}5\,\% \implies b = \ldots$$

Mehr zu Zufallsstreubereichen erfährst du am TB – Zufallsstreubereiche und Konfidenzintervalle.

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(25) Eine Messstation registriert täglich zu einem bestimmten Zeitpunkt die Konzentration der von einer Fabrik emittierten Schadstoffe (in mg/m^3). Es wird angenommen, dass diese Schadstoffkonzentrationen annähernd normalverteilt sind.
Es werden Messungen an 10 Tagen vorgenommen:

Schadstoffkonzentration in mg/m³	152	166	149	153	172	147	157	164	157	168

1) Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$.

2) Ermitteln Sie das 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ, wenn bekannt ist, dass die Standardabweichung $\sigma = 8{,}5\,\text{mg/m}^3$ beträgt.

Normalverteilung: Konfidenzintervall für μ bei bekanntem σ

1) Tabelle: Messwerte eingeben ⇝ Rechtsklick ⇝ Erzeugen ⇝ Liste

2) CAS: Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ mit Mittelwert(<Liste von Rohdaten>) berechnen.

In manchen GeoGebra-Versionen: mean oder Mittel

Das gesuchte Konfidenzintervall ist symmetrisch um $\bar{x}$ und hat die gleiche Breite wie der 2-seitige Zufallsstreubereich für den Stichprobenmittelwert bei gleichem n, σ und α.

Allgemeine Formel: $\left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

3) Ansicht → Wahrscheinlichkeitsrechner → Normal

4) Parameter $\bar{x}$ für μ und $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ für σ in Wahrscheinlichkeitsrechner eingeben.

5) Intervallgrenzen des Konfidenzintervalls $[a; b]$ ermitteln.
Zum Beispiel: Symmetrisches 95 %-Konfidenzintervall für μ.

$$P(X \leq a) = 2{,}5\,\% \implies a = \ldots \qquad P(X \geq b) = 2{,}5\,\% \implies b = \ldots$$

Mehr zu Konfidenzintervallen erfährst du am TB – Zufallsstreubereiche und Konfidenzintervalle.

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(26) Ein Unternehmen stellt verschiedene Bauteile her, die einer gewissen Belastung standhalten müssen. Die Belastung, der die Bauteile standhalten, ist normalverteilt mit den Parametern μ und σ.
Das Unternehmen behauptet, dass der Erwartungswert der Belastung, der die Bauteile standhalten, $\mu = 120$ Newton (N) beträgt.
Eine Stichprobe ergab folgende Werte:

118,5 N	122 N	120,5 N	117 N	118,5 N	121 N	121,5 N	119,5 N

1) Ermitteln Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ und die Stichprobenstandardabweichung s dieser Stichprobe.

2) Überprüfen Sie mithilfe eines 95-%-Vertrauensbereichs für μ, ob die Behauptung des Unternehmens durch diese Stichprobe untermauert werden kann.

Normalverteilung: Konfidenzintervall für μ bei unbekanntem σ

Allgemeine Formel: $\left[\bar{x} - t_{f;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{f;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}\right]$ mit $f = n - 1$

1) Tabelle: Messwerte eingeben ⇝ Rechtsklick ⇝ Erzeugen ⇝ Liste

2) CAS: Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ mit Mittelwert(<Liste von Rohdaten>) berechnen.

In manchen GeoGebra-Versionen: mean oder Mittel

3) CAS: Stichprobenstandardabweichung s_{n-1} mit StichprobenStandardabweichung(<Liste von Rohdaten>) berechnen. Oder: stdev(<Liste von Rohdaten>)

4) Ansicht → Wahrscheinlichkeitsrechner → Student

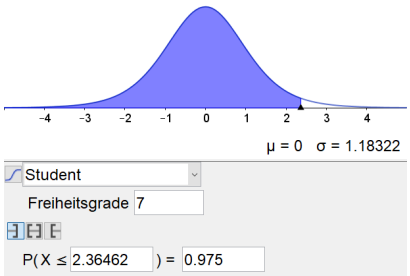
Anzahl Freiheitsgrade $f = n - 1$ einstellen.

$t_{f;1-\frac{\alpha}{2}}$ ist das $(1 - \frac{\alpha}{2})$-Quantil dieser Zufallsvariable.

Rechts wird zum Beispiel das 97,5 %-Quantil

$$t_{7;0,975} = 2{,}3646...$$

für ein 95 %-Konfidenzintervall berechnet.



5) Werte in die allgemeine Formel oben einsetzen

Mehr zu Konfidenzintervallen erfährst du am TB – Zufallsstreubereiche und Konfidenzintervalle.

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(27) Kinder erlernen normalerweise in den ersten 24 Lebensmonaten das freie Gehen.
In der nachstehenden Tabelle sind die Ergebnisse einer Befragung aufgelistet.

	Kind 1	Kind 2	Kind 3	Kind 4	Kind 5	Kind 6	Kind 7	Kind 8	Kind 9
erstes Auftreten des freien Gehens in Lebensmonaten	12	15	14	13	9	12	16	11	17

1) Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung der Daten aus der Tabelle.

2) Erstellen Sie auf Basis der Daten aus der Tabelle einen Boxplot.

3) Interpretieren Sie die Bedeutung der Quartile in diesem Zusammenhang.

Statistische Auswertungen (Liste von Einzelwerten)

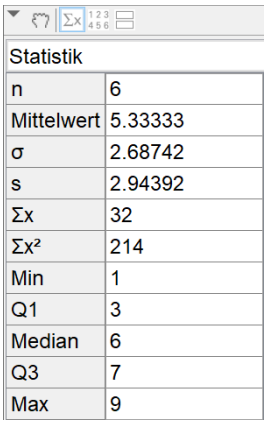
1) Tabelle: Alle Werte eingeben.

2) Tabelle: Alle Werte markieren und auswählen.
(Analyse einer Variablen)

3) Daten kontrollieren und Analyse klicken.

4) Mit Klick auf Σx (siehe rechts) werden die wichtigsten Kenngrößen angezeigt:

n	Stichprobenumfang
Mittelwert	Stichprobenmittelwert $\bar{x}$
σ	empirische Standardabweichung s einer Datenliste
s	Standardabweichung s_{n-1} der Stichprobe
Min	kleinster Wert $x_{\min}$
Q1	unteres Quartil q_1
Median	Median q_2
Q3	oberes Quartil q_3
Max	größter Wert $x_{\max}$



Statistik	
n	6
Mittelwert	5.33333
σ	2.68742
s	2.94392
Σx	32
Σx²	214
Min	1
Q1	3
Median	6
Q3	7
Max	9

Die Stichprobenstandardabweichung s_{n-1} ist die bestmögliche Schätzung für die Standardabweichung der Grundgesamtheit. Sie wird zum Beispiel bei der Berechnung von Konfidenzintervallen für μ einer normalverteilten Zufallsvariable verwendet. Wenn die Standardabweichung einer Datenliste/Stichprobe gesucht ist, dann ist damit die empirische Standardabweichung gemeint.

5) Rechts können die Daten zum Beispiel als Säulendiagramm oder Boxplot dargestellt werden.

Mehr zu statistischen Kenngrößen erfährst du im KH – Statistik I.

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(28) In einer Glaserei werden 3-eckige Fensterscheiben zugeschnitten. In der nebenstehenden Tabelle sind die Flächeninhalte einer Produktionsserie bestimmter Fensterscheiben angegeben.

1) Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung der angegebenen Flächeninhalte. Verwenden Sie dazu die Klassenmitten.

Anmerkung: Die Klassenmitte von 1,91 – 1,95 ist 1,93.

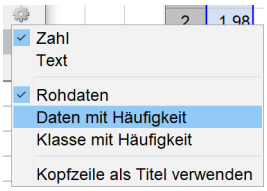
Fläche in m²	Anzahl der Scheiben
1,91 – 1,95	1
1,96 – 2,00	5
2,01 – 2,05	22
2,06 – 2,10	48
2,11 – 2,15	52
2,16 – 2,20	29
2,21 – 2,25	0
2,26 – 2,30	1

Statistische Auswertungen (Klassen mit Häufigkeiten)

1) Tabelle: In 2 Spalten alle Paare (Klassenwert, Häufigkeit) eingeben.

2) Nur die Spalte mit den Klassenwerten markieren und auswählen.

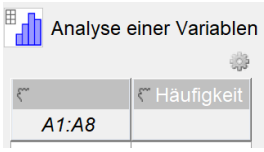
3) Im geöffneten Fenster rechts oben das Zahnrad und „Daten mit Häufigkeit“ auswählen (siehe rechts).



4) Nur die Spalte mit den Häufigkeiten markieren und auf das Handsymbol links von „Häufigkeit“ klicken (siehe rechts).

5) Daten kontrollieren und Analyse klicken.

6) Mit Klick auf Σx werden die wichtigsten Kenngrößen angezeigt.



BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(29) Die komplexe Zahl $c = 0{,}2 + 0{,}1 \cdot j$ gehört zur Mandelbrot-Menge und kann auch in Polarform angegeben werden.

1) Wandeln Sie die Zahl c in Polarform um.

2) Stellen Sie die Zahl c in der Gauß'schen Zahlenebene grafisch dar.

3) Beschreiben Sie mithilfe zweier Formeln und korrekter Beschriftung der Grafik allgemein den Zusammenhang der beiden Darstellungen.

Komplexe Zahlen

1) Eingabe: Komplexe Zahl eingeben. Zum Beispiel: Eingabe: a=4-2*i

Wenn die rechte Seite die imaginäre Einheit i enthält, erkennt GeoGebra die Eingabe als komplexe Zahl.

Die komplexe Zahl wird in der Grafik-Ansicht als Punkt in der Zahlenebene dargestellt.

Abhängig von der Aufgabenstellung:

- Umwandlung einer komplexen Zahl von Komponentenform in Polarform:
  Rechtsklick auf komplexe Zahl → Eigenschaften → Algebra → Koordinaten: Polarform
- GeoGebra kann in der Eingabezeile und im CAS mit komplexen Zahlen a und b rechnen.
  Zum Beispiel: $a + b,\ a - b,\ a * b,\ a/b,\ a^5$

  Mehr zu komplexen Zahlen erfährst du im KH – Komplexe Zahlen.
- CAS: KLöse(<Gleichung>) gibt auch Lösungen aus, die komplexen Zahlen sind.

  Zum Beispiel: 1 KLöse(x^2=-1) → {x = i, x = −i}

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(30) Die Spitze eines Roboterarms bewegt sich geradlinig vom Punkt $C = (1 \mid -2 \mid 3)$ zum Punkt $D = (5 \mid -3 \mid 2)$. Dort ändert sich die Bewegungsrichtung geringfügig und die Spitze bewegt sich geradlinig zum Punkt $E = (10 \mid -4 \mid 0)$.

1) Berechnen Sie den Winkel, um den die Bewegungsrichtung geändert wurde.

Vektorrechnung

1a) Eingabe: Vektor eingeben. Zum Beispiel: Eingabe: a=(4,2)

Wenn die Bezeichnung ein Kleinbuchstabe ist, erkennt GeoGebra die Eingabe als Vektor und nicht als Punkt.

Wenn der Vektor 3 Komponenten hat wird er automatisch als 3-dimensionaler Vektor erkannt. Zum Beispiel: $a = (4, 2, -5)$

2a) Der Vektor wird in der Grafik-Ansicht als Vektor ausgehend von $(0 \mid 0)$ dargestellt.

1b) Punkte A und B eingeben.

2b) Eingabe: Vektor(<Anfangspunkt>, <Endpunkt>) oder Vektor-Werkzeug

Abhängig von der Aufgabenstellung:

- GeoGebra kann in der Eingabezeile und im CAS mit Punkten und Vektoren rechnen.
  Zum Beispiel: $a + b,\ a - b,\ 4 * a,\ A + a$
- Länge (<Vektor>)
- Einheitsvektor(<Vektor>)
- Winkel(<Vektor>, <Vektor>)
- Skalarprodukt(<Vektor>, <Vektor>) oder $a * b$
- Kreuzprodukt(<Vektor>, <Vektor>)

Mehr zur Vektorrechnung erfährst du im KH – Vektorrechnung I und im KH – Vektorrechnung II.

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

(31) Eine Motoryacht bewegt sich vom Punkt $P_1 = (0 \mid -2)$ aus in die Richtung, die durch den Vektor $\vec{v_1} = \binom{-4}{3}$ gegeben ist. Ein Fischerboot befindet sich im Punkt $P_2 = (1 \mid 2)$ und fährt in die Richtung, die durch den Vektor $\vec{v_2} = \binom{-6}{-5}$ gegeben ist.

1) Stellen Sie die Kurse der beiden Boote grafisch dar.

2) Berechnen Sie jenen Punkt S im Koordinatensystem, in dem die beiden Kurse einander kreuzen.

Parameterdarstellung von Geraden

1) Eingabe: Gerade in Parameterdarstellung mit $(0, -2) + t * (-4, 3)$ eingeben.

Nenne den Parameter jedenfalls t, damit GeoGebra die Parameterdarstellung erkennt.

Bei Bedarf kann mit Rechtsklick auf die Gerade die Gleichung auf $y = k \cdot x + d$ oder $a \cdot x + b \cdot y = c$ umgeformt werden.

2) Eingabe: Gerade in Parameterdarstellung mit $(1, 2) + t * (-6, -5)$ eingeben.

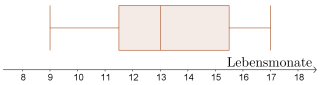
3) Schneiden-Werkzeug auswählen und beide Geraden anklicken.

Mehr zur Parameterdarstellung erfährst du am AB – Parameterdarstellung von Geraden in der Ebene

---

(27) **1)** Arithmetisches Mittel: 13,22... Monate Standardabweichung: 2,39... Monate

2)

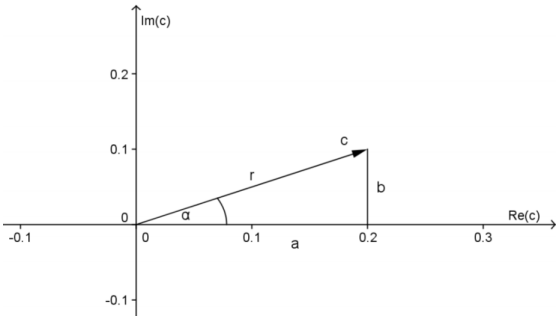


Das Ergebnis von GeoGebra ($q_1 = 11{,}5$, $q_3 = 15{,}5$) wird als richtig gewertet.
Eigentlich sind $q_1 = 12$ und $q_3 = 15$ richtige Quartile (siehe KH – Statistik I).

3) Jedes der folgenden 4 Intervalle enthält von mindestens 25 % der beobachteten Kinder den Zeitpunkt des ersten Auftretens freien Gehens in Lebensmonaten: $[9; 12]$, $[12; 13]$, $[13; 15]$, $[15; 17]$

(28) Arithmetisches Mittel: $2{,}105\,\mathrm{m}^2$ Standardabweichung: $0{,}055\,61...\,\mathrm{m}^2$

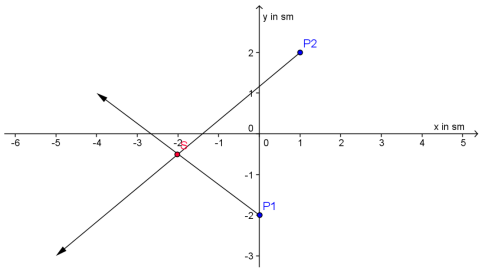
(29) **1)** $c = (0{,}223...; 26{,}56...\,°)$ **2)**



3) $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$

(30) 8,20...°

(31)



$S = (-2 \mid -0{,}5)$

Dieses Werk von Mathematik macht Freu(n)de unterliegt einer CC BY-NC-ND 4.0 Lizenz.
http://mmf.univie.ac.at

1 **1)** 2 m **2)** 17,31... m

2 $x = \dfrac{H \cdot \sin(\gamma)}{1 + \sin(\gamma)}$

3 1005,5... hPa

4 $f(t) = 257{,}89... \cdot e^{0{,}998\,52...\cdot t}$

5 $s(t) = 18 \cdot t + 1500 \cdot e^{-0{,}012 \cdot t} - 1500$

6 $y = 2 \cdot x + 7{,}5$

7 $b = 14{,}0...$ dm

8 **1)** Nach ca. 1330 Tagen Toleranzbereich $[1300; 1350]$ **2)** $t = 540{,}7...$ Tage

9 $x = 2$

10 **1)** b, a, c (von oben nach unten) **2)** $T \approx (1{,}09 \mid 0{,}10)$ **3)** 62,71...°

11 $S = (400 \mid 430)$
Bei 400 produzierten Joghurtbechern sind die Gesamtkosten bei beiden Angeboten gleich groß, und zwar 430 €.

12 **1)** $c = 1$ **2)** $a = 0{,}690...$ **3)** $\alpha = 4{,}5°$

13 6,4 m^2

14 **1)** 46,54... m **2)** (35 m | 13 m) **3)** 96,58... m^2

15 **1)** Aufprall bei $x = 10$ LE **2)** Zurückgelegter Weg: 11,51... LE

16 Das Grundgehalt beträgt 2260 €, die Abgeltung für eine Überstunde 25,50 €.

17 **1)** $f(0) = 1{,}2$, $f'(0) = \tan(23°)$, $f(6{,}5) = 0{,}3$ **2)** $a = -0{,}0866...$, $b = 0{,}4244...$, $c = 1{,}2$

18 $P(T) = -9{,}073... \cdot 10^{\check{}4} \cdot T^3 + 0{,}9780... \cdot T^2 - 353{,}2... \cdot T + 4{,}286... \cdot 10^4$

19 **1)** $v'(t) = -\frac{k}{m} \cdot v(t) < 0$, also nimmt die Geschwindigkeit ab. **2)** $v(t) = c \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$

20 **1)** 3,39... % **2)** mindestens 7 Personen

21 0,620...%

22 **1)** $\sigma_C = 25{,}0...$ LP/BH

23 **a)** 94,23...% **b)** [59,50... mm; 60,49... mm]

24 **1)** $\mu_{\bar{x}} = 72{,}3$ mm $\sigma_{\bar{X}} = 0{,}188...$ mm **2)** [71,92... mm; 72,67... mm]

25 **1)** $\bar{x} = 158{,}5$ mg/m^3 **2)** [153,2... mg/m^3; 163,7... mg/m^3]

26 **1)** $\bar{x} = 119{,}8...$ N $s = 1{,}7307...$ N

2) 95-%-Vertrauensbereich für μ: $[118{,}3...\text{ N}; 121{,}2...\text{ N}] \implies$ Der behauptete Erwartungswert $\mu = 120$ N ist enthalten.
Die Behauptung des Unternehmens, dass $\mu = 120$ N ist, wird daher durch diese Stichprobe untermauert.