

# Parameterdarstellung von Kurven

## Grundlagen – Beispiele – Aufgaben

Gerhard Pillwein

Um ebene Kurven mit kartesischen Koordinaten zu beschreiben, können **Gleichungen** verwendet werden. So beschreibt die Gleichung  $x^2 + y^2 = 9$  einen Kreis, die Gleichung  $x \cdot y = 5$  eine Hyperbel und die Gleichung  $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)$  eine Kurve, die als Lemniskate von Bernoulli bekannt ist. Das Arbeiten mit Gleichungen kann selbst bei „einfacher Lage“ der Kurven im Koordinatensystem mühsam sein. Schon das Berechnen einzelner Punkte kann zu Gleichungen führen, die nur näherungsweise lösbar sind. Darstellungen in der Form  $y = f(x)$  oder  $x = g(y)$  wären wünschenswert, sind aber meistens nur lokal möglich, und die (lokale) Auflösung einer Gleichung  $F(x,y) = 0$  nach  $y$  oder  $x$  kann selbst die beste CAS-Software überfordern.

Bei Raumkurven ist alles noch viel komplizierter. Durch eine Gleichung wird keine Kurve, sondern eine Fläche erfasst. So beschreibt etwa die Gleichung  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  die Oberfläche der Einheitskugel. Die Gleichung  $x \cdot y = z$  beschreibt ein hyperbolisches Paraboloid; die Höhenschichtlinien dieser sattelförmigen Fläche sind Hyperbeln. Um Raumkurven mit Gleichungen zu erfassen, benötigt man zwei Gleichungen; die Raumkurve ist dann die Schnittkurve der beiden Flächen. Diese Beschreibung von Kurven ist in ihrer Schwerfälligkeit geradezu unbrauchbar.

Wesentlich einfacher und flexibler sind **Parameterdarstellungen**. Sie sind für ebene Kurven und für Raumkurven in gleicher Weise möglich. Hier werden die Koordinaten der Kurvenpunkte in Abhängigkeit von einer Hilfsvariablen, dem Parameter, angegeben. Dies ermöglicht eine einfache Berechnung der Kurvenpunkte.

Wenn auch der derzeit gültige AHS-Lehrplan für die 7. Klasse Parameterdarstellungen vorsieht, sind sie den meisten Schüler/innen nur im Zusammenhang mit der Darstellung von Geraden bekannt. Das Skriptum richtet sich vor allem an Studierende des **Lehramts Mathematik**. Es soll elementar und anschaulich in die Theorie einführen, aufbauend auf den Kenntnissen aus der Schulzeit.

Zunächst werden die **Grundlagen** entwickelt. Der mathematische Formalismus wird dabei gering gehalten, im Sinne von „so verständlich wie möglich, so exakt wie unbedingt nötig“. Beim Entwickeln von Begriffen und Herleiten von Formeln hat jedenfalls die geometrische Intuition stets Vorrang vor mathematischer Strenge. Im Abschnitt **Beispiele** werden Parametrisierungen konkreter Kurven im  $\mathbf{R}^2$  und im  $\mathbf{R}^3$  angegeben. Im letzten Abschnitt **Aufgaben** wird vielfältiges Übungsmaterial angeboten, mit einer Bandbreite von ganz leicht bis recht schwierig. Kenntnisse aus der Infinitesimalrechnung und der Vektorrechnung werden vorausgesetzt.

### Grundlagen 2

Kurven im  $\mathbf{R}^2$  und  $\mathbf{R}^3$  2  
Lineare und quadratische  
Parameterdarstellungen 3  
Entwerfen und Verlagern 4  
Tangenten 5  
Schmiegeebenen 6  
Bogenlänge 7  
Parallelkurven im  $\mathbf{R}^2$  8  
Krümmung im  $\mathbf{R}^2$  9  
Krümmung im  $\mathbf{R}^3$  11  
Krümmungskreise 12  
Geschwindigkeit und  
Beschleunigung 13

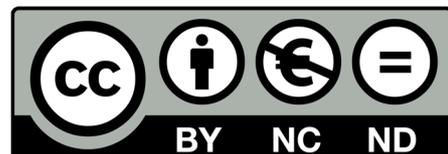
### Beispiele 15

Ellipsen und Hyperbeln 15  
Wurfparabeln 16  
Rollkurven 17  
Schraublinien usw. 20  
Rotoiden 22  
Spirallinien 24  
Bezierkurven 25

### Aufgaben 27

**Lösungen und Hinweise** 39

Dieses Skriptum wird unter einer Creative Commons BY-NC-ND 4.0 Lizenz bereitgestellt. Die Inhalte stehen kostenfrei zur Verfügung und dürfen für nicht-kommerzielle Zwecke (wie etwa Lehre, Übungen, Prüfungen) verwendet werden.



15. 2. 2022

# Grundlagen

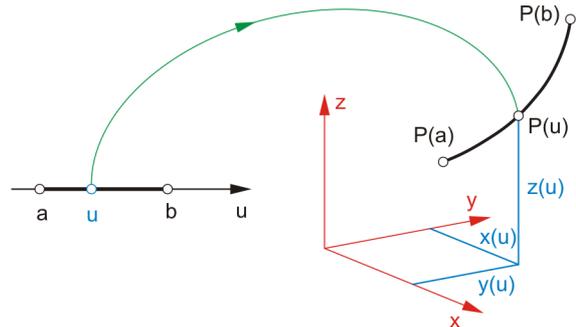
Unter einer **Kurve** kann man sich ein „eindimensionales“ Objekt in der Ebene ( $\mathbf{R}^2$ ) oder im Raum ( $\mathbf{R}^3$ ) vorstellen. Kurven müssen nicht gekrümmt sein; auch eine Gerade ist in diesem Sinn eine Kurve. Sie können auch stückweise zusammengesetzt sein (Polylinien) und Knickstellen haben.

## Kurven im $\mathbf{R}^2$ und $\mathbf{R}^3$

Zur mathematischen Beschreibung von Kurven werden **Parameterdarstellungen** verwendet. Dies geschieht im  $\mathbf{R}^2$  und im  $\mathbf{R}^3$  einheitlich. Der Unterschied liegt nur in der Anzahl der Koordinatenfunktionen.

Das Bild zeigt die Situation für eine Kurve im  $\mathbf{R}^3$ . Der **Parameter**  $u$  ist ein Wert auf der Zahlengeraden in einem Intervall  $[a, b]$ . Der Kurvenpunkt  $P = P(u)$  wird in Abhängigkeit von  $u$  berechnet, genauer gesagt: seine Koordinaten werden mit Hilfe von drei **Koordinatenfunktionen**  $x = x(u)$ ,  $y = y(u)$ ,  $z = z(u)$  berechnet.

$$P = P(u) = (x(u) / y(u) / z(u)) ; a \leq u \leq b$$



Dadurch wird auch ein Laufsinn auf der Kurve induziert: Lläuft  $u$  von  $a$  nach  $b$ , so läuft  $P(u)$  von  $P(a)$  nach  $P(b)$ .

Die Koordinatenfunktionen können auch stückweise definiert sein: das Parameterintervall  $[a, b]$  wird unterteilt, und die einzelnen Kurvenbögen werden „eckig“ oder „glatt“ aneinandergefügt. Solche Kurven sind vor allem im CAD wichtig (Splines, siehe Seite 25). Im Folgenden werden hingegen nur Koordinatenfunktionen verwendet, die im Parameterintervall  $[a, b]$  „durchgehend“ (nicht stückweise) definiert sind. Sie sollen außerdem (mindestens) zweimal stetig differenzierbar sein.

Der Parameter  $u$  ist also eine Hilfsvariable zum Berechnen von Kurvenpunkten. Er kann abstrakt gesehen werden, ohne konkret vorstellbaren Bezug zur Kurve. Beliebig vorgegebene Koordinatenfunktionen ergeben irgendwelche Kurven; sinnvoll ist diese Erzeugung von Kurven aber nicht.

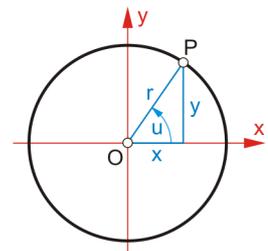
Um eine konkrete Kurve zu parametrisieren, sind an die Kurve angepasste Parameter erforderlich, die etwa geometrisch oder physikalisch motiviert sein können (siehe Abschnitt **Beispiele**). Zunächst soll der Kreis als einfaches Beispiel ausreichen.

Legt man einen Kreis in die  $xy$ -Ebene [Mittelpunkt  $O$ , Radius  $r$ ], so drängt sich der Winkel  $u$  als Parameter geradezu auf:

$$x(u) = r \cdot \cos u , y(u) = r \cdot \sin u ; 0 \leq u \leq 2\pi$$

Auch die Parametrisierung des rechten Halbkreises mit der  $y$ -Koordinate von  $P$  als Parameter ist naheliegend:

$$x(v) = \sqrt{r^2 - v^2} , y(v) = v ; -r \leq v \leq r$$



Erst auf den zweiten Blick ist zu erkennen, dass der Kreis auch durch die rationale Parameterdarstellung

$$x(w) = r \cdot \frac{1 - w^2}{1 + w^2} , y(w) = r \cdot \frac{2w}{1 + w^2} ; -\infty < w < \infty$$

beschrieben werden kann, dass also  $x^2 + y^2 = r^2$  gilt. Diese Parametrisierung entsteht, wenn man den Parameter  $u$  durch den Parameter  $w$  mit Hilfe der Funktion  $u = 2 \cdot \arctan w$  ersetzt. Die Herleitung erfordert geschickte trigonometrische Umformungen.

Allgemein kann eine Parameterdarstellung  $P = P(u)$  durch einen **Parameterwechsel**  $u = u(w)$  in eine neue Parameterdarstellung  $P = P(u(w)) = P(w)$  derselben Kurve übergeführt werden. Wenn die Funktion  $u = u(w)$  monoton wachsend ist, dann bleibt der Laufsinn der Kurve erhalten, und es kann durch die Umparametrisierung zu keinem unerwünschten „Rücklauf“ des Punktes  $P$  auf der Kurve kommen.

## Lineare und quadratische Parameterdarstellungen

Wenn man nach den „einfachsten“ Parameterdarstellungen fragt, so kann man analog zu den Funktionen  $y = f(x)$  vorgehen: Der Graph der linearen Funktion  $f(x) = a + b \cdot x$  ist stets eine Gerade, für die quadratische Funktion  $f(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2$  ergibt sich stets eine Parabel. Dies gibt Anlass, die folgenden Parameterdarstellungen zu untersuchen, bei denen  $A$  ein beliebiger Punkt und  $\mathbf{b}$  bzw.  $\mathbf{c}$  beliebige Vektoren sind:

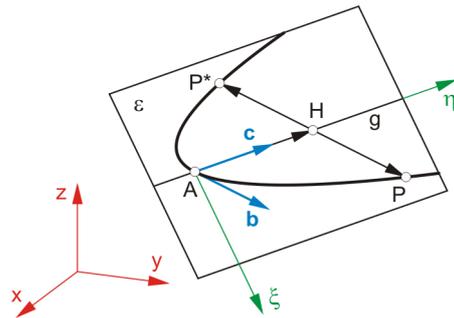
$$P(u) = A + u \cdot \mathbf{b}$$

$$P(u) = A + u \cdot \mathbf{b} + u^2 \cdot \mathbf{c}$$

Die **lineare** Parameterdarstellung beschreibt eine Gerade durch den Punkt  $A$  mit dem Richtungsvektor  $\mathbf{b}$ .

Die **quadratische** Parameterdarstellung beschreibt eine Kurve in der durch den Punkt  $A$  gehenden und von den Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  aufgespannten Ebene  $\varepsilon [A, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ . (Falls  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  kollinear sind, liegt eine Gerade vor.)

Die Kurve enthält den Punkt  $A$  ( $u=0$ ). Um von  $A$  nach  $P$  zu gelangen, kann man an  $A$  das  $u^2$ -fache des Vektors  $\mathbf{c}$  anhängen (Punkt  $H$ ) und dann an  $H$  das  $u$ -fache des Vektors  $\mathbf{b}$ . Ersetzt man  $u$  durch  $-u$ , so erhält man den Punkt  $P^*$ , der zu  $P$  symmetrisch liegt bezüglich der Geraden  $g [A, \mathbf{c}]$  (schiefe Symmetrie). Mit wachsendem  $u$  wird der Abstand von  $P$  und  $P^*$  proportional größer. Die Vermutung, dass die Kurve eine Parabel ist, liegt nahe.



Zum Beweis kann man die Kurve im lokalen kartesischen Koordinatensystem  $A\xi\eta$  in der Ebene  $\varepsilon$  beschreiben:

$$P(u) = u^2 \cdot \mathbf{c} + u \cdot \mathbf{b} = u^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \xi = b_1 \cdot u, \quad \eta = c \cdot u^2 + b_2 \cdot u$$

Eliminieren des Parameters  $u$  liefert die folgende Gleichung der Kurve:

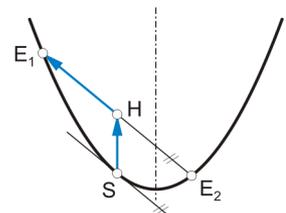
$$\eta = \alpha \cdot \xi^2 + \beta \cdot \xi \quad \text{mit} \quad \alpha = c / b_1^2, \quad \beta = b_2 / b_1$$

Die Kurve ist also der Graph einer quadratischen Polynomfunktion und daher eine Parabel. Die Achse der Parabel ist parallel zur  $\eta$ -Achse, also parallel zu  $g [A, \mathbf{c}]$ .

Quadratische Koordinatenfunktionen legen also eine Parabel fest. Umgekehrt lässt sich auch jede Parabel wie oben parametrisieren (auf unendlich viele Arten):

Eine Parabel kann durch drei Punkte eindeutig festgelegt werden. Die ersten beiden Punkte  $E_1, E_2$  sind beliebige Punkte der Parabel. Der dritte Punkt  $S$  ist der **Schulterpunkt** des  $E_1$  und  $E_2$  verbindenden Bogens; die Tangente in  $S$  ist parallel zur Sehne  $E_1E_2$ . Nun berechnet man den Halbierungspunkt  $H$  von  $E_1E_2$  und wählt  $A = S$ ,  $\mathbf{b} = \overline{HE_1}$  und  $\mathbf{c} = \overline{SH}$ :

$$P(u) = S + u \cdot \overline{HE_1} + u^2 \cdot \overline{SH}$$



Die Punkte  $E_1, E_2$  und  $S$  entsprechen den Parameterwerten  $1, -1$  und  $0$ .

Legt man die Parabel etwa durch die Punkte  $E_1(4/0/0)$ ,  $E_2(0/6/0)$  und den Schulterpunkt  $S(0/0/5)$  fest, so ist  $H(2/3/0)$ . Als Parameterdarstellung ergibt sich:

$$P(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + u^2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$x(u) = 2u + 2u^2, \quad y(u) = -3u + 3u^2, \quad z(u) = 5 - 5u^2$$

## Entwerfen und Verlagern

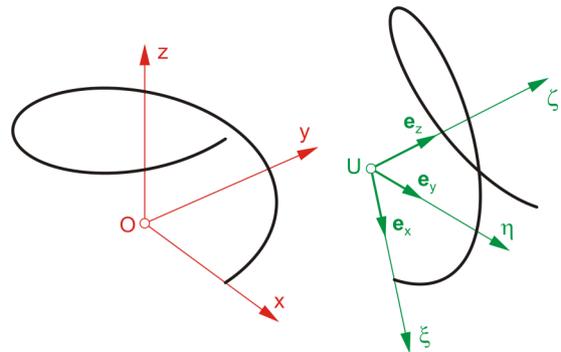
Um eine geometrisch definierte Kurve – wie etwa einen Kreis oder eine Schraublinie – in einer gewünschten räumlichen Lage zu parametrisieren, kann man wie folgt vorgehen:

- Ein lokales Koordinatensystem  $U\xi\eta\zeta$  wird mit der Kurve verknüpft, festgelegt durch den Ursprung  $U$  und drei paarweise orthogonale Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$ .
- Die Kurve wird zuerst in einfacher Lage im zentralen Koordinatensystem  $Oxyz$  parametrisiert:

$$x = \xi(u) \quad , \quad y = \eta(u) \quad , \quad z = \zeta(u)$$

- Diese Parameterdarstellung wird in das lokale Koordinatensystem übertragen:

$$P(u) = U + \xi(u) \cdot \mathbf{e}_x + \eta(u) \cdot \mathbf{e}_y + \zeta(u) \cdot \mathbf{e}_z$$



Damit diese Verlagerung gleichsinnig-kongruent ist, müssen die Vektoren  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$  ein Rechtssystem bilden (wie die orientierten Achsen von  $Oxyz$ ).

Ein Beispiel soll das verdeutlichen: Gesucht ist eine Parameterdarstellung des Kreises, der durch Rotation des Punktes  $A(-3/8/12)$  um die Achse  $a [R(-10/1/13), S(0/-4/3)]$  entsteht. Als Parameter soll der von  $A$  aus gemessene Drehwinkel  $u$  verwendet werden.

Der Mittelpunkt  $M$  des Kreises ist der Fußpunkt der Normalen von  $A$  auf  $a$ :  $M(-8/0/11)$ . Er ist der Ursprung  $U$ . Als Basisvektoren  $\mathbf{e}_x$  und  $\mathbf{e}_z$  werden die Einheitsvektoren von  $\overline{MA} = (5/8/1)$  und  $\overline{RS} = (10/-5/-10)$  verwendet. Der Basisvektor  $\mathbf{e}_y$  ist der Einheitsvektor des Kreuzprodukts  $\overline{RS} \times \overline{MA} = (75/-60/105)$ . Die Vektoren  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$  bilden ein Rechtssystem; bei Blick von  $S$  in Richtung  $R$  geht  $\mathbf{e}_x$  durch Drehen um  $+90^\circ$  in  $\mathbf{e}_y$  über.

Die Parametrisierung des Kreises ( $r = 3 \cdot \sqrt{10}$ ) im zentralen Koordinatensystem  $Oxyz$  lautet:

$$\xi(u) = r \cdot \cos u \quad , \quad \eta(u) = r \cdot \sin u \quad , \quad \zeta(u) = 0$$

Sie wird nun in das lokale Koordinatensystem  $U\xi\eta\zeta$  übertragen:

$$P(u) = M + r \cdot \cos u \cdot \mathbf{e}_x + r \cdot \sin u \cdot \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + \cos u \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin u \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$x(u) = -8 + 5 \cdot \cos u + 5 \cdot \sin u \quad , \quad y(u) = 8 \cdot \cos u - 4 \cdot \sin u \quad , \quad z(u) = 11 + \cos u + 7 \cdot \sin u$$

Ein lokales Koordinatensystem (LKS) mit einer besonderen räumlichen Lage kann – ausgehend von einem beliebigen Vektor  $\mathbf{n}$  und dem Einheitsvektor  $\mathbf{z} = (0/0/1)$  – konstruiert werden, indem man zuerst die beiden Vektoren  $\mathbf{w}$  und  $\mathbf{f}$  berechnet:

$$\mathbf{w} = \mathbf{z} \times \mathbf{n} \quad , \quad \mathbf{f} = \mathbf{n} \times \mathbf{w}$$

Der Vektor  $\mathbf{w}$  ist orthogonal zu  $\mathbf{n}$  und zur  $z$ -Achse, also ein waagrechter Normalvektor von  $\mathbf{n}$ . Er gibt die Richtung der Höhenschichtlinien der Normalebene  $\varepsilon$  von  $\mathbf{n}$  durch den Ursprung  $U$  des LKS an. Der Vektor  $\mathbf{f}$  gibt die Richtung der Falllinien von  $\varepsilon$  an. Die Vektoren  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{f}$  bilden ein Rechtssystem. Normiert man diese Vektoren, so ist dieses besondere LKS festgelegt.

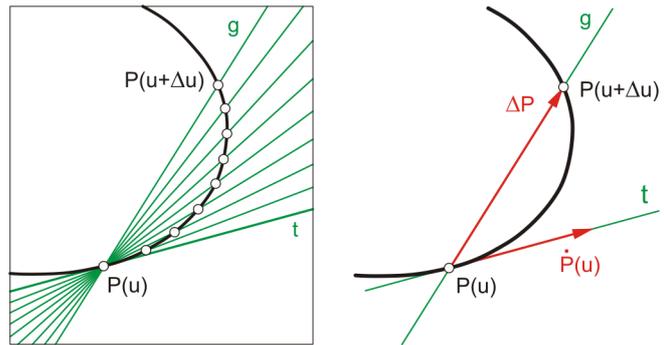
Ausgehend von einem LKS  $[U, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$  kann man weitere LKS durch Drehen um eine Koordinatenachse herstellen. Möchte man etwa das LKS um  $\mathbf{e}_z$  drehen (Drehwinkel  $\delta$ ), so gilt für die neuen Basisvektoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x^* &= \cos \delta \cdot \mathbf{e}_x + \sin \delta \cdot \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_y^* &= -\sin \delta \cdot \mathbf{e}_x + \cos \delta \cdot \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

## Tangenten

Mit Hilfe der Differentialrechnung kann man Tangenten von parametrisierten Kurven berechnen: Man verbindet die Punkte  $P(u)$  und  $P(u+\Delta u)$  mit einer Geraden  $g$  und lässt  $\Delta u$  gegen 0 streben, also  $P(u+\Delta u)$  gegen  $P(u)$ . Die Grenzlage der Sekante  $g$  ist die **Tangente**  $t$  im Punkt  $P$ .

Diese Vorgangsweise ist unabhängig von der Dimension.



Zur rechnerischen Umsetzung dieser Definition ist zu beachten, dass der Vektor  $\Delta P = P(u+\Delta u) - P(u)$  die Richtung von  $g$  angibt und dass die Richtung dieses Vektors bei Division durch  $\Delta u$  erhalten bleibt.

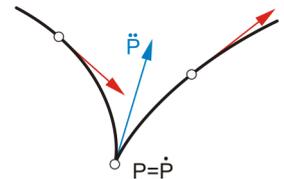
$$\frac{\Delta P}{\Delta u} = \left( \frac{x(u+\Delta u) - x(u)}{\Delta u}, \frac{y(u+\Delta u) - y(u)}{\Delta u}, \frac{z(u+\Delta u) - z(u)}{\Delta u} \right)$$

Die Koordinaten dieses Richtungsvektors von  $g$  sind die Differenzenquotienten der Koordinatenfunktionen. Wenn alle Koordinatenfunktionen an der Stelle  $u$  differenzierbar sind, so kann ein Richtungsvektor von  $t$  durch Differenzieren berechnet werden (Ableitung durch Punkt gekennzeichnet):

$$\dot{P}(u) = (\dot{x}(u) / \dot{y}(u) / \dot{z}(u))$$

Der Vektor  $\dot{P}$  ist der **Tangentenvektor** der parametrisierten Kurve im Punkt  $P$ . Seine Orientierung entspricht dem Laufsinn der Kurve. Seine Länge wird auf Seite 7 interpretiert.

Es kann sein, dass der Tangentenvektor  $\dot{P}$  beim Durchgang durch  $P$  zum Nullvektor wird; die Skizze zeigt ein Beispiel. Der Punkt  $P$  wird als **singulärer Punkt** der parametrisierten Kurve bezeichnet. Man kann zeigen, dass die Tangente in  $P$  durch den zweiten Ableitungsvektor  $\ddot{P}$  festgelegt wird (wenn er vom Nullvektor verschieden ist, sonst durch  $\ddot{\ddot{P}}$  usw.).



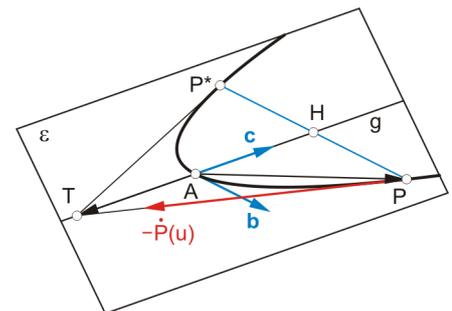
Für die Parameterdarstellung der Parabel (siehe Seite 3) gilt:

$$P(u) = A + u \cdot \mathbf{b} + u^2 \cdot \mathbf{c} \Rightarrow \dot{P}(u) = \mathbf{b} + 2u \cdot \mathbf{c}$$

Für den Schnittpunkt  $T$  der Tangente in  $P$  mit der Geraden  $g$  gilt:

$$\begin{aligned} \overline{AT} &= \overline{AP} + \lambda \cdot (-\dot{P}) = u \cdot \mathbf{b} + u^2 \cdot \mathbf{c} + \lambda \cdot (-\mathbf{b} - 2u \cdot \mathbf{c}) = \\ (u - \lambda) \cdot \mathbf{b} + (u^2 - \lambda \cdot 2u) \cdot \mathbf{c} &\Rightarrow \lambda = u, \quad \overline{AT} = -u^2 \cdot \mathbf{c} \end{aligned}$$

Wegen  $\overline{AH} = u^2 \cdot \mathbf{c}$  halbiert  $A$  die Strecke  $HT$ .



Führt man für eine parametrisierte Kurve  $P(u)$  einen Parameterwechsel  $u = u(w)$  durch und differenziert die neuen Koordinatenfunktionen nach dem Parameter  $w$  (Ableitung nach  $w$  durch Strich gekennzeichnet), so ergibt sich aufgrund der Kettenregel:

$$x'(w) = \frac{dx}{dw} = \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dw} = \dot{x}(u) \cdot u'(w), \quad y' = \dot{y} \cdot u', \quad z' = \dot{z} \cdot u' \Rightarrow P'(w) = \dot{P}(u) \cdot u'(w)$$

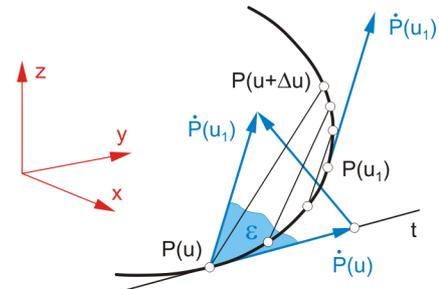
Wenn die Funktion  $u = u(w)$  monoton wachsend ist (also  $u' \geq 0$ ), so ändert sich nur die Länge des Tangentenvektors, nicht aber seine Orientierung. Wenn die Ableitung  $u'(w_0)$  an einer Stelle  $w_0$  gleich 0 ist, so ist der neue Tangentenvektor  $P'(w_0)$  der Nullvektor. Die neu parametrisierte Kurve hat dann im Punkt  $P(w_0)$  einen singulären Punkt.

## Schmiegeebenen

Eine Ebene  $\varepsilon$ , die durch die Tangente  $t$  einer Kurve in einem Kurvenpunkt  $P$  geht, kann als Tangentialebene der Kurve in  $P$  bezeichnet werden. Da es unendlich viele durch  $t$  gehende Tangentialebenen gibt, ist die Suche nach der sich bestmöglich an die Kurve anschmiegenden Tangentialebene sinnvoll. In Analogie zur Ermittlung der Tangente in  $P(u)$  als Grenzlage der Verbindungsgeraden von  $P(u)$  mit  $P(u+\Delta u)$  für  $\Delta u \rightarrow 0$  ermittelt man die Grenzlage jener Tangentialebene  $\varepsilon$ , welche die Tangente  $t$  in  $P(u)$  mit  $P(u+\Delta u)$  verbindet. Diese Grenzlage  $\sigma$  wird als **Schmiegeebene** der Kurve im Punkt  $P$  bezeichnet.

Verschiebt man  $\varepsilon$  kontinuierlich nach oben (oder unten), so rücken die Schnittpunkte von  $\varepsilon$  mit der Kurve immer näher zusammen, bis ein Punkt  $P(u_1)$  erreicht wird, in dem die Tangente parallel zu  $\varepsilon$  ist. Der Tangentenvektor in  $P(u_1)$  kann also in die Ebene  $\varepsilon$  verschoben werden. Daher liegt auch der folgende Vektor in  $\varepsilon$ :

$$\frac{\dot{P}(u_1) - \dot{P}(u)}{u_1 - u} = \left( \frac{\dot{x}(u_1) - \dot{x}(u)}{u_1 - u}, \frac{\dot{y}(u_1) - \dot{y}(u)}{u_1 - u}, \frac{\dot{z}(u_1) - \dot{z}(u)}{u_1 - u} \right)$$



Für  $\Delta u \rightarrow 0$  strebt  $u_1 \rightarrow u$ ; daher geht dieser Vektor in den zweiten Ableitungsvektor von  $P(u)$  über:

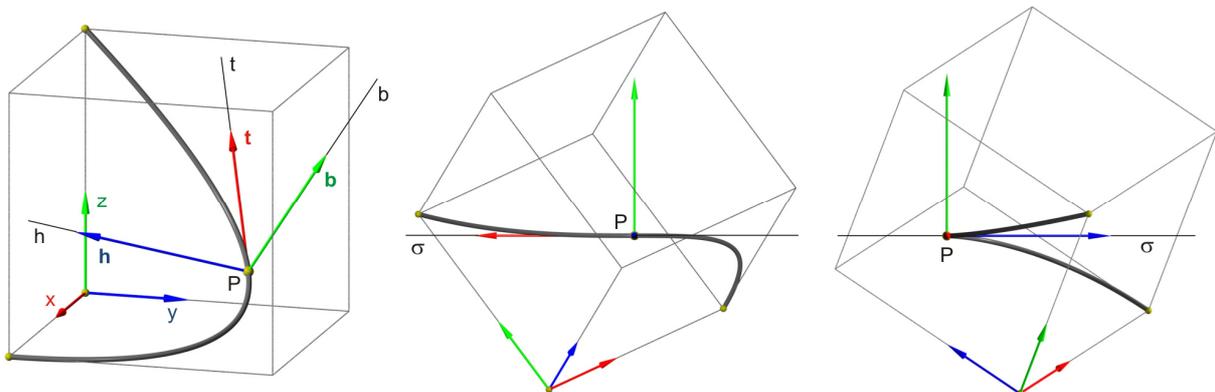
$$\ddot{P}(u) = (\ddot{x}(u) / \ddot{y}(u) / \ddot{z}(u))$$

Die Schmiegeebene  $\sigma$  in  $P$  wird also vom ersten und zweiten Ableitungsvektor von  $P(u)$  aufgespannt:

$$\sigma [P(u), \dot{P}(u), \ddot{P}(u)]$$

Es kann sein, dass  $\ddot{P}$  beim Durchgang durch  $P$  zum Nullvektor wird oder kollinear zum Tangentenvektor  $\dot{P}$  liegt. Man kann zeigen, dass die Schmiegeebene in  $P$  dann durch  $\dot{P}$  und  $\ddot{P}$  festgelegt wird (wenn  $\ddot{P}$  nicht der Nullvektor ist und nicht kollinear zu  $\dot{P}$  liegt). In diesem Fall bezeichnet man  $P$  als **Wendepunkt** (vgl. auch Seite 12). Wenn  $\ddot{P}$  für alle  $u$  der Nullvektor ist oder kollinear zum Tangentenvektor  $\dot{P}$  liegt, dann hat  $\dot{P}$  eine konstante Richtung und die Kurve ist geradlinig (ohne Beweis).

Die Bilder zeigen drei Ansichten einer Raumkurve. Außerdem ist der **Frenet-Frame** in einem Kurvenpunkt  $P$  zu sehen. Dieses lokale Koordinatensystem wird durch die Einheitsvektoren  $t$ ,  $h$  und  $b$  festgelegt, die auf der **Tangente**  $t$ , der **Hauptnormalen**  $h$  und der **Binormalen**  $b$  liegen. Die Hauptnormale  $h$  liegt in der Schmiegeebene  $\sigma$ , die Binormale  $b$  ist orthogonal zu  $\sigma$ . Bei der mittleren Ansicht (Blick entgegen  $h$ ) erscheint die Schmiegeebene als Gerade; das Bild der Kurve hat in  $P$  einen Wendepunkt. Bei der rechten Ansicht (Blick entgegen  $t$ ) erscheint die Schmiegeebene wieder als Gerade; das Bild der Kurve hat in  $P$  eine Spitze. Die mittlere und rechte Ansicht lassen erkennen, dass es in jeder Umgebung von  $P$  Kurvenpunkte auf beiden Seiten der Schmiegeebene gibt. Man sagt, dass die Schmiegeebene die Kurve oskuliert. In der englischen Literatur wird die Schmiegeebene als **osculating plane** bezeichnet. Es gibt auch spezielle Punkte, bei denen die Kurve lokal um  $P$  nur auf einer Seite der Schmiegeebene liegt (zB Scheitelpunkt eines Henkels).

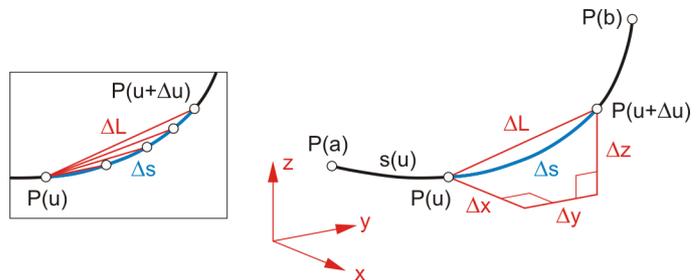


Quelle: Anna Niggas, Fachbereichsarbeit „Regelflächen – theoretisch, exemplarisch, visuell“, 2014

## Bogenlänge

Die Berechnung der Länge der Kurve von  $P(a)$  bis  $P(b)$  hängt mit der Berechnung des Tangentenvektors  $\dot{P}$  zusammen, wie die folgende Überlegung zeigt.

Bezeichnet man die Bogenlänge von  $P(a)$  bis zum variablen Punkt  $P(u)$  mit  $s = s(u)$  und die Differenz von  $s$  bis zum Punkt  $P(u+\Delta u)$  mit  $\Delta s$ , so ist  $\Delta s \approx \Delta L$ . Die linke Skizze legt nahe, dass für  $\Delta u \rightarrow 0$  der Quotient  $\Delta L/\Delta s$  gegen 1 strebt.



Die Streckenlänge  $\Delta L$  kann mit dem Satz von Pythagoras berechnet werden:

$$\Delta L^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

Division durch  $\Delta u^2$  und Umformung der linken Seite ergibt:

$$\left(\frac{\Delta L}{\Delta s}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta s}{\Delta u}\right)^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta u}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta u}\right)^2$$

Für  $\Delta u \rightarrow 0$  folgt daraus (unter Beachtung von  $\Delta L/\Delta s \rightarrow 1$ ):

$$\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \Rightarrow \dot{s} = |\dot{P}|$$

Daher kann die Bogenlänge  $s = s(u)$  durch Integration berechnet werden:

$$s(u) = \int_a^u \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot du = \int_a^u |\dot{P}| \cdot du$$

Diese intuitive Herleitung beruht auf der naheliegenden (aber unbewiesenen) Annahme, dass  $\Delta L/\Delta s$  gegen 1 strebt. Sie ist also (im strengen Sinn) kein Beweis für die Bogenlängenformel.

Die Berechnung des Integrals ist in der Regel kompliziert. Selbst bei einer einfach erscheinenden Aufgabe wie der Berechnung des Ellipsenumfangs ergeben sich erhebliche Probleme. Skaliert man den Einheitskreis  $[x = \cos u, y = \sin u]$  mit den positiven Faktoren  $a$  und  $b$  in  $x$ -Richtung und  $y$ -Richtung, so erhält man eine Ellipse mit den Halbachsenlängen  $a$  und  $b$   $[x = a \cdot \cos u, y = b \cdot \sin u]$ . Daraus ergibt sich für den Umfang  $U$ :

$$U = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cdot \sin^2 u + b^2 \cdot \cos^2 u} \cdot du$$

Dieses „elliptische Integral“ kann für  $a \neq b$  nur mit Näherungsverfahren ausgewertet werden, die Darstellung mit elementaren Funktionen ist nicht möglich. Die Skalierung des Einheitskreises mit den Faktoren  $a$  und  $b$  ist mit dem Flächeninhalt verträglich (aus  $\pi$  wird  $a \cdot b \cdot \pi$ ), nicht aber mit dem Umfang. Bei gleichen Faktoren ( $a = b = r$ , Kreis) ist die Skalierung eine zentrische Ähnlichkeit und daher auch mit dem Umfang verträglich (aus  $2\pi$  wird  $r \cdot 2\pi$ ). Einsetzen von  $a = b = r$  in die Integralformel bestätigt dieses Ergebnis.

Wenn auch die praktische Berechnung von  $s$  bei konkreten Kurven schwierig bzw. nur näherungsweise möglich ist, kann jeder Kurvenpunkt  $P$  gedanklich durch die Länge  $s$  des Bogens vom Anfangspunkt bis zu ihm festgelegt werden:  $P = P(s)$ . Bei der Parameterdarstellung einer Geraden ist dies der Fall, wenn der Richtungsvektor ein Einheitsvektor ist. Die Bogenlängenparametrisierung  $P = P(s)$  wird für theoretische Untersuchungen gerne verwendet. Als Ableitungssymbol ist hier ein hochgestellter Strich üblich.

Die Integralformel für die Bogenlänge  $s$  lässt erkennen, dass bei der Bogenlängenparametrisierung der Tangentenvektor  $P'$  stets ein Einheitsvektor ist. Es gilt also entlang der gesamten Kurve:

$$|P'| = 1$$

## Parallellkurven im $\mathbb{R}^2$

Trägt man auf jeder Normalen  $n$  einer Kurve  $k$  einen konstanten Abstand  $d$  auf, so erhält man eine **Parallelkurve** von  $k$ . Auch die Bezeichnung **Offsetkurve** ist üblich. Bei Verwendung der Bogenlänge  $s$  für die Kurve  $k$   $[\xi(s), \eta(s)]$  ist die Beschreibung von Parallelkurven besonders einfach. Der Tangentenvektor  $P'(s) = (\xi'/\eta')$  hat die Länge 1. Dreht man ihn um  $90^\circ$  nach rechts, so erhält man den Einheitsvektor  $\mathbf{n} = (\eta'/-\xi')$  auf der Kurvennormalen  $n$ . Somit ergibt sich als Parameterdarstellung für die Parallelkurve  $k_1$ :

$$P_1(s) = P(s) + d \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \xi(s) \\ \eta(s) \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} \eta' \\ -\xi' \end{pmatrix}$$

Die Parallelkurve  $k_2$  erhält man für  $-d$  bzw. durch Drehen des Tangentenvektors um  $90^\circ$  nach links. Für die Parallelkurven ist der Parameter  $s$  nicht die Bogenlänge, sondern ein „allgemeiner“ Parameter.

Parallelkurven haben nicht nur einen konstanten Abstand, sondern auch parallele Tangenten. Um das zu beweisen, wird zuerst der Tangentenvektor  $P_1'$  der Parallelkurve  $k_1$  berechnet und dann mit  $\mathbf{n}$  multipliziert:

$$P_1' = P' + d \cdot \mathbf{n}' = \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} \eta'' \\ -\xi'' \end{pmatrix} \Rightarrow P_1' \cdot \mathbf{n} = [P' + d \cdot \mathbf{n}'] \cdot \mathbf{n} = P' \cdot \mathbf{n} + d \cdot \mathbf{n}' \cdot \mathbf{n}$$

Der erste Summand des skalaren Produkts ist offensichtlich 0. Auch der zweite Summand ist 0, da  $\mathbf{n}$  die Länge 1 hat:

$$|\mathbf{n}| = 1 \Rightarrow \eta'^2 + \xi'^2 = 1 \Rightarrow 2 \cdot \eta' \cdot \eta'' + 2 \cdot \xi' \cdot \xi'' = 0 \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 0$$

Also sind  $P_1'$  und  $\mathbf{n}$  Normalvektoren und die Tangenten in  $P$  und  $P_1$  daher parallel. Erst dies rechtfertigt die Bezeichnung „Parallelkurve“. Außerdem gilt: Wenn  $k_1$  eine Parallelkurve von  $k$  ist, dann ist  $k$  eine Parallelkurve von  $k_1$ .

Bei beliebiger Parametrisierung von  $k$  ergibt sich für die Parallelkurve  $k_1$  offensichtlich:

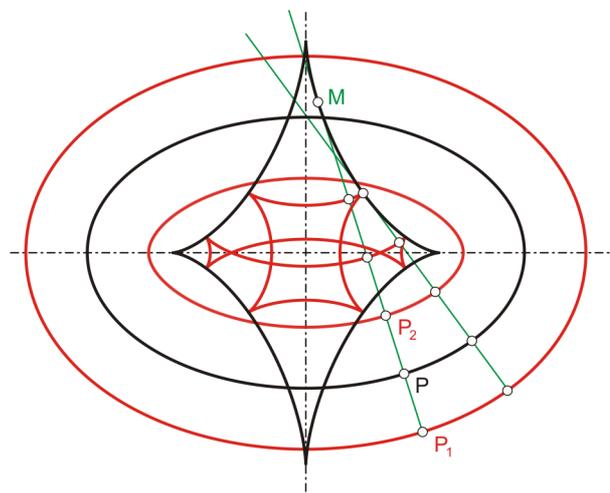
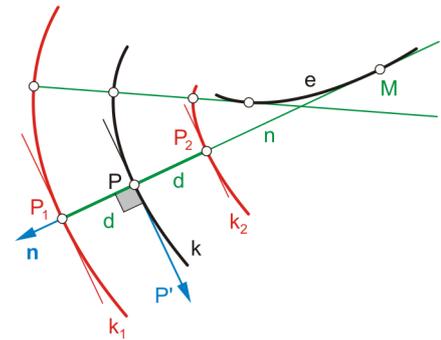
$$P_1(u) = P(u) + d \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \xi(u) \\ \eta(u) \end{pmatrix} + d \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}} \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ -\dot{\xi} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x(u) &= \xi(u) + d \cdot \dot{\eta} / \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2} \\ y(u) &= \eta(u) - d \cdot \dot{\xi} / \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2} \end{aligned}$$

Die gemeinsamen Normalen von  $k$  und allen Parallelkurven hüllen eine Kurve  $e$  ein, die man als **Evolute** von  $k$  bezeichnet. Es lässt sich zeigen: Bewegt man den Punkt  $P$  auf der Kurve  $k$ , so rollt die Normale  $n$  auf der Evolute  $e$  (ohne zu gleiten). Man kann sich auch vorstellen, dass ein Faden auf der Evolute aufgewickelt bzw. abgewickelt wird; die Bahnkurven der Punkte des Fadens sind Parallelkurven von  $k$ . Der Berührungspunkt  $M$  von  $n$  und  $e$  ist der gemeinsame Krümmungsmittelpunkt der Parallelkurven in den einzelnen Punkten des Fadens (siehe Seite 12).

Parallelkurven sind nicht einfach parallel verschobene Kurven. Die Verschiebungsvektoren der einzelnen Punkte haben zwar stets dieselbe Länge, aber nicht dieselbe Richtung. Nur bei Geraden ist das der Fall.

Das Bild zeigt einige Parallelkurven einer Ellipse, die Evolute und zwei Lagen der auf der Evolute rollenden gemeinsamen Normalen. Die Spitzen der Parallelkurven sind singuläre Punkte (Tangentenvektor ist Nullvektor); sie liegen stets auf der Evolute.

Die Spitzen der Evolute entsprechen den Scheiteln der Parallelkurven; das sind jene Punkte, bei denen die Krümmung lokal maximal bzw. minimal ist (siehe nächste Seite).



## Krümmung im $\mathbb{R}^2$

Hält man das Lenkrad in der Mittelstellung fest, so fährt das Auto entlang einer Geraden. Schlägt man das Lenkrad ein und hält es dann fest, so fährt das Auto entlang eines Kreises; je stärker der Einschlag, desto kleiner der Radius. Bewegt man das Lenkrad, so fährt man entlang einer Kurve, deren „Krümmung“ sich ständig ändert. Der aktuelle Lenkradeinschlag an einer Straßenstelle P könnte als Maß für die „Krümmung“ an dieser Stelle verwendet werden, wie die Tachoanzeige für die Geschwindigkeit an dieser Stelle.

Außerdem kann man zwischen Kurvenbögen unterscheiden, bei denen das Lenkrad nach rechts bzw. links eingeschlagen werden muss. Bei der Fahrt in die Gegenrichtung werden links und rechts vertauscht.

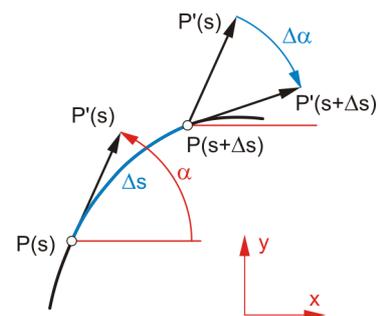
Diese intuitive Vorstellung von „Krümmung“ soll nun präzisiert werden: Blickt man in einem Punkt P einer Kurve in Richtung des Tangentenvektors, so kann sich die Kurve lokal nach rechts oder nach links von der Tangente weg drehen. Dies ist am Drehsinn des Tangentenvektors zu erkennen, wenn sich P auf der Kurve weiterbewegt: rechts entspricht dem negativen Drehsinn (im Uhrzeigersinn), links dem positiven Drehsinn (gegen den Uhrzeigersinn). Wenn sich der Drehsinn entlang eines Kurvenbogens nicht ändert, so ist der Kurvenbogen **rechtsgekrümmt** (negativer Drehsinn) oder **linksgekrümmt** (positiver Drehsinn). Ändert man den Laufsinn der Kurve, so wird ein rechtsgekrümmter Kurvenbogen linksgekrümmt und umgekehrt.

Die mehr oder weniger stark ausgeprägte Richtungsänderung des Tangentenvektors beim Weiterbewegen von P auf der Kurve kann gemessen werden, indem man diese Richtungsänderung in Relation zur Länge des durchlaufenen Bogens setzt. Dieses übliche Maß für die Krümmung wird nun hergeleitet. Winkel werden dabei immer im Bogenmaß gemessen, also als Länge des Bogens am Einheitskreis zwischen den Winkelschenkeln. Für die Kurve wird zunächst Bogenlängenparametrisierung vorausgesetzt (also  $|P'| = 1$ ).

Analog zum Übergang von der mittleren Geschwindigkeit  $v_m$  in einem Zeitintervall  $\Delta t$  zur Geschwindigkeit  $v$  in einem Zeitpunkt  $t$  definiert man zuerst die **mittlere Krümmung**  $\kappa_m$  einer Kurve zwischen den Punkten  $P(s)$  und  $P(s+\Delta s)$  als Differenzenquotient, wobei  $\alpha$  der Winkel des jeweiligen Tangentenvektors zur positiven x-Achse ist:

$$\kappa_m = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\alpha(s+\Delta s) - \alpha(s)}{\Delta s}$$

Das Vorzeichen von  $\Delta\alpha$  legt das Vorzeichen von  $\kappa_m$  fest. In der Skizze dreht sich der Tangentenvektor im Uhrzeigersinn; also ist  $\Delta\alpha < 0$  und die mittlere Krümmung  $\kappa_m$  ist negativ.



Für  $\Delta s \rightarrow 0$  ergibt sich die **Krümmung**  $\kappa$  im Punkt P. Wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten  $\Delta\alpha/\Delta s$  existiert, kann  $\kappa$  durch Differenzieren berechnet werden:

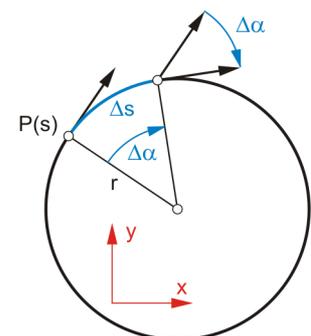
$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds} = \alpha'$$

Obwohl die mittlere Krümmung  $\kappa_m$  bei einem hinreichend kleinen  $\Delta s$  entweder positiv oder negativ ist, kann der Grenzwert  $\kappa$  gleich 0 sein. In diesem Fall ist der Punkt P ein **Wendepunkt** oder ein **Flachpunkt**. Bei einem Wendepunkt gibt es lokal Kurvenpunkte auf beiden Seiten der Tangente in P, bei einem Flachpunkt nur auf einer Seite. Die Tangente in einem Wendepunkt **oskuliert** die Kurve.

Bei einem **Kreis** sind  $\Delta\alpha$  und  $\Delta s$  direkt proportional; also ist  $\kappa_m = \Delta\alpha/\Delta s = c$  konstant. Daher ist auch  $\kappa = d\alpha/ds = c$ . Der Faktor  $c$  folgt aus der Bogenlänge für Kreisbögen:  $\Delta s = r \cdot |\Delta\alpha|$ . Also ist  $c = 1/r$  ( $\Delta\alpha > 0$ ) bzw.  $c = -1/r$  ( $\Delta\alpha < 0$ ). Für die Krümmung  $\kappa$  eines Kreises mit dem Radius  $r$  gilt also:

$$|\kappa| = 1/r$$

Durchläuft man einen Kreis im Uhrzeigersinn (wie in der Skizze), so ist seine Krümmung negativ; gegen den Uhrzeigersinn ist sie positiv.



Nach der begrifflichen Klärung soll nun die Krümmung  $\kappa = \alpha'$  aus den Koordinatenfunktionen  $x(s)$  und  $y(s)$  von  $P(s)$  berechnet werden. Da der Tangentenvektor bei Bogenlängenparametrisierung die Länge 1 hat, gilt:

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow P'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \cdot \alpha' \\ \cos \alpha \cdot \alpha' \end{pmatrix} = \alpha' \cdot \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}$$

Die Länge von  $P''$  ist also gleich dem Betrag der Krümmung  $\kappa$ :

$$|\kappa| = |P''| = \sqrt{x''^2 + y''^2}$$

Berechnet man die Determinante von  $P'$  und  $P''$ , so erhält man eine Formel für die Krümmung  $\kappa$ , bei der auch das Vorzeichen richtig ist:

$$\det(P', P'') = \cos^2 \alpha \cdot \alpha' + \sin^2 \alpha \cdot \alpha' = \alpha' \Rightarrow \kappa = \det(P', P'') = x' \cdot y'' - x'' \cdot y'$$

Aus der obigen Darstellung von  $P'$  und  $P''$  ist abzulesen, dass die beiden Vektoren orthogonal sind. Dieses Ergebnis kann auch so hergeleitet werden: Da der Vektor  $P'$  die Länge 1 hat, gilt  $x'^2 + y'^2 = 1$ . Differenziert man beide Seiten der Gleichung, so folgt  $2 \cdot x' \cdot x'' + 2 \cdot y' \cdot y'' = 0$ .

Um eine Formel für  $\kappa$  bei Verwendung eines beliebigen Parameters  $u$  herzuleiten, ist zunächst zu beachten:

$$\kappa = \alpha' = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{du} \cdot \frac{du}{ds} = \dot{\alpha} \cdot \frac{1}{\dot{s}}$$

Da die Ableitung  $\dot{s}$  der Bogenlänge  $s$  nach  $u$  gleich dem Betrag des Tangentenvektors  $\dot{P}$  ist, gilt:

$$\dot{P} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{s} \cdot \cos \alpha \\ \dot{s} \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \ddot{P} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{s} \cdot \cos \alpha - \dot{s} \cdot \sin \alpha \cdot \dot{\alpha} \\ \ddot{s} \cdot \sin \alpha + \dot{s} \cdot \cos \alpha \cdot \dot{\alpha} \end{pmatrix}$$

Berechnet man wieder die Determinante der beiden Ableitungsvektoren, so ergibt sich:

$$\det(\dot{P}, \ddot{P}) = \dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y} = \dot{s}^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \dot{\alpha} + \dot{s}^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \dot{\alpha} = \dot{s}^2 \cdot \dot{\alpha}$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit der oben angegebenen Umformung von  $\kappa$ , so folgt:

$$\kappa = \frac{\det(\dot{P}, \ddot{P})}{|\dot{P}|^3} = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3}$$

Das Vorzeichen der Determinante gibt an, ob die Kurve lokal linksgekrümmt (+) oder rechtsgekrümmt (-) ist. Ein **Wendepunkt** oder **Flachpunkt** liegt genau dann vor, wenn die Determinante gleich 0 ist, wenn also  $\ddot{P}$  der Nullvektor ist oder  $\dot{P}$  und  $\ddot{P}$  kollinear sind.

Bei einer **ähnlichen Veränderung** der Kurve (Ähnlichkeitsfaktor  $f$ ) ändert sich auch die Krümmung  $\kappa$ , die ja der Grenzwert des Quotienten  $\Delta\alpha/\Delta s$  eines (orientierten) Winkels  $\Delta\alpha$  und der Länge  $\Delta s$  eines Kurvenbogens ist. Der Faktor  $f$  wirkt sich auf  $\Delta s$  aus ( $\Delta s \rightarrow f \cdot \Delta s$ ), aber nicht auf  $\Delta\alpha$ . Daher gilt:

$$\kappa_{\text{neu}} = \frac{1}{f} \cdot \kappa_{\text{alt}}$$

Eine Verdopplung der „Kurvengröße“ bewirkt also eine Halbierung der Krümmung in allen Kurvenpunkten.

## Krümmung im $\mathbf{R}^3$

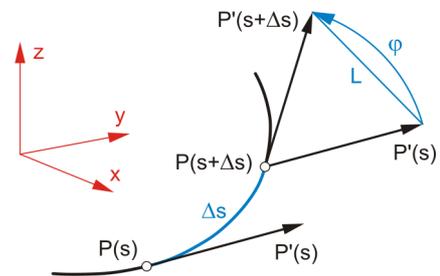
Die Krümmung von Raumkurven ist analog zur Krümmung von ebenen Kurven. Es gibt aber Unterschiede:

- Im  $\mathbf{R}^2$  kann man die Richtung des Tangentenvektors  $P'$  durch seinen Winkel  $\alpha$  zur positiven x-Achse festlegen. Das ist im  $\mathbf{R}^3$  nicht möglich, da man zwei Winkel zum Festlegen der Richtung von  $P'$  benötigt: den Höhenwinkel (Winkel zum waagrechteten Vektor genau unter dem Tangentenvektor) und den Winkel des waagrechteten Vektors zur positiven x-Achse. Der Winkel  $\varphi$  (siehe Skizze unten) kann also nicht als Differenz  $\Delta\alpha$  eines Richtungswinkels  $\alpha$  aufgefasst werden. Daher ist es nicht möglich, die Krümmung  $\kappa$  als Ableitung  $d\alpha/ds$  zu berechnen. Der Grenzwert der mittleren Krümmung  $\kappa_m = \varphi/\Delta s$  für  $\Delta s \rightarrow 0$  kann natürlich trotzdem berechnet werden.
- Es ist Ansichtssache, welches Vorzeichen man dem Drehsinn des Winkels  $\varphi$  zuordnet. Zeichnet man nämlich den Winkel  $\varphi$  (samt Drehsinn) auf ein Transparentpapier, so kann man von zwei Seiten auf das Transparentpapier schauen. Wenn der Drehsinn bei der einen Ansicht im Uhrzeigersinn ist, so ist er bei der anderen Ansicht gegen den Uhrzeigersinn. Legt man die Ansicht so fest, dass man stets entgegen dem Pfeil des Normalvektors  $P' \times P''$  der Schmiegeebene blickt, dann ist der Drehsinn von  $\varphi$  immer positiv. Mit dieser Festlegung ist also die Krümmung im  $\mathbf{R}^3$  immer positiv (oder 0).

Da die Tangentenvektoren bei Bogenlängenparametrisierung die Länge 1 haben, ist der Winkel  $\varphi$  die Länge des Kreisbogens, der die Spitzen der Tangentenvektoren verbindet. Also gilt  $\varphi/L \rightarrow 1$  für  $\varphi \rightarrow 0$  (folgt aus  $t/\sin t \rightarrow 1$  für  $t \rightarrow 0$ ). Daraus ergibt sich:

$$\kappa_m = \frac{\varphi}{\Delta s} = \frac{\varphi}{L} \cdot \frac{L}{\Delta s} = \frac{\varphi}{L} \cdot \frac{|P'(s+\Delta s) - P'(s)|}{\Delta s} = \frac{\varphi}{L} \cdot \left| \frac{\Delta P'}{\Delta s} \right| \rightarrow 1 \cdot |P''|$$

$$\kappa = |P''|$$



Alternativ kann man die Raumkurve orthogonal auf die Schmiegeebene in  $P$  projizieren und die Krümmung  $\kappa$  in  $P$  als Krümmung der projizierten ebenen Kurve in  $P$  definieren. Blickt man „von oben“ auf die Schmiegeebene (entgegen dem Pfeil des Normalvektors  $P' \times P''$ ), so ist die projizierte Kurve immer linksgekrümmt.

Wenn die Krümmung  $\kappa$  in einem Punkt  $P$  gleich 0 ist, so ist  $P$  in der Regel ein **Wendepunkt** (vgl. Seite 6; die Schmiegeebene in  $P$  ist hier durch  $P'$  und  $P'''$  festgelegt). Vor und nach  $P$  ist  $P' \times P''$  ein Normalvektor der jeweiligen Schmiegeebene. Beobachtet man diesen Vektor beim Durchlaufen der Kurve, so wird er in der Nähe von  $P$  immer kürzer, hat in  $P$  die Länge 0 und dreht sich danach auf die andere Seite der Schmiegeebene. Der Einheitsvektor von  $P' \times P''$  springt hingegen beim Durchgang durch  $P$  ruckartig auf die andere Seite.

Abschließend soll auch noch im  $\mathbf{R}^3$  die übliche Formel für  $\kappa$  bei Verwendung eines beliebigen Parameters  $u$  hergeleitet werden. Für den ersten und zweiten Ableitungsvektor gilt aufgrund der Kettenregel:

$$P(u) = P(s(u)) \Rightarrow \dot{P} = P' \cdot \dot{s} \Rightarrow \ddot{P} = P'' \cdot \dot{s}^2 + P' \cdot \ddot{s}$$

Daraus ergibt sich für das Kreuzprodukt der beiden Vektoren:

$$\dot{P} \times \ddot{P} = (P' \cdot \dot{s}) \times (P'' \cdot \dot{s}^2 + P' \cdot \ddot{s}) = (P' \cdot \dot{s} \times P'' \cdot \dot{s}^2) + (P' \cdot \dot{s} \times P' \cdot \ddot{s}) = \dot{s}^3 \cdot (P' \times P'')$$

Der Betrag eines Kreuzprodukts ist gleich dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren festgelegten Parallelogramms. Da der Vektor  $P'$  die Länge 1 hat, gilt  $P'^2 = 1$ . Differenziert man diese Gleichung, so folgt  $2 \cdot P' \cdot P'' = 0$ ; also sind  $P'$  und  $P''$  orthogonal. Wegen  $P' \perp P''$  und  $|P'| = 1$  folgt

$$|\dot{P} \times \ddot{P}| = \dot{s}^3 \cdot |P' \times P''| = \dot{s}^3 \cdot 1 \cdot |P''| = \dot{s}^3 \cdot \kappa \Rightarrow \kappa = \frac{|\dot{P} \times \ddot{P}|}{|\dot{P}|^3}$$

Ein weiteres Abweichungsmaß für Raumkurven ist die **Torsion**  $\tau$  in einem Kurvenpunkt  $P$ . Sie misst, wie „stark“ sich die Richtung der Normalen auf die Schmiegeebene lokal um  $P$  ändert. Für ebene Kurven ist die Torsion offensichtlich stets 0. Die Torsion von Raumkurven wird hier nicht behandelt.

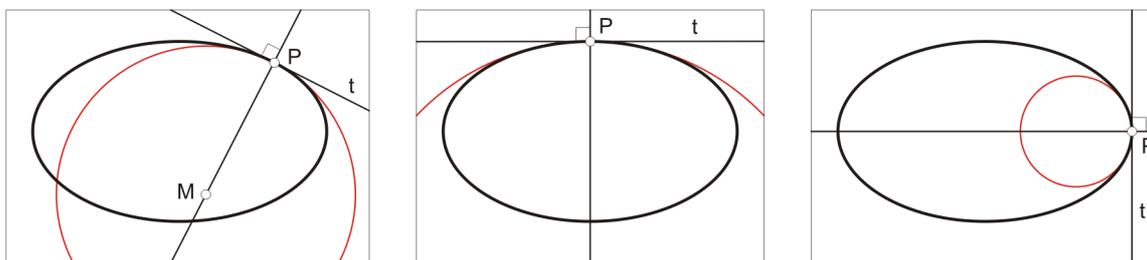
## Krümmungskreise

Der etwas abstrakte Begriff der Krümmung lässt sich mit Krümmungskreisen veranschaulichen: Durchfährt man auf einer ebenen Straße eine Kurve und hält an einer Straßenstelle P das Lenkrad mit dem aktuellen Einschlag fest, so geht die Fahrt auf einem Kreis weiter. Der Lenkradeinschlag legt die Krümmung  $\kappa$  an der Straßenstelle P fest; die Straße hat in P also dieselbe Krümmung wie der Kreis. Man nennt diesen Kreis den **Krümmungskreis** im Punkt P.

Der Radius  $\rho$  des Krümmungskreises in einem Kurvenpunkt P wird als **Krümmungsradius** der Kurve in P bezeichnet. Da die Krümmung eines Kreises (vom Vorzeichen abgesehen) gleich dem Kehrwert des Kreisradius ist (siehe Seite 9), gilt für den Krümmungsradius  $\rho$  in P:

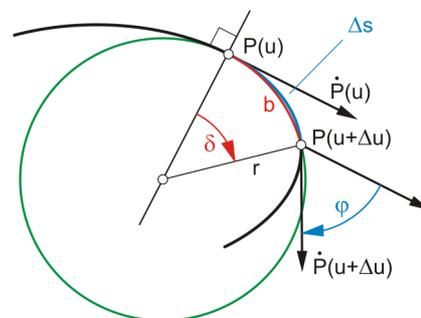
$$\rho = 1/|\kappa|$$

Die Bilder zeigen Krümmungskreise einer Ellipse. Beim linken Bild gilt in der Nähe von P: Fährt man auf der Ellipse, so gelangt man vom Außengebiet des Krümmungskreises ins Innengebiet (oder umgekehrt). Der Krümmungskreis **oskuliert** die Ellipse in P. Bei den nächsten Bildern tritt diese Oskulation nicht auf, da P jeweils auf einer Symmetrieachse liegt.



Krümmungskreise können im  $\mathbf{R}^2$  und im  $\mathbf{R}^3$  einheitlich durch einen Grenzübergang definiert werden, der analog zum Übergang von der Sekante zur Tangente ist: Man sucht einen Kreis, der die Kurve lokal um P bestmöglich annähert.

Dazu geht man von einem Kreis aus, der die Kurve im Punkt  $P(u)$  berührt und außerdem durch einen benachbarten Punkt  $P(u+\Delta u)$  verläuft. Für  $\Delta u \rightarrow 0$  strebt dieser Kreis gegen den Krümmungskreis im Punkt P. Auf den Nachweis, dass dieser durch Grenzübergang erzeugte Kreis tatsächlich den Radius  $\rho = 1/|\kappa|$  hat, wird verzichtet. Die Skizze legt das aber nahe, da wegen  $\Delta s \approx b$  und  $\varphi \approx \delta$  die mittlere Krümmung  $\varphi/\Delta s$  der Kurve ungefähr gleich der Krümmung  $\delta/b = \pm 1/r$  des Kreises ist.



Bei einer Raumkurve strebt die Trägerebene des grünen Kreises für  $\Delta u \rightarrow 0$  gegen die Schmiegeebene  $\sigma$  im Punkt P. Der Krümmungskreis liegt also in der Schmiegeebene.

Ist der Punkt P ein Wendepunkt oder Flachpunkt ( $\kappa = 0$ ), so strebt der grüne Kreis gegen die Tangente in P. Diese Tangente kann also gewissermaßen als Krümmungskreis mit dem Radius  $\rho = \infty$  angesehen werden.

Es kann auch sein, dass der Radius des grünen Kreises gegen 0 strebt, dass also der Krümmungskreis auf einen Punkt zusammenschrumpft ( $\rho = 0$ ). Die Kurve ist in diesem Punkt gewissermaßen unendlich stark gekrümmt. Dies tritt etwa auf, wenn die Kurve eine Spitze hat (vgl. zB die Zykloide auf Seite 17).

Abschließend sei die Autofahrt vom Beginn des Abschnitts fortgesetzt. Möchte man an einer Straßenstelle P entlang der Tangente weiterfahren, so müsste man das Lenkrad ruckartig in die Mittelstellung drehen; die Krümmung würde sich ruckartig auf 0 ändern. Solche un stetigen Krümmungsverläufe sind im Straßenbau nicht erlaubt. Idealerweise werden bei der Trassierung einer Straße nur Kurven konstanter Krümmung (also Strecken und Kreisbögen) verwendet, die krümmungsstetig mit **Klothoidenbögen** verbunden werden. Bei diesen Kurven hängt die Krümmung  $\kappa$  linear von der Bogenlänge s ab (also  $\kappa = a \cdot s + b$ ). Bei einer Fahrt auf einem Klothoidenbogen mit konstanter Geschwindigkeit ist die Drehgeschwindigkeit des Lenkrads konstant.

## Geschwindigkeit und Beschleunigung

Interpretiert man den Parameter  $u$  als Zeit  $t$  ( $u = t$ ), so durchläuft der Punkt  $P(t)$  die Kurve mit der **Bahngeschwindigkeit**  $v = ds/dt$ . Gemäß Seite 7 ist  $v$  gleich dem Betrag des Tangentenvektors. Der Tangentenvektor selbst wird als **Geschwindigkeitsvektor**  $\mathbf{v}$  bezeichnet.

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = |\dot{\mathbf{P}}(t)|, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{P}}(t)$$

Die Ableitung der Bahngeschwindigkeit  $v$  ist die **Bahnbeschleunigung**  $b = dv/dt$ . Die Ableitung des Geschwindigkeitsvektors  $\mathbf{v}$  nennt man den **Beschleunigungsvektor**  $\mathbf{a}$ . Die Vektoren  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{a}$  spannen die Schmiegebene  $\sigma$  auf (siehe Seite 6).

$$\mathbf{b} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}, \quad \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{P}}(t)$$

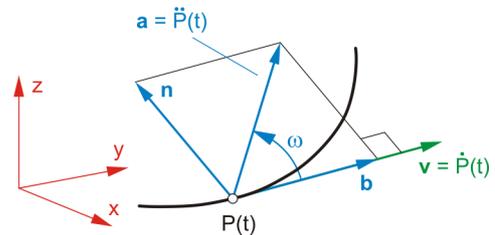
Der Beschleunigungsvektor  $\mathbf{a}$  kann in einen tangentialen und einen dazu normalen Vektor zerlegt werden:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{n}$$

Der Betrag  $|\mathbf{a}|$  des Beschleunigungsvektors ist nicht die Bahnbeschleunigung  $b$ . Sie kann aber mit Hilfe der Vektoren  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{a}$  unter Verwendung der Kettenregel berechnet werden:

$$v^2 = \dot{s}^2 = \dot{\mathbf{P}}^2 \Rightarrow \dot{s} \cdot \dot{s} = \dot{\mathbf{P}} \cdot \dot{\mathbf{P}} \Rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$$

$$b = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{v}, \quad b = |\mathbf{a}| \cdot \cos \omega$$



Die Bahnbeschleunigung  $b$  ist also die orientierte Länge des Vektors  $\mathbf{b}$ . Für  $\omega < \pi/2$  sind  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{b}$  gleich orientiert; der Punkt  $P$  wird schneller. Für  $\omega > \pi/2$  sind  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{b}$  entgegengesetzt orientiert; der Punkt  $P$  wird langsamer. Für  $\omega = \pi/2$  ist die Bahnbeschleunigung  $b$  gleich 0; die Bahngeschwindigkeit  $v$  hat an dieser Stelle (in der Regel) ein lokales Minimum oder Maximum.

Die Länge des Vektors  $\mathbf{n}$  wird als **Normalbeschleunigung**  $n$  bezeichnet; auch **Zentralbeschleunigung** oder **Zentripetalbeschleunigung** sind übliche Bezeichnungen. Die Berechnung von  $n$  kann mit dem Satz von Pythagoras oder trigonometrisch mit Hilfe von  $\omega$  erfolgen. Sie kann auch über den Flächeninhalt des von  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{a}$  aufgespannten Parallelogramms erfolgen, dessen Höhe  $n$  ist. Dieser Flächeninhalt kann im  $\mathbf{R}^3$  als Betrag des vektoriellen Produkts und im  $\mathbf{R}^2$  als Betrag der Determinante von  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{a}$  berechnet werden.

$$n = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - b^2}, \quad n = |\mathbf{a}| \cdot \sin \omega, \quad n = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v} \text{ im } \mathbf{R}^3, \quad n = \frac{|\det(\mathbf{v}, \mathbf{a})|}{v} \text{ im } \mathbf{R}^2$$

Das Durchfahren einer Straßenkurve lehrt, dass  $n$  von der Geschwindigkeit und dem Krümmungsradius abhängt. Diese Abhängigkeit kann mit den Krümmungsformeln von Seite 10 bzw. 11 quantifiziert werden:

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{P}} \times \ddot{\mathbf{P}}|}{|\dot{\mathbf{P}}|^3} = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3} \text{ im } \mathbf{R}^3, \quad \kappa = \frac{\det(\dot{\mathbf{P}}, \ddot{\mathbf{P}})}{|\dot{\mathbf{P}}|^3} = \frac{\det(\mathbf{v}, \mathbf{a})}{v^3} \text{ im } \mathbf{R}^2 \Rightarrow |\kappa| = \frac{n}{v^2} \Rightarrow n = \frac{v^2}{\rho}$$

Die Normalbeschleunigung  $n$  in einem Punkt  $P$  ist also direkt proportional zur quadrierten Geschwindigkeit und indirekt proportional zum Krümmungsradius in  $P$ . Wenn man also eine halb so stark gekrümmte Kurve doppelt so schnell durchfährt, so bleibt  $n$  nicht gleich, sondern wird verdoppelt. In einem Wendepunkt ( $\kappa = 0$ ) ist die Bewegung lokal fast geradlinig, also ist  $n$  offensichtlich 0; die Formeln bestätigen das.

Wenn Herr  $P$  ( $m = 80 \text{ kg}$ ) auf einer kreisförmigen Straße mit dem Radius  $100 \text{ m}$  ( $\kappa = 0,01$ ) mit der konstanten Geschwindigkeit  $15 \text{ m/s}$  ( $54 \text{ km/h}$ ) fährt, so beträgt die Normalbeschleunigung  $n = 0,01 \cdot 15^2 = 2,25 \text{ m/s}^2$ . Sie macht das Auto nicht schneller, verursacht aber die auf Herrn  $P$  wirkende Zentripetalkraft ( $F = 180 \text{ N}$ ) in Richtung des Mittelpunkts. Im Auto stellt Herr  $P$  hingegen fest, dass ihn eine Kraft nach außen drückt. Diese Zentrifugalkraft (Fliehkraft) ist gleich groß wie die Zentripetalkraft.

Interpretiert man bei der Bogenlängenparametrisierung einer Kurve den Parameter  $s$  als Zeit  $t$  ( $s = t$ ), so ist die Bahngeschwindigkeit  $v$  konstant gleich 1 und die Bahnbeschleunigung  $b$  daher 0. Also ist der Beschleunigungsvektor  $\mathbf{a} = \ddot{P}(t)$  stets orthogonal zum Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v} = \dot{P}(t)$ .

Bei konstanter Bahngeschwindigkeit  $c$  ist der Parameter  $t$  proportional zur Bogenlänge  $s$  ( $s = c \cdot t$ ). Auch hier ist  $b = 0$  und der Beschleunigungsvektor  $\mathbf{a}$  daher orthogonal zum Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$ . Dies folgt auch aus der Kettenregel:

$$v = c \text{ (konst.)} \Rightarrow \dot{P}^2 = c^2 \Rightarrow 2 \cdot \dot{P} \cdot \ddot{P} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} \perp \mathbf{a}$$

In der englischen Literatur wird diese spezielle Parametrisierung oft als **constant speed parametrization** bezeichnet und die Bogenlängenparametrisierung als **unit speed parametrization**.

Wenn man eine Kurve so parametrisieren kann, dass der Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  konstant ist (also weder die Länge noch die Richtung ändert), so liegt offensichtlich eine **Gerade** vor, da der Geschwindigkeitsvektor zugleich der Tangentenvektor ist. Man kann Gerade aber auch so durchlaufen (parametrisieren), dass die Bahngeschwindigkeit nicht konstant ist.

Wenn man eine Kurve so parametrisieren kann, dass der Beschleunigungsvektor  $\mathbf{a}$  konstant ist, so gilt:

$$\mathbf{a} = \ddot{P}(t) = \mathbf{c} \text{ (konst.)} \Rightarrow \mathbf{v} = \dot{P}(t) = t \cdot \mathbf{c} + \mathbf{d} \Rightarrow P(t) = \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \mathbf{c} + t \cdot \mathbf{d} + \mathbf{e}$$

Gemäß Seite 3 ist die Kurve eine **Parabel**. Man kann also nur Parabeln (und Gerade) so durchlaufen, dass der Beschleunigungsvektor konstant ist. Daraus folgt übrigens, dass die Flugbahn eines Objekts nahe der Erdoberfläche (bei idealisierten physikalischen Bedingungen) eine Parabel sein muss, da der Beschleunigungsvektor lotrecht ist und die Länge  $g$  hat.

# Beispiele

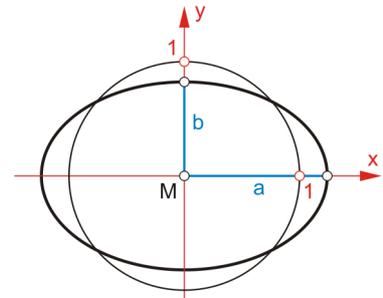
In diesem Abschnitt werden Parameterdarstellungen von einigen wichtigen oder auch nur interessanten Kurven hergeleitet. Die Kurven werden dabei stets in einfacher Lage im zentralen Koordinatensystem Oxy bzw. Oxyz platziert (mit Ausnahme der Bezierkurven). Dies ist ausreichend, da parametrisierte Kurven mit der auf Seite 4 beschriebenen Methode beliebig verlagert werden können.

## Ellipsen und Hyperbeln

Eine **Ellipse** in Hauptlage (Halbachsenlängen a, b) kann durch Skalieren des Einheitskreises mit den Faktoren a und b erzeugt werden. Jeder Parameterdarstellung des Einheitskreises  $[\xi(u), \eta(u)]$  entspricht so eine Parameterdarstellung der Ellipse:  $a \cdot \xi(u), b \cdot \eta(u)$ . Bei der üblichen Parametrisierung des Einheitskreises erhält man für die Ellipse:

$$x(u) = a \cdot \cos u \quad , \quad y(u) = b \cdot \sin u \quad ; \quad 0 \leq u \leq 2\pi$$

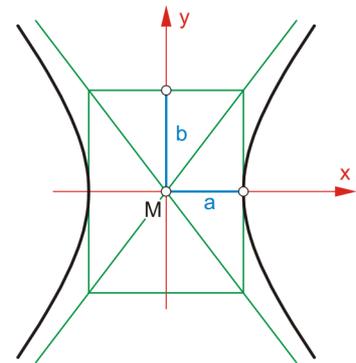
Diese Darstellung beruht auf der Beziehung  $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$ .



Um eine **Hyperbel** in Hauptlage zu parametrisieren, kann man analog vorgehen: Zuerst wird die Einheitshyperbel parametrisiert; man sucht also zwei Funktionen  $\xi(u)$  und  $\eta(u)$ , für die  $\xi^2 - \eta^2 = 1$  gilt. Skalieren mit zwei positiven Faktoren a und b ergibt die allgemeine Hyperbel:  $a \cdot \xi(u), b \cdot \eta(u)$ . Einsetzen in die Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

bestätigt, dass auf diese Weise die Hyperbel (oder auch nur ein Teil von ihr) parametrisiert wird. Die geometrische Bedeutung der Faktoren a und b ist der Skizze zu entnehmen. Die Diagonalen des grünen Rechtecks sind die Asymptoten der Hyperbel.



Die beiden folgenden Parametrisierungen der Einheitshyperbel verwenden rationale Funktionen:

$$\xi(u) = \frac{1}{2} \cdot \left( u + \frac{1}{u} \right) \quad , \quad \eta(u) = \frac{1}{2} \cdot \left( u - \frac{1}{u} \right) \quad ; \quad u \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \quad \xi(u) = \frac{1+u^2}{1-u^2} \quad , \quad \eta(u) = \frac{2u}{1-u^2} \quad ; \quad -1 \leq u \leq 1$$

Die erste Parametrisierung liefert die ganze Einheitshyperbel (die rechte Hälfte für  $0 < u < \infty$ , die linke Hälfte für  $-\infty < u < 0$ ), die zweite Parametrisierung liefert die rechte Hälfte. (Ein Vergleich dieser Parametrisierung mit der rationalen Parametrisierung des Kreises auf Seite 2 ist interessant, wenn man formal den komplexen Parameterwechsel  $u = i \cdot w$  zulässt.)

Bei der üblichen Parametrisierung der Hyperbel werden die hyperbolischen Funktionen verwendet:

$$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \quad , \quad \sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

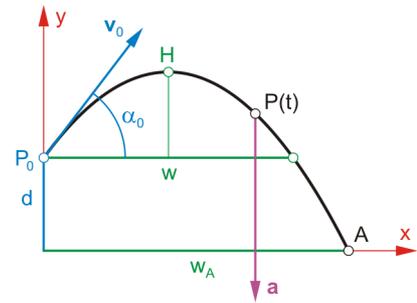
Sie sind geeignet, da die Beziehung  $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$  gilt. Durch die Parameterdarstellung

$$x(u) = a \cdot \cosh u \quad , \quad y(u) = b \cdot \sinh u \quad ; \quad -\infty \leq u \leq \infty$$

wird nur die rechte Hälfte der Hyperbel erfasst. Für die linke Hälfte muss das Vorzeichen von  $x(u)$  geändert werden.

## Wurfparabeln

Wirft man einen Stein unter einem Winkel  $\alpha_0$  mit einer Geschwindigkeit  $v_0$  schräg nach oben, so würde er sich ohne Einfluss der Schwerkraft auf einer geradlinigen Bahn mit der Geschwindigkeit  $v_0$  weiterbewegen (unter idealisierten Bedingungen). Die Schwerkraft zieht ihn aber nach unten. Der entsprechende Beschleunigungsvektor  $\mathbf{a}$  ist lotrecht und hat die Länge  $g$ :  $\mathbf{a} = (0/-g)$ . Der Geschwindigkeitsvektor im Abwurfpunkt  $P_0$  ist  $\mathbf{v}_0 = (v_0 \cdot \cos \alpha_0 / v_0 \cdot \sin \alpha_0)$ .



Verwendet man die Zeit  $t$  als Parameter, so ergibt sich die Parameterdarstellung durch Integration:

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{P}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = \dot{\mathbf{P}}(t) = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} + \mathbf{v}_0 \Rightarrow \mathbf{P}(t) = \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} + t \cdot \mathbf{v}_0 + \mathbf{P}_0$$

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos \alpha_0 \\ v_0 \cdot \sin \alpha_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix}$$

$$x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha_0 \cdot t \quad , \quad y(t) = d + v_0 \cdot \sin \alpha_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Um die Reichweite  $w$  bis zum Erreichen der Ausgangshöhe  $d$  zu berechnen, ist zunächst die Gleichung  $y(t) = d$  zu lösen. Sie hat neben der Lösung  $0$  die Lösung  $t_w = 2v_0 \cdot \sin \alpha_0 / g$ . Einsetzen in  $x(t)$  ergibt

$$w = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha_0}{g}$$

Unmittelbar ist zu erkennen, dass bei gleicher Abwurfgeschwindigkeit  $v_0$  die Reichweite  $w$  bei den Abwurfwinkeln  $\alpha_0$  und  $90^\circ - \alpha_0$  gleich ist. Sie ist offensichtlich für  $\alpha_0 = 45^\circ$  maximal und beträgt  $w_{\max} = v_0^2 / g$ .

Der höchste Punkt  $H$  ergibt sich offensichtlich, wenn man die Hälfte von  $t_w$  in  $x(t)$  und  $y(t)$  einsetzt. Alternativ kann man den Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  berechnen und seine  $y$ -Koordinate gleich  $0$  setzen:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{P}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos \alpha_0 \\ v_0 \cdot \sin \alpha_0 - g \cdot t \end{pmatrix} \quad , \quad \dot{y}(t) = 0 \Rightarrow t_H = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha_0}{g}$$

$$H \left( \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha_0}{2g} / d + \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha_0}{2g} \right)$$

Da die Bahngeschwindigkeit  $v$  der Betrag des Geschwindigkeitsvektors  $\mathbf{v}$  ist, ergibt sich  $v_H = v_0 \cdot \cos \alpha_0$  für die Bahngeschwindigkeit im höchsten Punkt.

Um die Reichweite  $w_A$  bis zum Aufprallpunkt  $A$  zu berechnen, ist zuerst die quadratische Gleichung  $y(t) = 0$  zu lösen. Die positive Lösung ist die Flugzeit  $t_F$ . Zerlegt man  $t_F$  in die Flugzeit  $t_H$  bis zum höchsten Punkt  $H$  und die restliche Flugzeit  $t_R$  bis zum Aufprall, so ergibt sich nach Umformen und Einsetzen in  $x(t)$ :

$$t_F = t_H + t_R \quad \text{mit} \quad t_R = \sqrt{2 \cdot y_H / g} \quad , \quad w_A = x_H + v_0 \cdot \cos \alpha_0 \cdot t_R$$

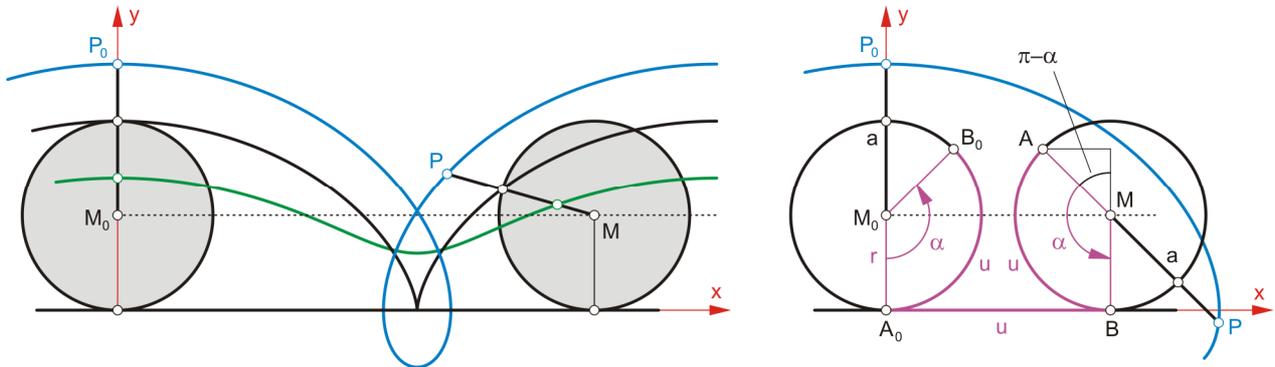
Die maximale Reichweite  $w_A$  bei einer vorgegebenen Abwurfgeschwindigkeit  $v_0$  und einer vorgegebenen Abwurfhöhe  $d > 0$  wird nicht mit dem Abwurfwinkel  $45^\circ$  erzielt, sondern mit einem kleineren Abwurfwinkel:

$$\tan \alpha_0 = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2 \cdot d \cdot g}}$$

Die Herleitung dieser Formel ist eine recht komplizierte Optimierungsaufgabe und wird hier nicht behandelt.

## Rollkurven

Wenn ein Kreis auf einer Geraden rollt, dann durchläuft jeder mit dem rollenden Kreis verbundene Punkt P eine **Trochoide**. Wenn P auf dem Rand des Kreises liegt, erhält man eine **Zykloide**. Für die Herleitung einer Parameterdarstellung möge der Kreis auf der x-Achse rollen; die Ausgangslage der Strecke MP wird oBdA auf die y-Achse gelegt.



Für den vom Mittelpunkt  $M(u/r)$  zum Punkt A weisenden Vektor gilt:  $\overline{MA} = (-r \cdot \sin(\pi - \alpha) / r \cdot \cos(\pi - \alpha)) = (-r \cdot \sin \alpha / -r \cdot \cos \alpha)$ . Daher ist  $(\sin \alpha / \cos \alpha)$  der von M nach P zeigende Einheitsvektor. Verwendet man u als Parameter, so folgt unter Beachtung von  $u = r \cdot \alpha$  und  $MP = a$  die Parameterdarstellung

$$P(u) = M + \overline{MP} = \begin{pmatrix} u \\ r \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} \sin(u/r) \\ \cos(u/r) \end{pmatrix}$$

$$x(u) = u + a \cdot \sin(u/r) \quad , \quad y(u) = r + a \cdot \cos(u/r) \quad , \quad -\infty < u < \infty$$

Um die Bahngeschwindigkeit  $v$  sowie die Bahn- und Normalbeschleunigung  $b$  und  $n$  zu berechnen, muss zunächst der zeitliche Ablauf der Rollung festgelegt werden. Wenn sich der Mittelpunkt M mit einer konstanten Geschwindigkeit  $c$  vorwärts bewegen soll, so ist  $u = c \cdot t$ . Nach diesem Parameterwechsel können die entsprechenden Formeln für  $v$ ,  $b$  und  $n$  ermittelt werden (siehe Seite 13). Neben der Rollgeschwindigkeit  $c$  hat natürlich auch der Radius  $r$  einen Einfluss auf die Ergebnisse.

Im Folgenden werden für einen Kreis (Radius  $r$ ), der mit der Geschwindigkeit  $c = 1$  m/s rollt, die Formeln für  $v$ ,  $b$  und  $n$  für die Zykloide ( $a = r$ , schwarze Kurve links oben) berechnet. Die Ableitungen von  $P(t)$  ergeben den Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  und den Beschleunigungsvektor  $\mathbf{a}$ :

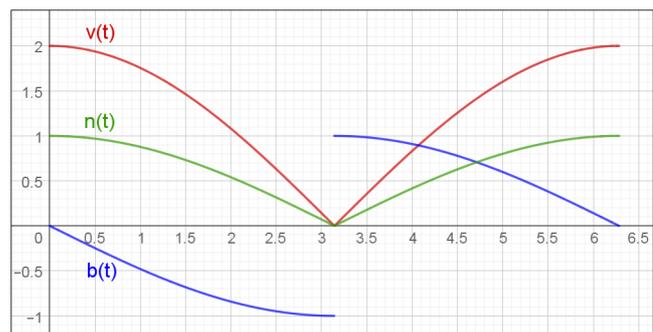
$$P(t) = \begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \sin(t/r) \\ \cos(t/r) \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = \dot{P}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t/r) \\ -\sin(t/r) \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a} = \ddot{P}(t) = -\frac{1}{r} \cdot \begin{pmatrix} \sin(t/r) \\ \cos(t/r) \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich  $v$ ,  $b$  und  $n$  mit Hilfe der Formeln von Seite 13:

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{2 + 2 \cdot \cos(t/r)} \quad , \quad b = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{v} = \frac{-\sin(t/r)}{r \cdot v} \quad , \quad n = \frac{|\det(\mathbf{v}, \mathbf{a})|}{v} = \frac{1 + \cos(t/r)}{r \cdot v}$$

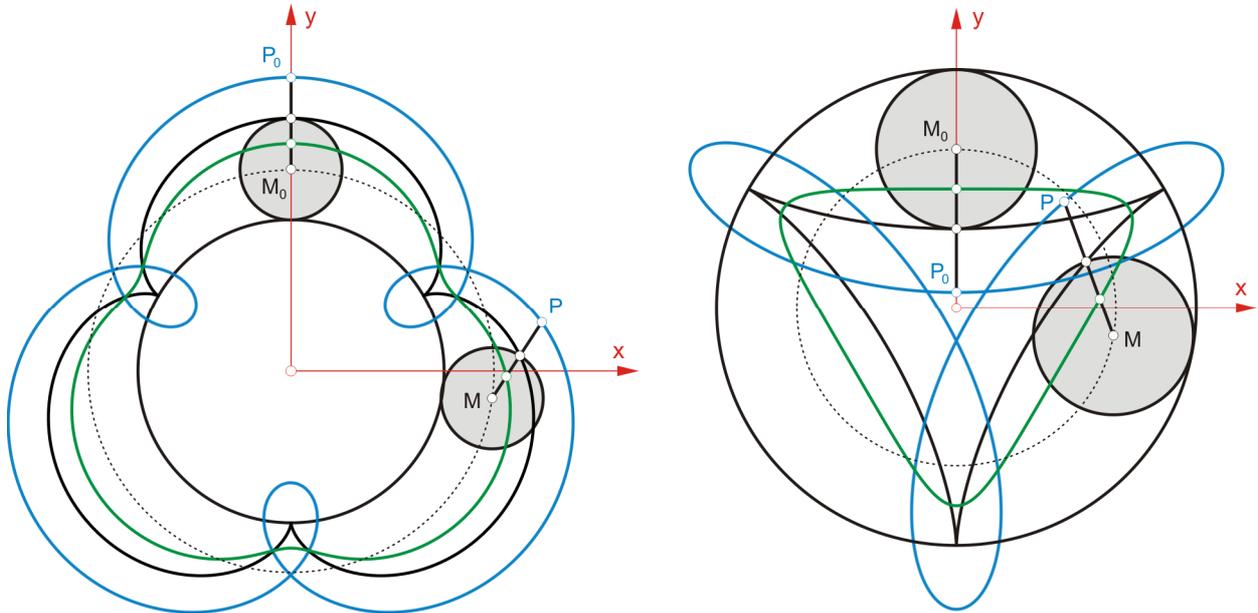
Die Grafik zeigt die Funktionen  $v(t)$ ,  $b(t)$  und  $n(t)$  bei einer vollen Umdrehung für den Radius  $r = 1$  m. Bei den Maximalwerten von  $v(t)$  ist  $b(t)$  natürlich 0.

Nach  $\pi$  Sekunden setzt die Zykloide auf der x-Achse auf. Die Bahngeschwindigkeit ist jetzt 0. Die Bahn- und Normalbeschleunigung können mit den Formeln nicht berechnet werden (wegen 0/0). Man kann aber nachrechnen, dass die rechts- und linksseitigen Grenzwerte für  $b(t)$  gleich  $\pm 1$  sind; für  $n(t)$  sind die beiden Grenzwerte gleich 0.



Allgemeiner kann man einen Kreis entlang eines Kreises rollen lassen, wobei der rollende Kreis entweder außerhalb oder innerhalb des ruhenden Kreises liegt. Man unterscheidet demgemäß **Epitrochoiden** und **Hypotrochoiden**. Die beiden Bilder zeigen solche Rollkurven für das Radienverhältnis  $R:r = 3:1$ .

**Bemerkung:** Der rollende Kreis kann den ruhenden Kreis auch überdecken. Diese Möglichkeit wird hier nicht beschrieben.



Für rationale Radienverhältnisse  $R:r$  erhält man geschlossene Rollkurven, bei irrationalen Verhältnissen schließen sich die Rollkurven nie.

Um eine Parameterdarstellung für **Epitrochoiden** (vgl. links oben) herzuleiten, werden der Mittelpunkt des ruhenden Kreises in den Ursprung  $O$  und der Mittelpunkt  $M_0$  des rollenden Kreises auf die  $y$ -Achse gelegt. Auch die Ausgangslage der Strecke  $MP$  wird  $oBdA$  auf die  $y$ -Achse gelegt, da jede andere Ausrichtung von  $M_0P_0$  nur eine Drehung der Rollkurve um  $O$  bewirkt. Die Herleitung ist analog zur Rollung auf einer Geraden:

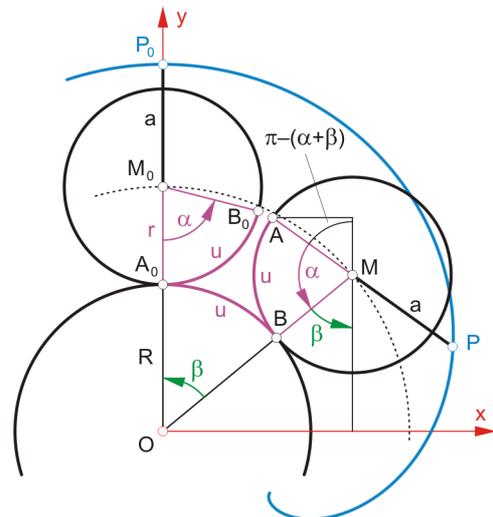
Der Mittelpunkt  $M$  und der von  $M$  zu  $A$  weisende Vektor  $\overline{MA}$  können aus der Skizze abgelesen werden:  
 $M((R+r) \cdot \sin \beta / (R+r) \cdot \cos \beta)$ ,  $\overline{MA} = (-r \cdot \sin(\alpha+\beta) / -r \cdot \cos(\alpha+\beta))$ .  
 Daher ist  $(\sin(\alpha+\beta) / \cos(\alpha+\beta))$  der von  $M$  nach  $P$  zeigende Einheitsvektor.

Verwendet man  $u$  als Parameter, so folgt unter Beachtung von  $u = r \cdot \alpha = R \cdot \beta$  und  $MP = a$  die Parameterdarstellung

$$P(u) = M + \overline{MP} = \begin{pmatrix} (R+r) \cdot \sin(u/R) \\ (R+r) \cdot \cos(u/R) \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} \sin(u/r + u/R) \\ \cos(u/r + u/R) \end{pmatrix}$$

$$x(u) = (R+r) \cdot \sin(u/R) + a \cdot \sin(u/r + u/R)$$

$$y(u) = (R+r) \cdot \cos(u/R) + a \cdot \cos(u/r + u/R)$$



Für den Parameterbereich gilt prinzipiell  $-\infty < u < \infty$ . Möchte man den rollenden Kreis nur einmal vollständig auf dem ruhenden Kreis herumrollen lassen, so gilt  $0 \leq u \leq 2R\pi$ .

Für **Hypotrochoiden** (vgl. rechts oben) ergibt eine ähnliche Herleitung die Parameterdarstellung

$$x(u) = (R-r) \cdot \sin(u/R) + a \cdot \sin(u/r - u/R)$$

$$y(u) = (R-r) \cdot \cos(u/R) - a \cdot \cos(u/r - u/R)$$

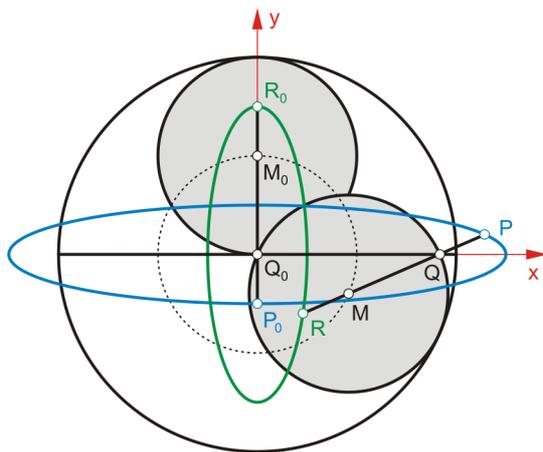
Besonders interessant ist die Innenrollung mit dem Radienverhältnis  $R:r = 2:1$ . Setzt man  $a = R/r = 2$  und  $r = 1$ , so gilt

$$x(u) = (1+a) \cdot \sin(u/2), \quad y(u) = (1-a) \cdot \cos(u/2)$$

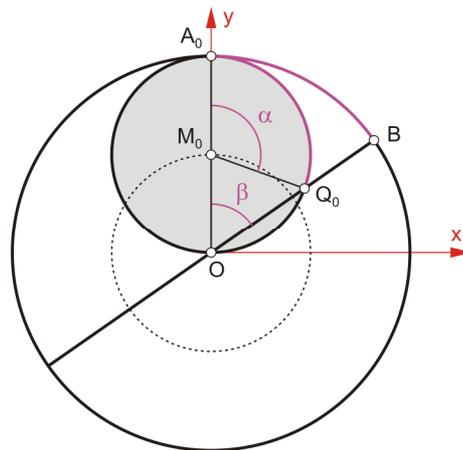
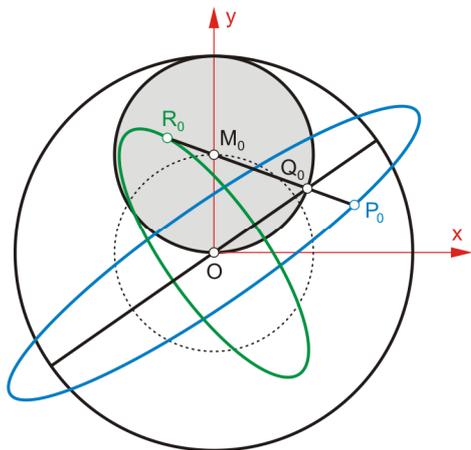
Für  $a = 1$  ist  $y = 0$ ; die Rollkurve ist also der auf der x-Achse liegende Kreisdurchmesser. Für  $a \neq 1$  gilt

$$\frac{x^2}{(1+a)^2} + \frac{y^2}{(1-a)^2} = 1$$

Also ist die Rollkurve eine Ellipse mit den Halbachsenlängen  $|1+a|$  und  $|1-a|$ . Das Bild zeigt die beiden Ellipsen für  $a = 1,5$  (blau) und  $a = -0,5$  (grün).



Richtet man  $MP$  in der Ausgangslage nicht auf die y-Achse aus, sondern in beliebiger Richtung, so bedeutet dies bloß eine Drehung der Rollkurven um den Ursprung  $O$  (linkes Bild). Dass die Rollkurve des Punktes  $Q$  tatsächlich geradlinig ist, mag zwar verblüffen, ist aber elementar einzusehen (rechtes Bild): Die Rollkurve von  $Q$  setzt in einem Punkt  $B$  auf dem ruhenden Kreis auf. Da die violetten Bögen gleich lang sind und sich die Kreisradien wie  $2:1$  verhalten, ist der Zentriwinkel  $\alpha = \angle A_0 M_0 Q_0$  doppelt so groß wie der Zentriwinkel  $\beta = \angle A_0 O B$ . Andererseits gilt aber aufgrund des Peripheriewinkelsatzes, dass der Peripheriewinkel  $\angle A_0 O Q_0$  halb so groß ist wie der Zentriwinkel  $\alpha = \angle A_0 M_0 Q_0$ ; also ist der Peripheriewinkel gleich  $\beta$ . Daraus folgt, dass  $Q_0$  auf  $OB$  liegt. Lässt man den Kreis in Richtung  $B$  rollen, so kann diese Überlegung für jede Rolllage durchgeführt werden;  $Q$  liegt also immer auf der von der Rolllage unabhängigen Geraden  $OB$ .



Beim Rollen eines Kreises mit dem Radius  $r$  entlang eines ruhenden Kreises mit dem Radius  $R$  – sei es innen oder außer – ergeben sich für  $a = \pm r$  die gespitzten Formen, also Epizykloiden oder Hypozykloiden. Es ist durchaus erstaunlich, dass sich ihre Bogenlängen elementar berechnen lassen.

Exemplarisch wird nun der Umfang der **Steiner-Zykloide** berechnet, deren Umkreisradius  $R = 3$  ist.

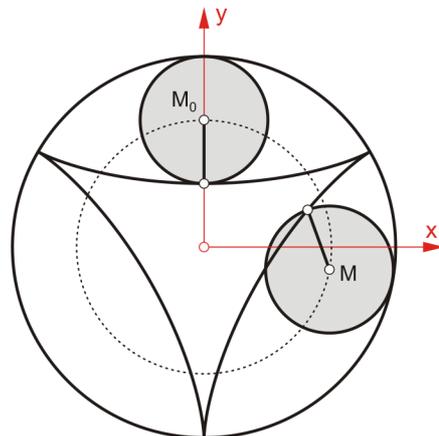
$$x(u) = 2 \cdot \sin(u/3) + \sin(2u/3), \quad y(u) = 2 \cdot \cos(u/3) - \cos(2u/3)$$

Für den Betrag des Tangentenvektors ergibt sich:

$$\dot{s}(u) = |\dot{P}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{4}{3} \cdot \left| \cos \frac{u}{2} \right|$$

Der Umfang setzt sich aus sechs gleich langen Bögen zusammen. Daher gilt:

$$U = 6 \cdot \frac{4}{3} \cdot \int_0^\pi \cos \frac{u}{2} \cdot du = \left[ 16 \cdot \sin \frac{u}{2} \right]_0^\pi = 16$$



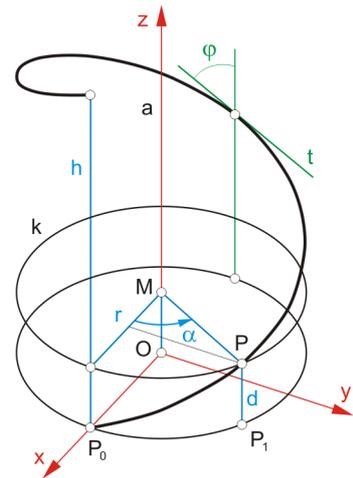
## Schraublinien usw.

Lässt man einen Punkt P auf einem Kreis k rotieren und schiebt dabei den Kreis in Richtung der Drehachse a, so liegt die Bahnkurve von P auf einer **Drehzylinderfläche**. Wenn der Anfangskreis (Mittelpunkt O, Radius r) in der xy-Ebene liegt und der Anfangspunkt  $P_0(r/0/0)$  auf der x-Achse, so ergeben sich die Koordinaten von P aus der Grafik:

$$P(r \cdot \cos \alpha / r \cdot \sin \alpha / d)$$

Wenn der Drehwinkel  $\alpha$  und die Schiebstrecke d proportional sind, dann ist die Bahnkurve eine **Schraublinie**. Wählt man den Drehwinkel  $\alpha$  als Parameter u, so gilt  $d = p \cdot u$ . Die entsprechende Parameterdarstellung der Schraublinie lautet also:

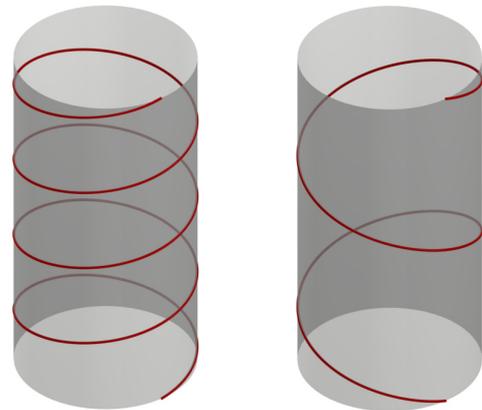
$$x(u) = r \cdot \cos u \quad , \quad y(u) = r \cdot \sin u \quad , \quad z(u) = p \cdot u \quad ; \quad -\infty < u < \infty$$



Der Proportionalitätsfaktor p kann als Schiebgeschwindigkeit interpretiert werden, wenn man u als Zeit auffasst. Der Höhenzuwachs  $h = p \cdot 2\pi$  bei einer vollen Umdrehung ist die **Ganghöhe** der Schraublinie.

Je nach dem Drehsinn unterscheidet man Links- und Rechtsschraublinien. Bei einer **Rechtsschraublinie** (linkes Bild, vier Gänge = vier volle Umläufe) erscheint der Drehsinn bei Blick gegen die Schiebrichtung positiv (gegen den Uhrzeigersinn), bei einer **Linksschraublinie** (rechtes Bild, zwei Gänge) negativ. Auf Schrauben treten in der Regel Rechtsschraublinien auf; sie werden mit einer Rechtsdrehung festgezogen.

Die oben angegebene Parameterdarstellung entspricht einer Rechtsschraublinie. Ändert man das Vorzeichen von  $y(u)$ , so erhält man eine Linksschraublinie.



Der in der Skizze rechts oben zu sehende Winkel  $\varphi$  ist offensichtlich konstant. Dies kann durch seine Berechnung bestätigt werden. Bezeichnet man den Einheitsvektor in z-Richtung mit  $\mathbf{z}$ , so gilt:

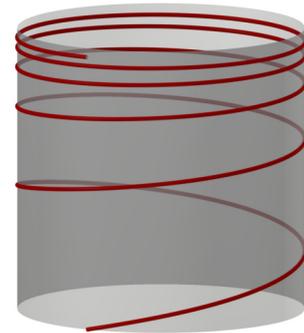
$$\cos \varphi = \frac{\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{z}}{|\dot{\mathbf{P}}|} = \frac{p}{\sqrt{r^2 + p^2}}$$

Offensichtlich ist die Bogenlänge s zum Drehwinkel u proportional. Dies ist auch an der konstanten Länge des Tangentenvektors  $\dot{\mathbf{P}}$  zu erkennen. Die Länge L für einen Umlauf kann ohne Integralrechnung mit dem Satz von Pythagoras berechnet werden: Schneidet man die Drehzylinderfläche entlang der Mantellinie durch  $P_0$  auf und verebnet sie, so geht die Schraublinie in die Diagonale eines Rechtecks mit der Länge  $2r\pi$  und der Breite  $h = p \cdot 2\pi$  über; daher ist  $L = 2\pi \cdot \sqrt{r^2 + p^2}$ .

Man erhält weitere Kurven auf dem Drehzylindermantel, wenn man die Koordinatenfunktion  $z(u)$  ändert. Möchte man etwa die Schraublinie nach oben so verdichten, dass sich der Höhenzuwachs  $\Delta h$  pro Umlauf halbiert, so benötigt man eine Funktion  $z(u)$  mit der Eigenschaft  $z(u + 2\pi) - z(u) = 2 \cdot [z(u + 4\pi) - z(u + 2\pi)]$ . Die folgende Funktion erfüllt diese Eigenschaft:

$$z(u) = p \cdot \left( 1 - 0,5 \frac{u}{2\pi} \right)$$

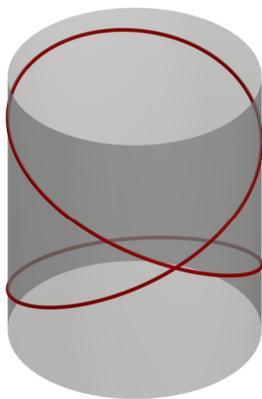
Das Bild zeigt fünf Umläufe dieser Kurve ( $r=1$ ,  $p=2$ ). Für  $u \rightarrow \infty$  nähert sie sich dem Kreis in der Höhe  $z = p$  asymptotisch.



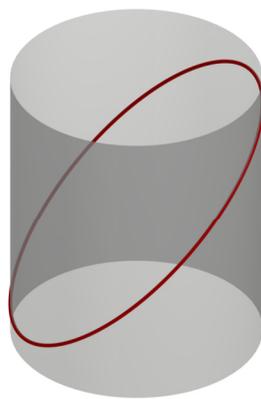
Besonders interessant sind die **Umschwingkurven**, bei denen die  $z$ -Koordinate harmonisch schwingt:

$$x(u) = r \cdot \cos u \quad , \quad y(u) = r \cdot \sin u \quad , \quad z(u) = p \cdot \sin(f \cdot u) \quad ; \quad -\infty < u < \infty$$

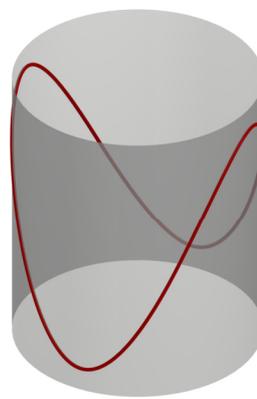
Der Faktor  $p$  legt die Höhe der Amplitude fest, während der Faktor  $f$  die Frequenz regelt. Die Bilder zeigen Beispiele für die  $f$ -Werte  $1/2$ ,  $1$ ,  $2$  und  $3$ .



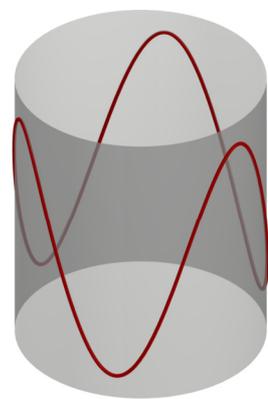
$f = 1/2$



$f = 1$



$f = 2$



$f = 3$

- Für  $f = 1$  gilt  $p \cdot y = r \cdot z$ ; also liegt die Kurve in einer Ebene. Sie ist ein Schrägschnitt eines Drehzylindermantels und daher eine Ellipse.
- Für  $f = 2$  gilt  $r^2 \cdot z = 2p \cdot xy$ ; also liegt die Kurve auf einem hyperbolischen Paraboloid. Wie die Gleichung leicht erkennen lässt, hat diese sattelförmige Fläche gleichseitige Hyperbeln als Höhenschichtlinien; die Höhenschichtlinie in  $z = 0$  besteht aus der  $x$ -Achse und der  $y$ -Achse.
- Für  $f = 1/2$  liegt die Kurve auf einer Kugel. Das kann aus der Parameterdarstellung nicht so einfach erkannt werden. Durch Einsetzen in die Gleichung  $(x + p^2/4r)^2 + y^2 + z^2 = (r + p^2/4r)^2$  kann man das aber bestätigen. Die Kugel berührt den Drehzylindermantel im Punkt  $(r/0/0)$ ; dies ist der Doppelpunkt (Selbstschnittpunkt) der Umschwingkurve. Für  $p = 2r$  ist der Kugelradius doppelt so groß wie der Drehzylinderradius; die Kurve ist als **Vivianisches Fenster** bekannt.

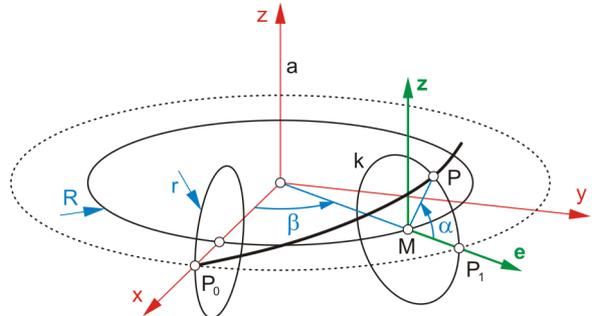
Projiziert man die Umschwingkurven orthogonal auf beliebige lotrechte Ebenen, so erhält man eine reiche Formenwelt von oszillierenden Kurven; sie sind als **Lissajous-Kurven** bekannt.

## Rotoiden

Lässt man (in gewisser Analogie zur Schraublinie) einen Punkt P auf einem Kreis rotieren, der seinerseits um eine in seiner Ebene liegenden Achse a rotiert, so erhält man eine Bahnkurve, die auf einer **Torusfläche** liegt. Die Torusfläche (man denke an einen Schwimmreifen) entsteht durch Rotation des genannten Kreises. Wenn der Mittelpunkt M des rotierenden Kreises auf a liegt, dann liegt die Bahnkurve auf einer **Kugelfläche**.

Legt man den Anfangskreis  $[M_0(R/0/0)$ , Radius r] in die xz-Ebene und die Achse a auf die z-Achse und, so ist  $M(R \cdot \cos \beta / R \cdot \sin \beta / 0)$  der Mittelpunkt des um den Winkel  $\beta$  gedrehten Kreises. Der von M in Richtung  $P_1$  weisende Einheitsvektor ist  $\mathbf{e} = (\cos \beta / \sin \beta / 0)$ . Bezeichnet man den Einheitsvektor der z-Achse mit  $\mathbf{z}$ , so gilt:

$$\overline{MP} = r \cdot \cos \alpha \cdot \mathbf{e} + r \cdot \sin \alpha \cdot \mathbf{z} = r \cdot \cos \alpha \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \sin \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

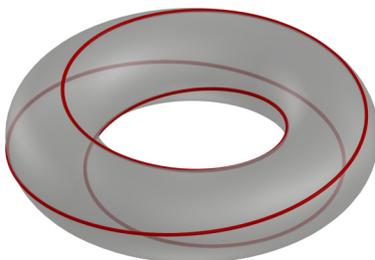


Wenn die beiden Drehwinkel  $\alpha$  und  $\beta$  proportional sind, so bezeichnet man die Bahnkurve als **Rotoide**. Wählt man den Winkel  $\beta$  als Parameter u, so gilt  $\alpha = n \cdot u$ . Der Proportionalitätsfaktor n gibt an, wie viele Umläufe MP vollführt, wenn sich M einmal um die z-Achse dreht. Die entsprechende Parameterdarstellung der Rotoide lautet also:

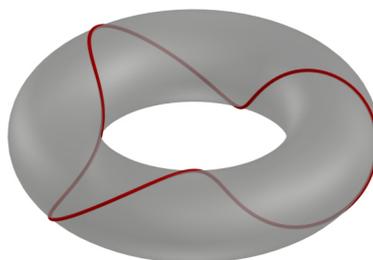
$$P(u) = M + \overline{MP} = R \cdot \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \cos nu \cdot \cos u \\ \cos nu \cdot \sin u \\ \sin nu \end{pmatrix}$$

$$x(u) = (R + r \cdot \cos nu) \cdot \cos u, \quad y(u) = (R + r \cdot \cos nu) \cdot \sin u, \quad z(u) = r \cdot \sin nu$$

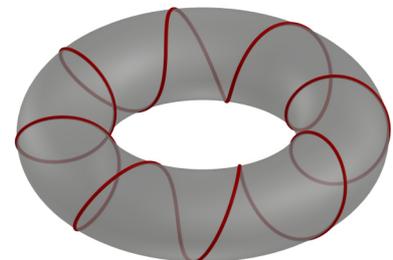
Die Bilder zeigen Rotoiden auf einer Torusfläche ( $R=6, r=2$ ) für die n-Werte 1/3, 3 und 8.



n = 1/3

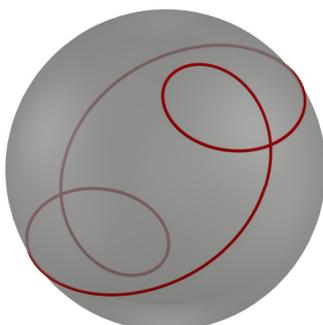


n = 3

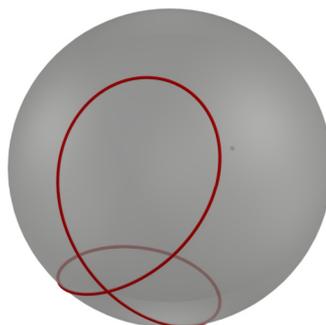


n = 8

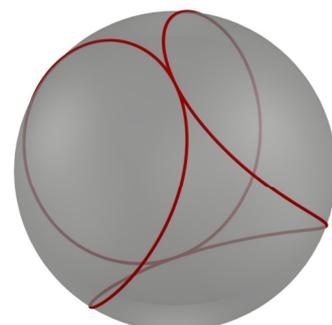
Für  $R=0$  liegen die Rotoiden auf einer Kugelfläche (Radius r). Die Bilder zeigen die Kurven für die n-Werte 1/2, 1 und 2. Für  $n=1$  gilt  $x^2 + y^2 = r \cdot x$ ; daher liegt die Kurve auf einer z-parallelen Drehzylinderfläche mit dem Radius  $r/2$ , der die Kugel im Doppelpunkt der Kurve berührt. Sie ist als **Vivianisches Fenster** bekannt (vgl. vorige Seite).



n = 1/2



n = 1



n = 2

Die Bahnkurven auf Torusflächen können zu Bahnkurven auf Rohrflächen verallgemeinert werden: Bewegt man einen Kreis  $k$  so, dass sein Mittelpunkt  $M$  entlang einer Kurve  $m$  wandert und die Kreisebene stets orthogonal zur Tangente in  $M$  ist, so überstreicht  $k$  eine **Rohrfläche**. Die Torusfläche ist ein Spezialfall; hier ist  $m$  ein Kreis. Die Bahnkurve eines auf  $k$  rotierenden Punktes  $P$  ist eine Verallgemeinerung der Rotoide.

Bei einer ebenen Mittellinie  $m$   $[\xi(u), \eta(u)]$  in der  $xy$ -Ebene ist diese Verallgemeinerung recht einfach (vgl. vorige Seite): Für den Vektor  $\mathbf{e}$  verwendet man einen Einheitsvektor auf der Kurvennormalen in  $M$ . Dazu dreht man den Tangentenvektor um  $90^\circ$  nach rechts (oder links) und normiert ihn. Der Vektor  $\mathbf{z}$  wird unverändert übernommen.

$$\dot{M}(u) = \begin{pmatrix} \dot{\xi}(u) \\ \dot{\eta}(u) \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{e} = \frac{1}{|\dot{M}|} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\eta}(u) \\ -\dot{\xi}(u) \end{pmatrix}$$

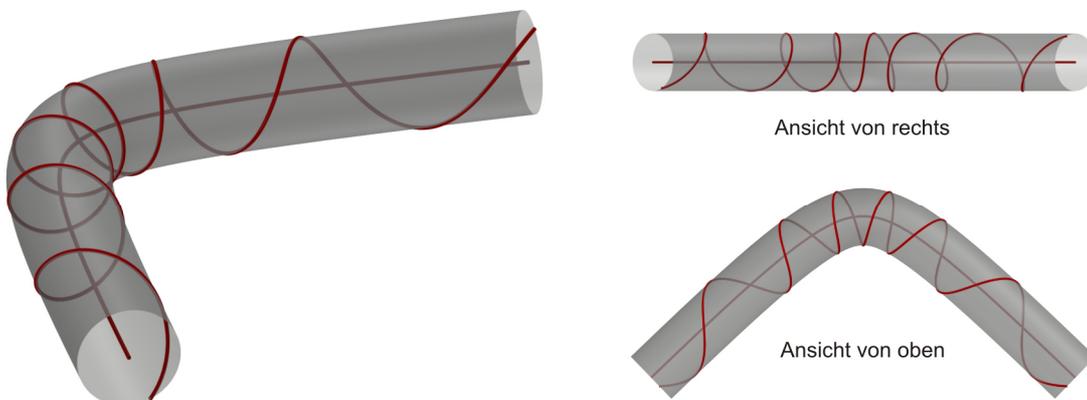
Legt man den Drehwinkel  $\alpha$  proportional zum Parameter  $u$  fest ( $\alpha = n \cdot u$ ), so ergibt sich die Parameterdarstellung der verallgemeinerten Rotoide auf der Rohrfläche analog zur Rotoide auf der Torusfläche:

$$P(u) = M + \overline{MP} = M + r \cdot \cos \alpha \cdot \mathbf{e} + r \cdot \sin \alpha \cdot \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \xi(u) \\ \eta(u) \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \cos nu \cdot \frac{1}{|\dot{M}|} \begin{pmatrix} \dot{\eta}(u) \\ -\dot{\xi}(u) \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \sin nu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wählt man als Mittellinie  $m$  etwa den durch  $\xi(u) = \cosh u$ ,  $\eta(u) = \sinh u$ ,  $-2 \leq u \leq 2$  parametrisierten Hyperbelbogen, so erhält man

$$x(u) = \cosh u \cdot \left( 1 + \frac{r \cdot \cos nu}{\sqrt{\cosh 2u}} \right), \quad y(u) = \sinh u \cdot \left( 1 - \frac{r \cdot \cos nu}{\sqrt{\cosh 2u}} \right), \quad z(u) = r \cdot \sin nu$$

Die Bilder zeigen drei Ansichten dieser Kurve für den Radius  $r = 0,5$  und den Faktor  $n = 10$ . Für  $u=0$  liegen die Punkte  $M$  und  $P$  auf der  $x$ -Achse. Durchläuft  $M$  den Hyperbelbogen von  $u=0$  bis  $u=2$ , so vollführt  $P$  dabei  $20/2\pi \approx 3,2$  Umdrehungen.



Die Verallgemeinerung von Rotoiden kann auch auf Rohrflächen mit Raumkurven als Mittellinien erweitert werden. An die Stelle der Vektoren  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{z}$  treten zwei orthogonale Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$ , die in der Normalebene der Mittellinie  $m$  im jeweiligen Kreismittelpunkt  $M$  liegen müssen. Das Problem besteht nun darin, diese Einheitsvektoren geometrisch sinnvoll festzulegen. Wenn man für  $m$  eine Schraublinie entlang der  $z$ -Achse verwendet, so könnte man die Vektoren  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$  in Richtung der Höhenschichtlinien und der Falllinien der Normalebene ausrichten; dies erscheint hier naheliegend, ist aber durchaus nicht zwingend. Allgemein geht es darum, ein lokales Koordinatensystem  $M\xi\eta\zeta$  (einen sogenannten **Frame**) geometrisch sinnvoll entlang der Kurve zu bewegen, ausgehend von einer passend gewählten Anfangslage in einem Kurvenpunkt  $M_0$ . Die  $\xi$ -Achse des Frames muss dabei immer tangential zur Kurve ausgerichtet sein. Die Freiheit liegt in der Drehung um die  $\xi$ -Achse. Die Ermittlung solcher Frames unter diversen Bedingungen wird in der Differentialgeometrie behandelt.

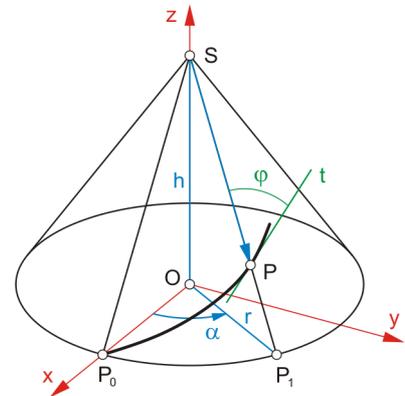
## Spirallinien

Schraublinien können auch so erzeugt werden: Auf einem Drehzylindermantel rotiert eine Mantellinie, und ein auf ihr liegender Punkt  $P$  wird nach oben verschoben. In analoger Weise kann man Kurven auf einem Drehkegelmantel erzeugen: Eine Mantellinie rotiert, und ein auf ihr liegender Punkt  $P$  wird in Richtung der Spitze verschoben. Die Bahnkurve von  $P$  ist eine **Spirallinie**.

Legt man den Basismittelpunkt in den Ursprung  $O$ , die Spitze  $S(0/0/h)$  auf die  $z$ -Achse und den Ausgangspunkt  $P_0(r/0/0)$  auf die  $x$ -Achse, so hat die um  $\alpha$  gedrehte Mantellinie den Basispunkt  $P_1(r \cdot \cos \alpha / r \cdot \sin \alpha / 0)$ . Der Punkt  $P$  wird durch Verkürzen von  $SP_1$  festgelegt:  $SP = f \cdot SP_1$ . Wählt man  $\alpha$  als Parameter  $u$ , so kann für den Faktor  $f = f(u)$  eine beliebige monoton fallende Funktion mit  $f(0) = 1$  verwendet werden. Daraus ergibt sich die Parameterdarstellung für die Spirallinie:

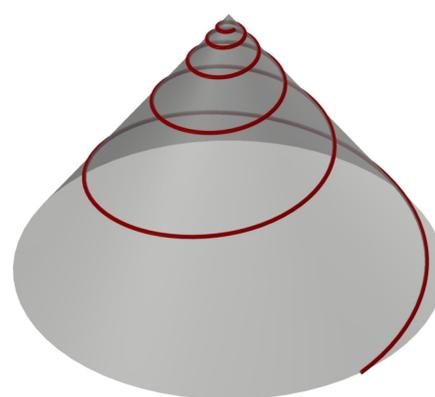
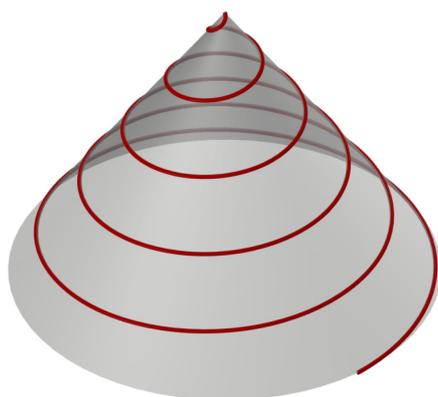
$$P(u) = S + f(u) \cdot \overrightarrow{SP_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} + f(u) \cdot \begin{pmatrix} r \cdot \cos u \\ r \cdot \sin u \\ -h \end{pmatrix}$$

$$x(u) = r \cdot f(u) \cdot \cos u, \quad y(u) = r \cdot f(u) \cdot \sin u, \quad z(u) = h \cdot (1 - f(u))$$



Die beiden Bilder zeigen die wichtigsten Spirallinien:

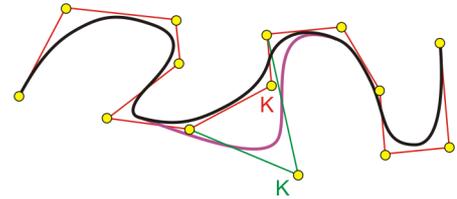
- Bei einem linearen Verkürzungsfaktor  $f(u) = 1 - c \cdot u$  ergibt sich eine **Archimedische Spirale** (linkes Bild). Sie erreicht die Spitze  $S$  für  $u = 1/c$ . Wählt man für die Konstante  $c$  etwa  $c = 1/10\pi \approx 0,032$ , so ist dies nach fünf Umläufen der Fall. Die Spirale schneidet auf allen Mantellinien gleich lange Strecken aus: Wenn ein Punkt  $P = P(u)$  nach einer vollen Umdrehung den Punkt  $Q = P(u + 2\pi)$  erreicht, dann hat der Verbindungsvektor  $\overrightarrow{PQ} = P(u + 2\pi) - P(u) = -c \cdot 2\pi \cdot \overrightarrow{SP_1}$  eine konstante Länge.
- Bei einem exponentiellen Verkürzungsfaktor  $f(u) = e^{-\lambda \cdot u}$  ergibt sich eine **Logarithmische Spirale** (rechtes Bild). Sie nähert sich der Spitze  $S$  asymptotisch an. Mit einer etwas aufwändigen Rechnung kann man bestätigen, dass die Kurve alle Mantellinien des Kegels unter einem konstanten Winkel  $\varphi$  schneidet (siehe Skizze oben). Die auf einer Mantellinie von der Spirale ausgeschnittenen Strecken werden sukzessive mit dem konstanten Faktor  $e^{-\lambda \cdot 2\pi}$  verkürzt; für  $\lambda = \ln 2 / 2\pi$  ist dies die Halbierung (also für  $f(u) = 0,5^{u/2\pi}$ ).



## Bezierkurven

Mit der Entwicklung des CAD (Computer Aided Design) kam auch der Wunsch auf, frei gestaltete Kurven „in den Computer“ zu bekommen (rechnerisch zu erfassen). Ein hinreichend dichtes Polygon so zu erstellen, dass es einigermaßen glatt aussieht, ist nicht einfach, und die nachträgliche Änderung ist sehr aufwändig.

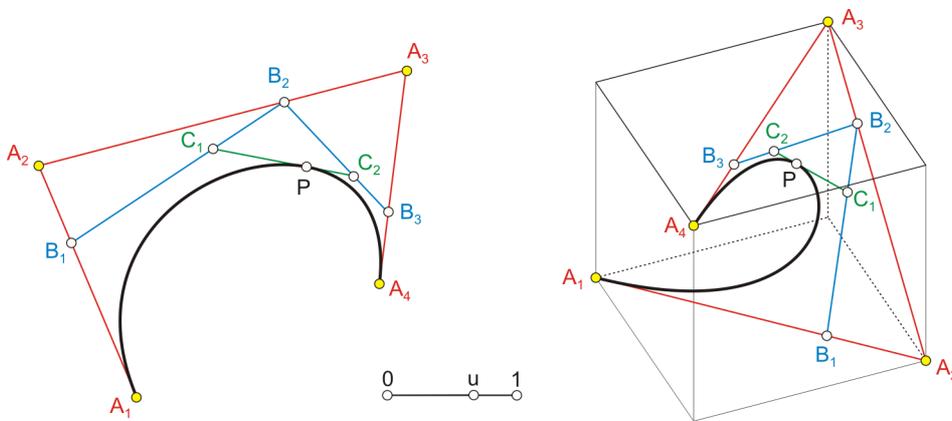
Im CAD wird anders gearbeitet: **Freiformkurven** werden durch wenige **Datenpunkte** (und diverse Einstellungen) festgelegt. Diese Datenpunkte können zB die Eckpunkte eines **Kontrollpolygons** sein. Ein schneller Algorithmus liefert eine glatte Kurve (schwarz), die dem Kontrollpolygon mehr oder weniger genau folgt. Durch Verändern eines **Kontrollpunkts K** ändert sich die Kurve „lokal“.



Die einzugebenden Datenpunkte können auch Punkte auf der gewünschten Kurve sein; man spricht dann von **Interpolation**, im Gegensatz zur oben erwähnten **Approximation**. Auch die interaktive Eingabe von Tangenten ist möglich. Seit den 1960er Jahren wurden viele Methoden entwickelt. Heute sind **B-Splines** und die noch flexibleren **NURBS** (Non Uniform Rational B-Splines) der Standard. Die Algorithmen für diese Kurven sind sehr kompliziert. Bei B-Splines sind die sich ergebenden Koordinatenfunktionen stückweise definierte Polynomfunktionen, bei NURBS stückweise definierte rationale Funktionen.

Die ersten Freiformkurven wurden von **Pierre Bezier** (Renault) und **Paul de Casteljaou** (Citroen) zum Auto-design entwickelt. Diese **Bezierkurven** sind heute noch wichtig, da B-Splinekurven aus ihnen zusammengesetzt sind, wobei in der Regel quadratische und kubische Bezierkurven verwendet werden (siehe unten).

Der Algorithmus für Bezierkurven ist einfach und von der Dimension unabhängig. Ausgehend von einem Kontrollpolygon mit zB vier Kontrollpunkten  $A_1, A_2, A_3, A_4$  ist nur das Teilen von Strecken mit demselben Prozentsatz erforderlich: Zuerst werden die roten Strecken mit dem Prozentsatz  $u$  (zB  $u = 0,7 = 70\%$ ) geteilt, dann die entstehenden blauen Strecken, und schließlich noch die grüne Strecke. Der letzte Teilungspunkt  $P$  liegt auf der Bezierkurve. Lässt man  $u$  von 0 bis 1 wandern, so bewegt sich  $P$  von  $A_1$  nach  $A_2$ .



Für die Herleitung der entsprechenden Parameterdarstellung muss man nur Strecken in einem gegebenen Verhältnis teilen können. Für den Teilungspunkt  $T$  einer Strecke  $AB$  im Verhältnis  $u:(1-u)$  gilt:

$$T = A + u \cdot \overline{AB} = A + u \cdot (B - A) \Rightarrow T = (1-u) \cdot A + u \cdot B$$

Für eine Bezierkurve mit vier Kontrollpunkten  $A_1$  bis  $A_4$  erhält man so der Reihe nach:

- $B_1 = (1-u) \cdot A_1 + u \cdot A_2, B_2 = (1-u) \cdot A_2 + u \cdot A_3, B_3 = (1-u) \cdot A_3 + u \cdot A_4$
- $C_1 = (1-u) \cdot B_1 + u \cdot B_2, C_2 = (1-u) \cdot B_2 + u \cdot B_3$
- $P = (1-u) \cdot C_1 + u \cdot C_2$

Setzt man nun die Punkte der ersten Zeile in die zweite Zeile ein, und danach in die dritte Zeile, so erhält man nach Umformung die Parameterdarstellung der Bezierkurve:

$$P(u) = (1-u)^3 \cdot A_1 + 3 \cdot (1-u)^2 \cdot u \cdot A_2 + 3 \cdot (1-u) \cdot u^2 \cdot A_3 + u^3 \cdot A_4 ; 0 \leq u \leq 1$$

Bei vier Kontrollpunkten sind die Koordinatenfunktionen Polynome vom Grad 3; man spricht daher von einer **kubischen Bezierkurve**. Bei n Kontrollpunkten ergeben sich Polynome vom Grad n-1. Die Polynome für die Grade 4, 5, 6 usw. lassen sich übrigens leicht erraten, wenn man an das Pascaldreieck denkt. Sie sind als **Bernsteinpolynome** bekannt.

Für die Ableitungsvektoren der kubischen Bezierkurve ergibt sich

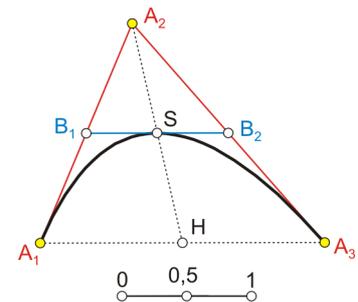
$$\begin{aligned}\dot{P}(u) &= -3 \cdot (1-u)^2 \cdot A_1 + 3 \cdot (1-4u+3u^2) \cdot A_2 + 3 \cdot (2u-3u^2) \cdot A_3 + 3 \cdot u^2 \cdot A_4 \\ \ddot{P}(u) &= 6 \cdot (1-u) \cdot A_1 + 3 \cdot (-4+6u) \cdot A_2 + 3 \cdot (2-6u) \cdot A_3 + 6 \cdot u \cdot A_4\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von u=0 und u=1 erhält man

$$\begin{aligned}\dot{P}(0) &= -3 \cdot A_1 + 3 \cdot A_2 = 3 \cdot \overline{A_1 A_2} & \dot{P}(1) &= -3 \cdot A_3 + 3 \cdot A_4 = 3 \cdot \overline{A_3 A_4} \\ \ddot{P}(0) &= 6 \cdot A_1 - 12 \cdot A_2 + 6 \cdot A_3 = 6 \cdot (\overline{A_2 A_1} + \overline{A_2 A_3}) & \ddot{P}(1) &= 6 \cdot A_2 - 12 \cdot A_3 + 6 \cdot A_4 = 6 \cdot (\overline{A_3 A_2} + \overline{A_3 A_4})\end{aligned}$$

Dies lässt erkennen, dass die Bezierkurve im Anfangspunkt  $P(0) = A_1$  und im Endpunkt  $P(1) = A_4$  die erste und die letzte Strecke des Kontrollpolygons  $A_1 A_2 A_3 A_4$  berührt, und dass bei einer räumlichen Bezierkurve die Schmiegeebenen im Anfangs- und Endpunkt von den Dreiecken  $A_1 A_2 A_3$  und  $A_2 A_3 A_4$  festgelegt werden. Mit mehr Aufwand lässt sich auch nachrechnen, dass die Gerade  $[C_1, C_2]$  die Tangente im Punkt  $P(u)$  ist und die Ebene  $[B_1, B_2, B_3]$  die Schmiegeebene. Analoge Aussagen gelten für alle Bezierkurven.

Eine Bezierkurve mit drei Kontrollpunkten hat den Grad 2 und ist demnach ein **Parabelbogen** (vgl. Seite 3). Sie wird als **quadratische Bezierkurve** bezeichnet. Für  $u = 0,5$  erhält man den **Schulterpunkt S** des Bogens. Er halbiert offensichtlich die Strecke  $HA_2$ , wobei H der Halbierungspunkt von  $A_1 A_3$  ist. Der Parabelbogen ist schiefsymmetrisch zur Strecke  $HA_2$ .



Aus dem oben beschriebenen Algorithmus folgt: Teilt man die Strecken  $A_1 A_2$  und  $A_2 A_3$  jeweils im selben Verhältnis  $u:(1-u)$  und verbindet die Teilungspunkte, so hüllen diese Strecken einen Parabelbogen ein; die Berührungspunkte mit dem Parabelbogen teilen diese Strecken ebenfalls in diesem Verhältnis. Vielleicht war diese längst bekannte Parabeleigenschaft die Idee zur Entwicklung der Bezierkurven.

Um einen Parabelbogen mit dem Anfangspunkt  $A_1(2/0/0)$ , dem Endpunkt  $A_3(0/6/0)$  und dem Schulterpunkt  $S(1/0/5)$  mit der Formel für Bezierkurven zu parametrisieren, muss man zuerst den Kontrollpunkt  $A_2$  berechnen:  $A_2 = H + 2 \cdot \overline{HS} = (1/3/10)$ . Einsetzen in die Formel und Umformen liefert:

$$P(u) = (1-u)^2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot (1-u) \cdot u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} + u^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x(u) = -2u + 2 \quad , \quad y(u) = 12u^2 - 6u \quad , \quad z(u) = -20u^2 + 20u \quad ; \quad 0 \leq u \leq 1$$

Die Bezierkurven haben zwei Nachteile, die zur Entwicklung der flexibleren B-Splines geführt haben:

- Bei vielen Kontrollpunkten folgen sie dem Verlauf des Kontrollpolygons nur schlecht und sind aufgrund des hohen Grads der Koordinatenfunktionen „schwerfällig“.
- Bei Änderung eines Kontrollpunkts ändert sich die Kurve in ihrem gesamten Verlauf.

B-Splines vom Grad 2 sind aus quadratischen Bezierkurven zusammengesetzt. Die Übergangsstellen sind „tangentenstetig“ (gleiche Tangenten). B-Splines vom Grad 3 bestehen aus kubischen Bezierkurven. Die Übergangsstellen sind „krümmungsstetig“ (gleiche Krümmungskreise).

NURBS sind eine Weiterentwicklung der B-Splines und beseitigen deren Nachteil, dass technisch wichtige Kurven wie Kreisbögen oder Schraublinien nicht exakt dargestellt werden können. Bei NURBS können die Kontrollpunkte zusätzlich gewichtet werden, um die Kurve lokal anzuziehen oder abzuweisen.

# Aufgaben

Die folgenden Aufgaben (zuerst 2D, dann 3D) sind breit gestreut und reichen von „ganz leicht“ bis „recht schwierig“. Die Begriffe und Formeln sind in den vorhergehenden Abschnitten **Grundlagen** und **Beispiele** zusammengestellt.

Über den einfachen Taschenrechner hinausgehende Technologie (wie etwa **GeoGebra**) erleichtert viele Berechnungen und ist manchmal auch erforderlich. Es widerspricht aber dem Ziel dieser Aufgaben, sie mit CAS-Software zu „erschlagen“. Bei einigen Aufgaben ist grafisches Darstellen von parametrisierten Kurven verlangt, auch mit Hilfe von Schiebereglern.

Alle Aufgaben enthalten Grafiken. Sie wurden mit „Echtdaten“ erzeugt, sind also nicht bloß symbolisch zu verstehen. Dies erleichtert den Einstieg in die Aufgabe, unterstützt die Suche nach einem Lösungsweg und ermöglicht eine optische Kontrolle der Ergebnisse.

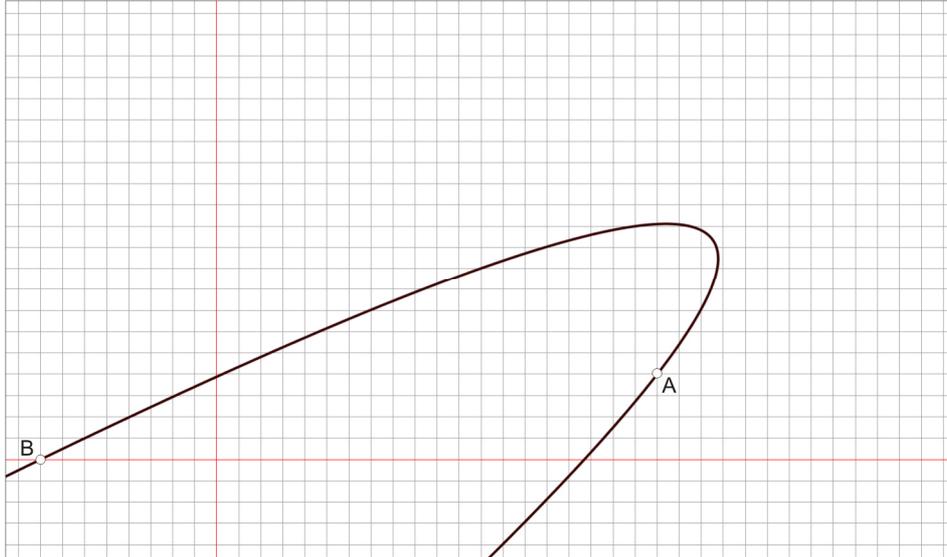
Alle Aufgaben sind gegliedert; die Teilaufgaben sprechen unterschiedliche Inhalte an und erfordern unterschiedliche Handlungen. Das Einzeichnen von Ergebnissen (sowohl 2D als auch 3D) soll die Berechnungen konkretisieren und die Vorstellung fördern. Ein hochgestelltes **D** kennzeichnet Aufgaben, die durch bloßes Nachdenken oder mit einer kurzen Rechnung gelöst werden können. Die Kennzeichnung **+** weist auf höhere Komplexität oder höhere Schwierigkeit hin.

## Aufgabe 1

Die angegebene Kurve ist durch die folgende Parameterdarstellung festgelegt:

$$x(u) = -13 \cdot u^2 - 14 \cdot u + 19, \quad y(u) = -9 \cdot u^2 - 2 \cdot u + 11$$

Da die Koordinatenfunktionen quadratische Polynome in  $u$  sind, liegt eine **Parabel** vor (siehe Seite 3).



- Gib eine Gleichung der zu  $u=0,4$  gehörenden Tangente an.
- Untersuche, ob der Punkt  $Q(-56/-21)$  auf der Parabel liegt.
- Berechne jenen Kurvenpunkt  $R$ , in dem die Tangente parallel zur  $x$ -Achse ist.
- Im Schulterpunkt  $S$  des von  $A$  nach  $B$  gehenden Kurvenbogens ist die Tangente parallel zur Sehne  $AB$ . Berechne  $S$  und den Schnittpunkt  $T$  der Tangenten in  $A$  und  $B$ . Zeige, dass die Gerade  $TS$  die Sehne  $AB$  im Halbpunkt  $H$  schneidet.
- Berechne den Krümmungsmittelpunkt für  $S$  und zeichne den Krümmungskreis ein.
- <sup>+</sup> Berechne den Scheitel  $S^*$  der Parabel.

## Fortsetzung Aufgabe 1<sup>+</sup>

Quadratische Koordinatenfunktionen

$$x(u) = A \cdot u^2 + B \cdot u + C, \quad y(u) = D \cdot u^2 + E \cdot u + F$$

legen in der Regel eine Parabel fest, deren Achse parallel zum Vektor  $\mathbf{c} = (A/D)$  ist (siehe Seite 3).

**Hinweis:** Die Ausnahme der Regel liegt vor, wenn die Vektoren  $\mathbf{c} = (A/D)$  und  $\mathbf{b} = (B/E)$  parallel sind, wenn also  $A \cdot E = B \cdot D$  ist; hier ist die Kurve geradlinig.

- Die Parameterwerte  $u_1, u_2$  seien beliebig gewählt;  $m = (u_1 + u_2)/2$  ist ihr arithmetisches Mittel. Zeige, dass  $S = P(m)$  der Schulterpunkt des die Punkte  $P_1 = P(u_1)$  und  $P_2 = P(u_2)$  verbindenden Parabelbogens ist.
- Ermittle den Parameterwert  $u^*$ , mit dem der Parabelscheitel  $S^* = P(u^*)$  berechnet werden kann. Überprüfe die Formel für  $u^*$  anhand von Aufgabe 1f.
- Interpretiere den Parameter  $u$  als Zeit  $t$  und zeige, dass in Bahngeschwindigkeit im Scheitel  $S^*$  minimal ist. Berechne auch die Normalbeschleunigung  $n$  in  $S^*$ .

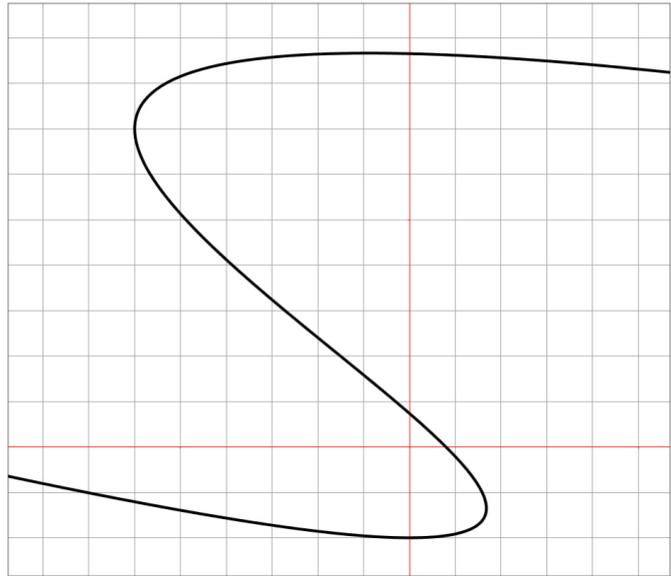
## Aufgabe 2

Die angegebene Kurve ist durch die folgende Parameterdarstellung festgelegt:

$$x(u) = 30 \cdot u^3 - 54 \cdot u^2 + 18 \cdot u$$

$$y(u) = -9 \cdot u^3 + 18 \cdot u^2 - 2$$

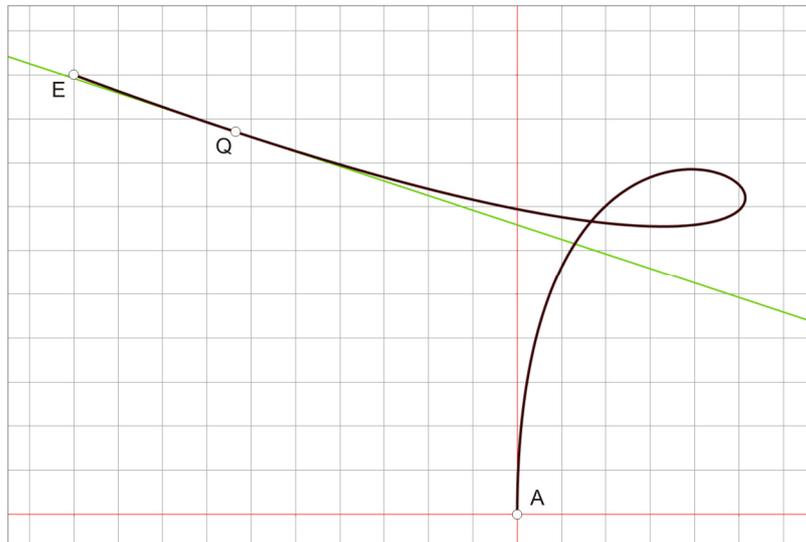
- Zeichne den Kurvenpunkt P und seine Tangente für den Parameterwert  $u=0,8$  ein.
- D** Untersuche, ob der Punkt Q(60/-2) auf der Kurve liegt (Kopfrechnung).
- Berechne alle Punkte, deren Tangenten parallel zur y-Achse sind.
- Berechne jenen Wendepunkt W, der im dargestellten Ausschnitt liegt. Berechne auch die Steigung der Wendetangente  $t_w$ . Zeichne W und  $t_w$  ein.



## Aufgabe 3

Der angegebene Kurvenbogen hat die folgende Parameterdarstellung:

$$x(u) = -60 \cdot u^3 + 50 \cdot u^2, \quad y(u) = 60 \cdot u^3 - 100 \cdot u^2 + 50 \cdot u; \quad 0 \leq u \leq 1$$

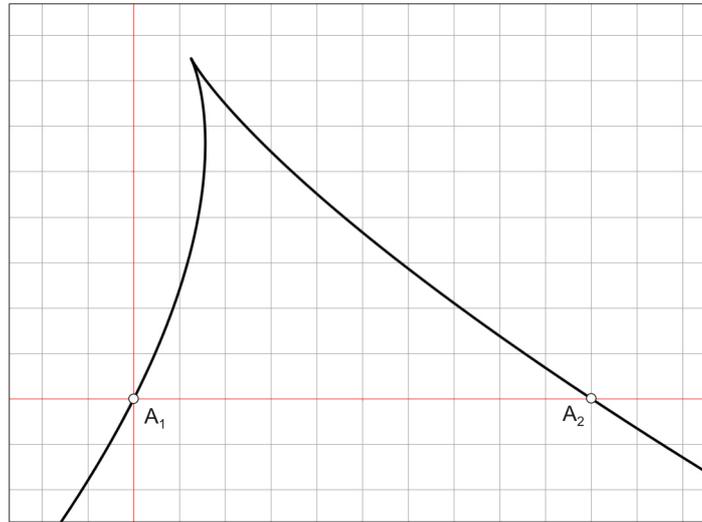


- Zeichne für den Parameterwert  $u=0,3$  ein: Punkt P, Tangente in P, Krümmungskreis in P.
- Berechne den Schnittwinkel der Kurve mit der y-Achse und kontrolliere ihn anhand der Grafik.
- Berechne jenen (von A verschiedenen) Kurvenpunkt, dessen Tangente parallel zur y-Achse ist.
- Zeichne die Gerade  $2x + 2y = 25$  ein und untersuche, ob sie eine Tangente der Kurve ist.
- Die eingezeichnete Tangente hat den Richtungsvektor  $(3/-1)$ . Berechne ihren Berührungspunkt Q.
- f**\* Die Parametrisierung wurde mit der Formel für kubische Bezierkurven erstellt (siehe Seite 25). Ermittle die vier Kontrollpunkte.

## Aufgabe 4

Die angegebene Kurve ist durch die folgende Parameterdarstellung festgelegt:

$$x(u) = 40 \cdot u^3 - 45 \cdot u^2 + 15 \cdot u, \quad y(u) = -30 \cdot u^2 + 30 \cdot u$$

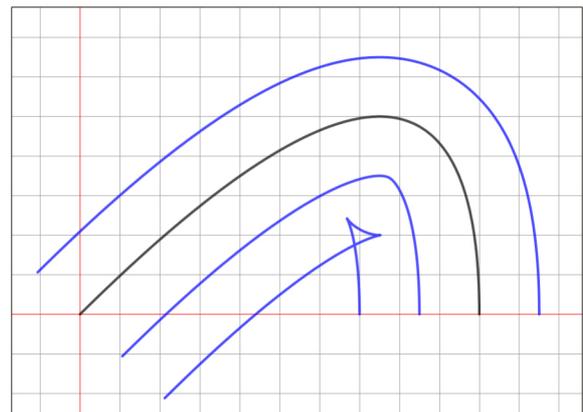


- Berechne den Schnittpunkt T der Tangenten in den Punkten  $A_1$  und  $A_2$ . Zeichne die Tangenten ein.
- Schneide die Tangente in  $A_2$  mit der Kurve (Restschnittpunkt R) und ermittle die Tangente in R.
- Zeige, dass die Kurve eine Spitze S (eine Singularität) hat und berechne ihre Koordinaten.
- Ermittle eine Gleichung der Tangente in der Spitze S und zeichne die Tangente ein.
- \* Die Grafik suggeriert, dass die Kurve schiefssymmetrisch ist. Untersuche, ob das tatsächlich zutrifft.

## Aufgabe 5

Ein Parabelbogen ist als Bezierkurve  $[A_1(0/0), A_2(10/10), A_3(10/0)]$  festgelegt (siehe Seite 25).

- Gib eine Parameterdarstellung des Parabelbogens an.
- Die Grafik zeigt Parallelkurven des Parabelbogens mit den orientierten Abständen  $-3/2$ ,  $3/2$  und  $3$ . Ermittle die Parameterdarstellung der Parallelkurve mit dem orientierten Abstand  $d$ .
- Überprüfe die Parametrisierung (zB mit GeoGebra). Verwende für  $d$  einen Schieberegler.



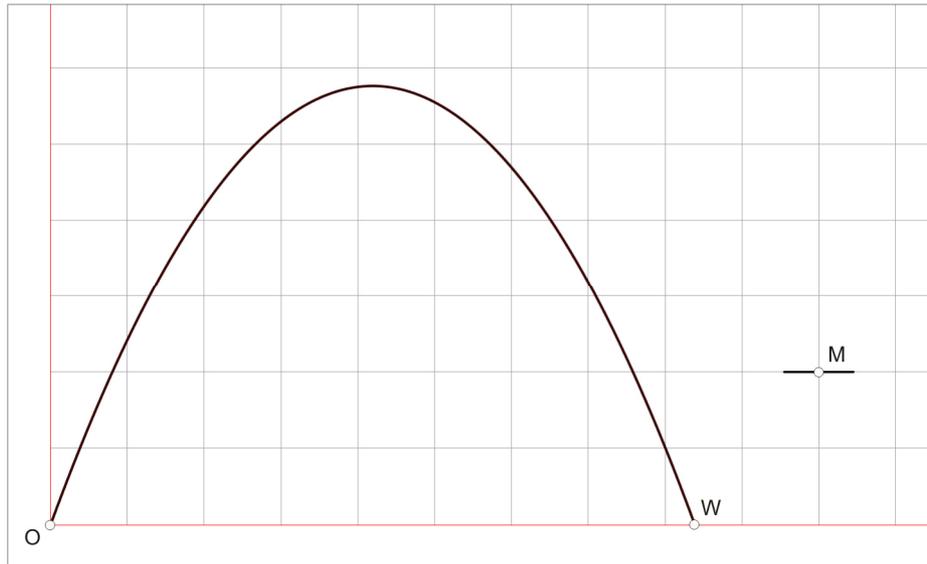
- \* Berechne den Scheitel  $S^*$  der Parabel und den Krümmungsmittelpunkt  $M$  für  $S^*$ . Zeichne die Parabelachse und die vier Krümmungskreise mit dem Mittelpunkt  $M$  ein.
- \* Berechne die beiden Spitzen der Parallelkurve mit dem Abstand  $d = 3$ .
- \* Für einen  $d$ -Wert zwischen  $1,5$  und  $3$  fallen die beiden Spitzen zusammen. Berechne diesen  $d$ -Wert.

## Aufgabe 6

Ein Basketball wird vom Ursprung unter dem Höhenwinkel  $\alpha_0$  mit der Geschwindigkeit  $v_0$  abgeworfen. Die Schwerkraft wirkt in Richtung der  $y$ -Achse. Die Wurfbahn hat gemäß Seite 16 die folgende Parameterdarstellung, wobei der Parameter  $t$  die seit dem Abwurf verstrichene Zeit ist (in Sekunden).

$$x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha_0 \cdot t, \quad y(t) = v_0 \cdot \sin \alpha_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Die Grafik zeigt die Wurfbahn für  $v_0 = 8 \text{ m/s}$  und  $\alpha_0 = 70^\circ$ . Der Koordinatenraster hat die Einheit  $0,5 \text{ m}$ .

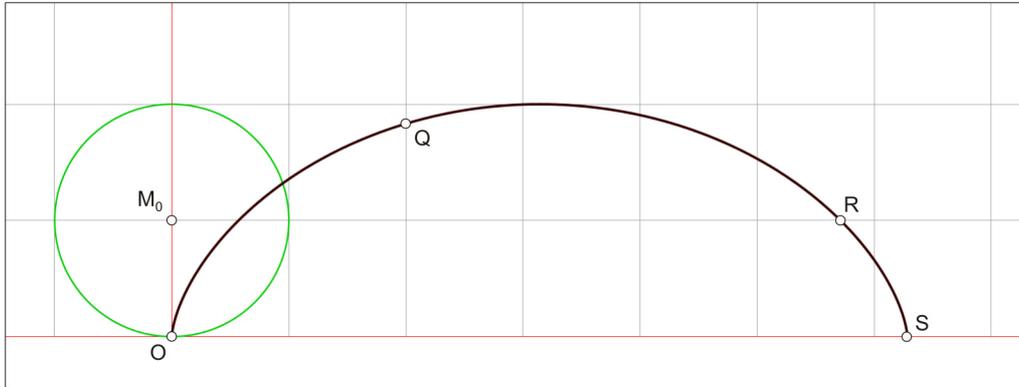


- Berechne den höchsten Punkt der Wurfbahn.
- Berechne den Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  und seinen Neigungswinkel (Winkel zur positiven  $x$ -Achse) für den Zeitpunkt  $t = 0,5$ .
- Zeichne den Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$ , den Beschleunigungsvektor  $\mathbf{a}$  sowie die Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{n}$  für die Bahnbeschleunigung  $\mathbf{b}$  und die Normalbeschleunigung  $\mathbf{n}$  für den Zeitpunkt  $t = 0,5$  ein. Verwende für die Vektoren den Maßstab  $1:4$ .
- Berechne die Bahngeschwindigkeit  $v$ , die Bahnbeschleunigung  $\mathbf{b}$  und die Normalbeschleunigung  $\mathbf{n}$  für den Zeitpunkt  $t = 0,5$ .
- <sup>D</sup> Zeichne den Krümmungskreis für den Zeitpunkt  $t = 0,5$  ein.
- Der Spieler hat den Korb weit verfehlt, da der Abwurfwinkel  $\alpha_0 = 70^\circ$  zu groß war. Berechne den Abwurfwinkel so, dass der Ball genau in den Korb fällt (M ist der Randmittelpunkt). Die Abwurfgeschwindigkeit von  $8 \text{ m/s}$  soll beibehalten werden. Berechne auch die Flugzeit von O bis M.
- <sup>D</sup> Berechne die maximal mögliche Wurfweite OW, wenn der Abwurfwinkel  $45^\circ$  ist und die Decke des Raums  $3 \text{ m}$  über der Abwurfstelle liegt. Berechne auch die Abwurfgeschwindigkeit  $v_0$ .

## Aufgabe 7

Ein Rad ( $r = 1$  m) rollt mit konstanter Geschwindigkeit auf der  $x$ -Achse. Die Bahnkurve eines Punktes für eine volle Umdrehung ist dargestellt. Wenn die volle Umdrehung genau eine Sekunde dauert, dann hat die Bahnkurve die folgende Parameterdarstellung, wobei der Parameter  $t$  die in Sekunden gemessene Zeit ist.

$$x(t) = 2\pi \cdot t - \sin(2\pi \cdot t) \quad , \quad y(t) = 1 - \cos(2\pi \cdot t)$$

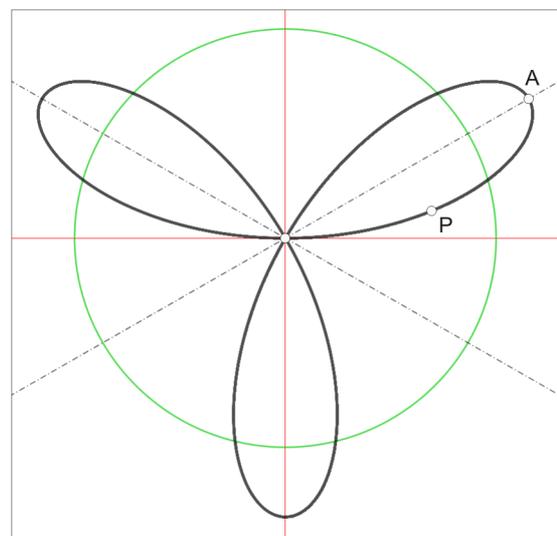


- Berechne den Punkt Q und die Steigung der Tangente. Zeichne die Tangente mit Hilfe der Steigung ein.
- Der höchste Punkt wird zum Zeitpunkt  $t = 0,5$  erreicht. Berechne die Bahngeschwindigkeit und die Bahnbeschleunigung im höchsten Punkt.
- Zeige, dass der Betrag des Beschleunigungsvektors  $\mathbf{a}$  während der gesamten Bewegung konstant ist.
- Berechne den Punkt R und gib eine Gleichung der Tangente an.
- Zeichne im Punkt R den Beschleunigungsvektor  $\mathbf{a}$  sowie die Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{n}$  für die Bahn- und Normalbeschleunigung im Maßstab 1:20 ein.
- Berechne in R die Bahngeschwindigkeit  $v$ , die Bahnbeschleunigung  $b$  und die Normalbeschleunigung  $n$ .
- <sup>D</sup> Der Punkt wird auf dem Weg zu S stark abgebremst; im Punkt S ist die Bahngeschwindigkeit 0. Die (negative) Bahnbeschleunigung in S ist mit der üblichen Formel nicht berechenbar (wegen  $0/0$ ). Ermittle trotzdem die Bahnbeschleunigung in S.

## Aufgabe 8

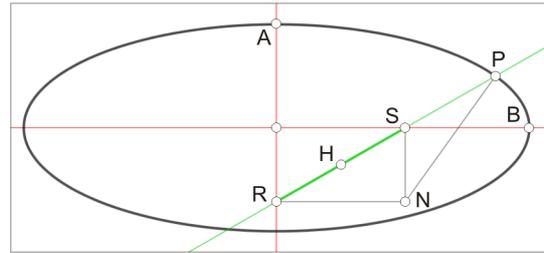
Die Grafik zeigt eine spezielle Hypotrochoide (siehe Seite 18). Der ruhende Kreis (grün) hat den Radius 1 m. Der rollende Kreis ist nicht eingezeichnet.

- Passe die auf Seite 18 gegebene allgemeine Parameterdarstellung für Hypotrochoiden an.
- Überprüfe die Parametrisierung (zB mit GeoGebra).
- Der rollende Kreis rollt mit der konstanten Geschwindigkeit von 1 m/s. Berechne die Zeit, die der Punkt P zum Durchlaufen der Bahnkurve benötigt.
- Im Punkt A ist die Bahngeschwindigkeit  $v$  minimal. Berechne  $v$  sowie die Bahnbeschleunigung  $b$  und die Normalbeschleunigung  $n$ .
- <sup>D</sup> Berechne den Krümmungsradius im Punkt A.



## Aufgabe 9

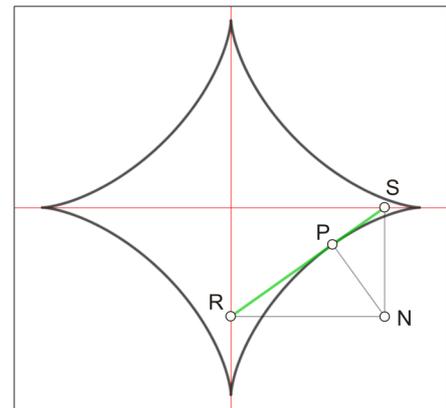
Die Strecke RS hat die Länge 1. Die Gerade [R, S] wird so bewegt, dass R und S auf den Koordinatenachsen gleiten. Der Punkt P hat vom Halbpunkt H von RS den konstanten orientierten Abstand  $d$  (Grafik:  $d = +1,2$ ).



- Ermittle eine Parameterdarstellung der Bahn von P. Verwende dazu einen zweckmäßigen Parameter, wie etwa den Winkel von RS zur y-Achse.
- Überprüfe die Parametrisierung (zB mit GeoGebra). Verwende für  $d$  einen Schieberegler.
- Begründe, dass die Bahn von P in der Regel eine **Ellipse** ist. Beschreibe die Bahn in Abhängigkeit von  $d$ .
- Untersuche, ob NP die Kurvennormale in P ist.
- Gib die Krümmungsradien in den Scheiteln A und B für  $d > 0,5$  mit Hilfe der Längen PR und PS an.
- <sup>+</sup> Gib den Krümmungsradius in P für  $d > 0,5$  mit Hilfe der Längen PN, PR und PS an.

## Aufgabe 10

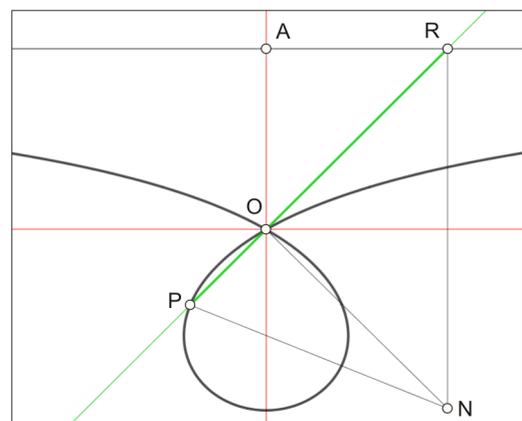
Die Strecke RS hat die Länge 1 und wird so bewegt, dass R und S auf den Koordinatenachsen gleiten. Der Punkt P ist der Normalenfußpunkt von N auf RS. Der Punkt P durchläuft eine **Astroide**.



- Ermittle eine Parameterdarstellung der Astroide. Verwende dazu einen zweckmäßigen Parameter, wie etwa den Winkel von RS zur y-Achse.
- Überprüfe die Parametrisierung (zB mit GeoGebra).
- Untersuche, ob RS die Kurventangente in P ist.
- Berechne den Umfang der Astroide.
- <sup>+</sup> Ermittle für das rechte untere Viertel der Astroide die Bogenlängenparametrisierung, mit der Spitze  $(0/-1)$  als Anfangspunkt der Bogenmessung. Überprüfe, dass der Tangentenvektor  $P'(s)$  die Länge 1 hat.

## Aufgabe 11

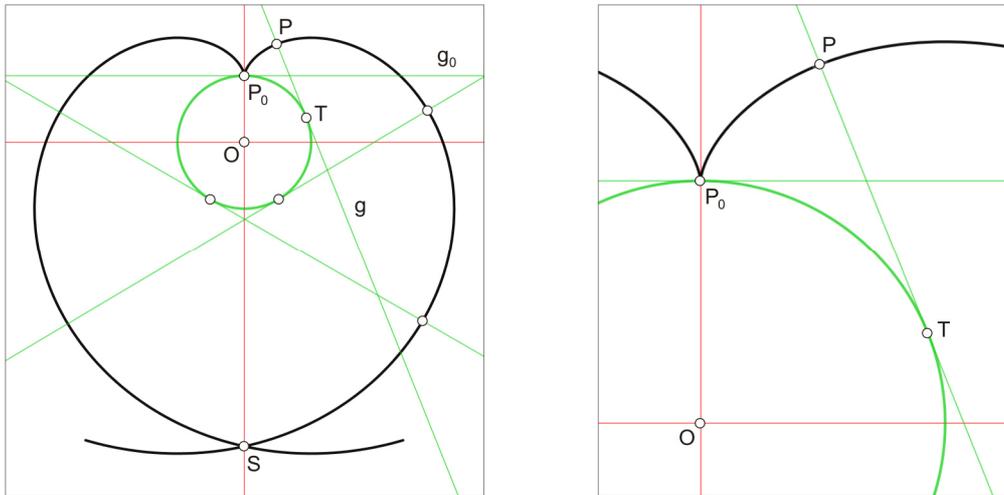
Der Punkt R bewegt sich auf der x-parallelen Geraden durch  $A(0/1)$ . Die Gerade [R, P] geht stets durch den Ursprung O. Die Strecke RP hat die konstante Länge  $d$ . Die Bahn von P bezeichnet man als **Konchoide**.



- Ermittle eine Parameterdarstellung der Bahn von P. Verwende dazu den Winkel  $u = \angle ROA$  als Parameter.
- Überprüfe die Parametrisierung (zB mit GeoGebra). Verwende für  $d$  einen Schieberegler.
- <sup>+</sup> Das Dreieck RON ist rechtwinklig. Untersuche, ob NP die Kurvennormale in P ist.
- Ermittle eine weitere Parameterdarstellung der Kurve mit der Umparametrisierung  $u = \arctan w$ . Sie darf keine trigonometrischen Funktionen enthalten.

## Aufgabe 12

Eine Gerade  $g$  rollt auf einem Kreis. Die Bahnkurven der Punkte von  $g$  nennt man **Kreisevolventen**. In der Grafik ist  $g_0$  parallel zur  $x$ -Achse und  $P_0$  liegt auf der  $y$ -Achse. Alle anderen Punkte von  $g_0$  führen zu Bahnkurven, die nur um den Ursprung  $O$  gedreht sind.



- Ermittle eine Parameterdarstellung der abgebildeten Kreisevolvente, analog zu den Herleitungen auf den Seiten 17 und 18. Der Kreisradius kann oBdA gleich 1 gewählt werden.
- Überprüfe die Parametrisierung (zB mit GeoGebra).
- Zeige, dass die Tangente in  $P$  immer orthogonal zur rollenden Geraden ist.
- <sup>+</sup> Zeige, dass der Krümmungsmittelpunkt der Kurve in  $P$  der Berührungspunkt  $T$  der rollenden Geraden ist.
- <sup>+</sup> Berechne die Länge des Kurvenbogens vom Ausgangspunkt  $P_0$  bis zum Schnittpunkt  $S$  mit der  $y$ -Achse.
- <sup>+</sup> Die Gerade rollt mit konstanter Geschwindigkeit. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  befindet sich der Punkt  $P$  in der Lage  $P_0$ . Zeige, dass die Bahnbeschleunigung  $b$  von  $P$  konstant ist und die Normalbeschleunigung  $n$  von  $P$  proportional zur verstrichenen Zeit  $t$  ist.

**Bemerkung:** Die Eigenschaften c) und d) gelten für alle Evolventen. Sie sind die Bahnkurven der Punkte einer Geraden, die auf einer beliebigen ebenen Kurve rollt (siehe auch Seite 8).

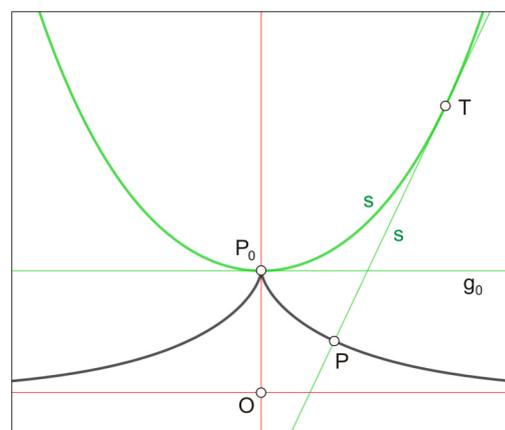
## Aufgabe 13<sup>+</sup>

In Analogie zu Aufgabe 12 rollt nun eine Gerade entlang einer Kurve, die als **Kettenlinie** bekannt ist:

$$x(u) = u, \quad y(u) = \cosh u$$

Die Bahnkurven der Punkte der rollenden Geraden nennt man Evolventen der Kettenlinie. Die Bahnkurve des Punktes  $P_0$  ist die einzige symmetrische Evolvente.

- Ermittle eine Parameterdarstellung dieser Evolvente.
- Überprüfe die Parametrisierung (zB mit GeoGebra).



- Schneide die Tangente in  $P$  mit der  $x$ -Achse. Zeige, dass die Strecke zwischen  $P$  und dem Schnittpunkt die konstante Länge 1 hat.

**Bemerkung:** Die Bahnkurve von  $P$  ist eine **Traktrix**: Befestigt man in  $P_0$  eine Masse und zieht den unteren Endpunkt der Strecke  $OP_0$  entlang der  $x$ -Achse, so bewegt sich der obere Endpunkt auf der Traktrix (auch Schleppkurve genannt).

## Aufgabe 14

Die dargestellte Kurve hat die Parameterdarstellung

$$x(u) = 3 \cdot u, \quad y(u) = 1,5 \cdot u^2, \quad z(u) = u^3; \quad -\infty < u < \infty$$

a) Skizziere die Kurven, die durch Normalprojektion der Raumkurve auf die drei Koordinatenebenen entstehen, und überprüfe die Skizzen (zB mit GeoGebra).

b) <sup>D</sup> Begründe ohne Rechnung, dass die  $xy$ -Ebene die Schmiegebene im Koordinatenursprung ist.

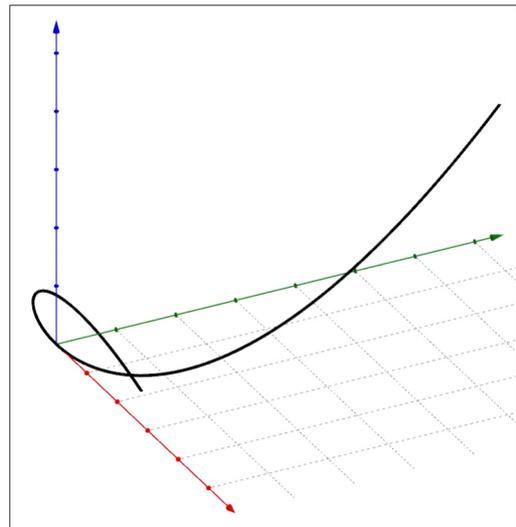
c) Zeichne für  $u = 1$  ein: Punkt  $P$ , Tangentenvektor  $\dot{P}$ .

d) Berechne für  $u = 1$  einen Richtungsvektor der Hauptnormalen  $h$  und der Binormalen  $b$ . Zeichne  $h$  und  $b$  ein.

e) Berechne für  $u = 1$  den Radius  $\rho$  des Krümmungskreises und den Krümmungsmittelpunkt  $M$ .

f) <sup>+</sup> Berechne jenen Kurvenpunkt  $Q(x/y/z > 0)$ , für den die Tangente einen Neigungswinkel von  $50^\circ$  hat (Winkel zur  $xy$ -Ebene).

g) <sup>+</sup> Berechne jenen Kurvenpunkt  $R(x/y/z > 0)$ , für den die Schmiegebene einen Neigungswinkel von  $50^\circ$  hat (Winkel zur  $xy$ -Ebene).



## Aufgabe 15

Eine kubische Bezierkurve (siehe Seite 25) hat die Kontrollpunkte  $A_1(2/0/0)$ ,  $A_2(2/2/1)$ ,  $A_3(0/2/1)$ ,  $A_4(2/0/4)$ .

a) Gib eine Parameterdarstellung der Bezierkurve an.

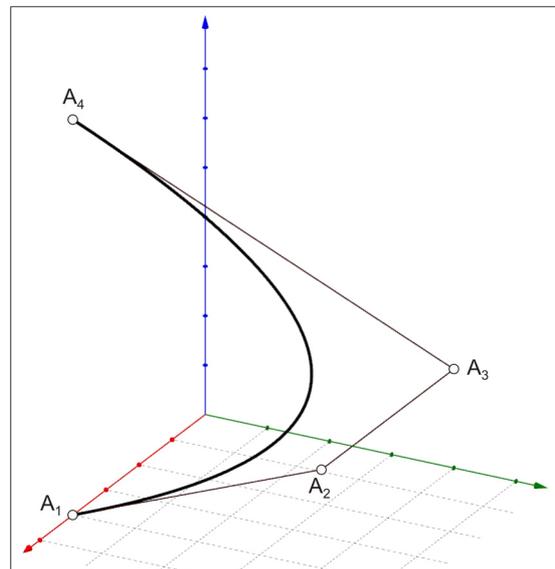
b) Rechne nach, dass die Gerade  $[A_1, A_2]$  die Tangente in  $A_1$  und die Ebene  $[A_1, A_2, A_3]$  die Schmiegebene in  $A_1$  ist.

c) Berechne jenen Kurvenpunkt  $P$ , für den die Tangente parallel zur  $xz$ -Ebene ist.

d) Identifiziere  $P$  in der Grafik und zeichne den Tangentenvektor von  $P$  ein.

e) Berechne einen Richtungsvektor der Hauptnormalen  $h$  und der Binormalen  $b$  von  $P$ . Zeichne  $h$  und  $b$  ein.

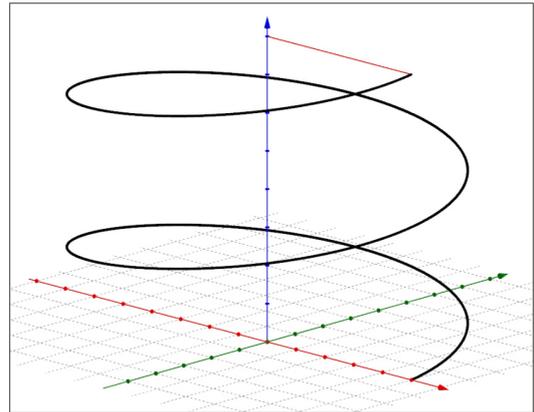
f) Die Schnittpunkte der Schmiegebene in  $P$  mit den Seiten des Kontrollpolygons haben eine bemerkenswerte Lage. Beschreibe diese Lage.



## Aufgabe 16

Die rechts zu sehende Schraublinie (siehe Seite 20) hat einen Radius von 5 m und eine Höhe von 8 m.

- Gib eine Parameterdarstellung der Schraublinie an.
- Berechne den Neigungswinkel der Schraublinie (also den Winkel ihrer Tangenten zur  $xy$ -Ebene).
- Ein Punkt P benötigt 4 Sekunden, um die ganze Bahn mit konstanter Geschwindigkeit zu durchfahren. Gib die Geschwindigkeit in km/h an.
- Berechne die Normalbeschleunigung, die dabei auf P wirkt. Gib das Ergebnis als Vielfaches von  $g$  an.

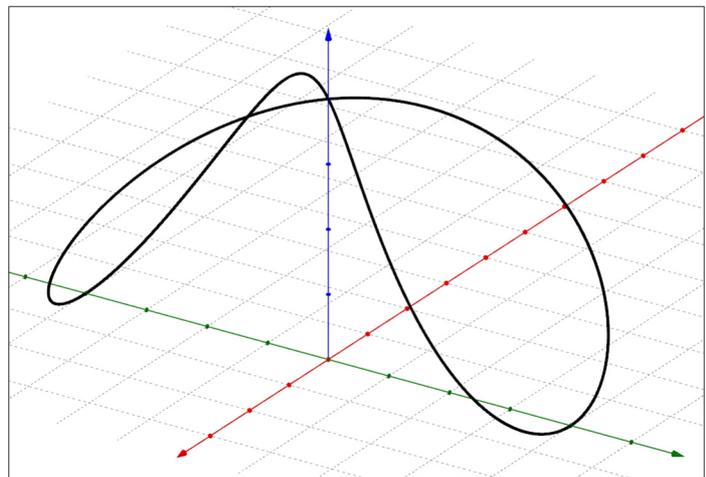


## Aufgabe 17

Die dargestellte Kurve ist als Vivianisches Fenster bekannt und hat die folgende Parameterdarstellung ( $0 \leq u \leq 4\pi$ ):

$$\begin{aligned}x(u) &= \sin u \\y(u) &= 2 \cdot \sin(u/2) \\z(u) &= 1 + \cos u\end{aligned}$$

- Zeige, dass die Kurve auf einem Drehzylinder und einer Kugel liegt.
- <sup>D</sup> Interpretiere den Parameter  $u$  aus geometrischer Sicht durch Normalprojektion der Kurve auf die  $xz$ -Ebene.
- Identifiziere den zu  $u = \pi/2$  gehörenden Punkt P in der Grafik und zeichne den Tangentenvektor von P ein.
- Zeichne die Schnittgerade der Schmiegebene von P mit der  $xz$ -Ebene ein.
- Interpretiere den Parameter  $u$  als Zeit  $t$  (in s gemessen); die Koordinaten werden in m gemessen. Berechne die Bahngeschwindigkeit, die Bahnbeschleunigung und die Normalbeschleunigung im Punkt P.
- Zeichne alle Punkte ein, in denen die Bahnbeschleunigung  $b = 0$  ist.
- <sup>+</sup> Untersuche, ob es Punkte gibt, in denen die Normalbeschleunigung  $n = 0$  ist.



## Aufgabe 18

Die dargestellte Kurve ist eine Rotoide (siehe Seite 22) und hat die folgende Parameterdarstellung ( $0 \leq u \leq 2\pi$ ):

$$x(u) = (3 + 2 \cdot \cos 3u) \cdot \cos u$$

$$y(u) = (3 + 2 \cdot \cos 3u) \cdot \sin u$$

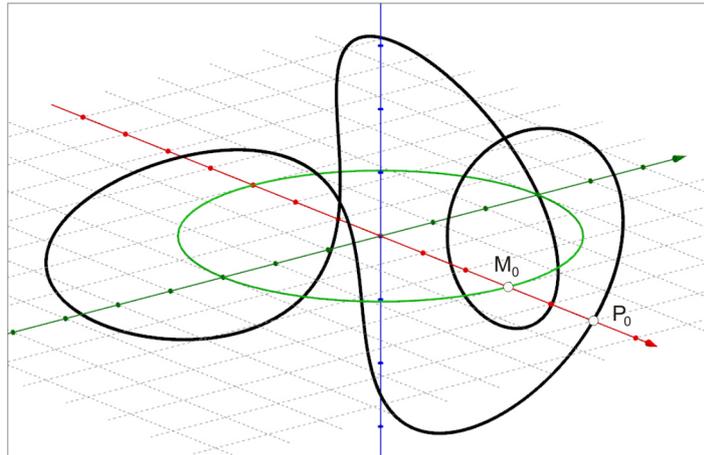
$$z(u) = 2 \cdot \sin 3u$$

a) Berechne den Neigungswinkel der Tangente in  $P_0$  (Winkel zur  $xy$ -Ebene) und zeichne die Tangente ein.

b) Ermittle alle Schnittpunkte der Kurve mit der  $x$ -Achse.

c) <sup>D</sup> Untersuche, ob die Kurve auch die  $y$ -Achse schneidet.

d) Berechne den zu  $u = 3\pi/2$  gehörenden Punkt und seinen Tangentenvektor. Identifiziere den Punkt in der Grafik und zeichne den Tangentenvektor ein.



## Aufgabe 19<sup>+</sup>

Gegeben ist ein in der  $yz$ -Ebene liegender Parabelbogen:

$$x(u) = 0, \quad y(u) = u, \quad z(u) = 1 + 0,5 \cdot u^2; \quad -2 \leq u \leq 2$$

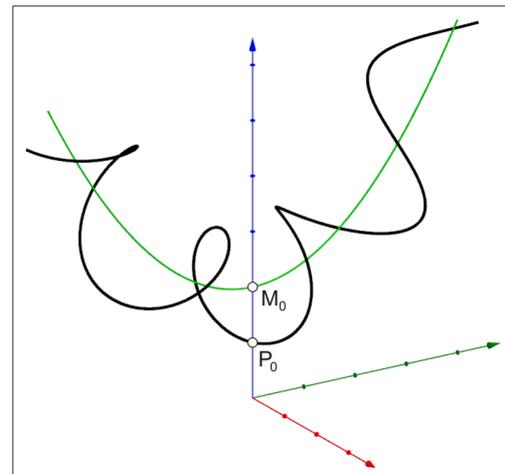
Ein Kreis ( $r = 0,5$ ) wird mit seinem Mittelpunkt  $M$  so entlang des Parabelbogens geführt, dass seine Ebene orthogonal zur Tangente in  $M$  ist. Auf dem Kreis rotiert ein Punkt  $P$ . In der Ausgangslage ( $u = 0$ ) liegen  $M$  und  $P$  auf der  $z$ -Achse:  $M_0(0/0/1)$ ,  $P_0(0/0/0,5)$ . Der zum Parameter  $u$  von  $M$  gehörende Drehwinkel  $\alpha$  von  $P$  soll  $6 \cdot u$  sein.

a) Ermittle die Parameterdarstellung dieser verallgemeinerten Rotoide analog zu Seite 23.

b) Überprüfe die Parametrisierung (zB mit GeoGebra).

c) Berechne jenen Kurvenpunkt  $Q$  für  $0 < u < 1/2$ , für den der Abstand von der  $yz$ -Ebene maximal ist.

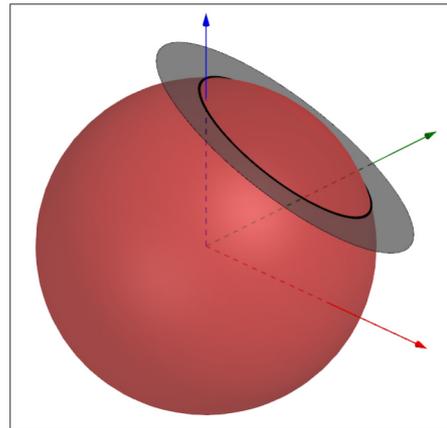
d) Untersuche, ob die Kurve symmetrisch zur  $z$ -Achse ist.



## Aufgabe 20<sup>+</sup>

Die Schnittkurve der Kugel  $x^2 + y^2 + z^2 = 1025$  mit der Ebene  $\varepsilon [0,9 \cdot x + 1,2 \cdot y + 2 \cdot z = 62,5]$  ist ein Kreis. Dieser Kreis kann mit der auf Seite 4 beschriebenen Methode parametrisiert werden.

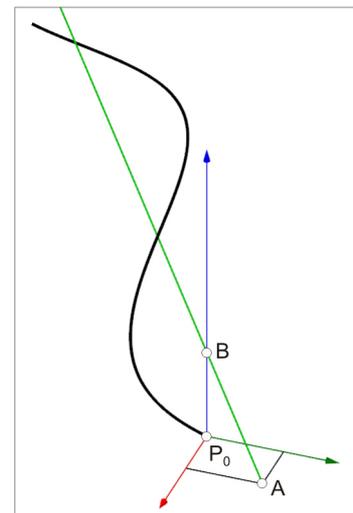
- Berechne den Ursprung  $U$  des lokalen Koordinatensystems, also den Mittelpunkt des Schnittkreises.
- Berechne geeignete Basisvektoren  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  in der Ebene  $\varepsilon$ . Empfehlenswert sind Vektoren in Richtung der Falllinie und der Höhenschichtlinie von  $\varepsilon$  durch  $U$ .
- Parametrisiere den Kreis in einfacher Lage im Hauptkoordinatensystem  $Oxyz$ .
- Übertrage die Parametrisierung in die Ebene  $\varepsilon$ .
- Überprüfe die Parametrisierung (zB mit GeoGebra).



## Aufgabe 21<sup>+</sup>

Der Punkt  $P_0$  wird um die Achse  $AB [A(6/8/0), B(0/0/10)]$  verschraubt (siehe Seite 20). Bei Blick von  $B$  in Richtung  $A$  soll die Drehung positiv erscheinen (Rechtsschraublinie). Die Tangenten der Schraublinie sollen mit der Achse  $AB$  einen Winkel von  $45^\circ$  bilden.

- Berechne den Ursprung  $U$  des lokalen Koordinatensystems, also den Fußpunkt der aus  $P_0$  auf  $AB$  errichteten Normalen.
- Berechne geeignete Basisvektoren  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ .
- Parametrisiere die Schraublinie in einfacher Lage im Hauptkoordinatensystem  $Oxyz$ .
- Übertrage die Parametrisierung in das lokale Koordinatensystem.
- Überprüfe die Parametrisierung (zB mit GeoGebra).



## Lösungen und Hinweise

Hinweise werden nur dann gegeben, wenn der Lösungsweg nicht offensichtlich ist und auch nicht (in ähnlicher Form) in den Abschnitten **Grundlagen** und **Beispiele** beschrieben wurde.

### Aufgabe 1

a)  $P(11,32/8,76)$ ,  $23x - 61y = -274$

b) nein

c)  $u = -1/9$ ,  $R(20,395/11,111)$

d)  $u_A = -1$ ,  $u_B = 1$ ,  $u_S = 0$ ,  $S(19/11)$ ,  $T(32/20)$ ,  $H(6/2)$ ,  $\overline{HS} = (13/9) = \overline{ST}$

Tangentenvektor in S kollinear zum Vektor  $\overline{AB}$ , also gleiche Steigung

e)  $\rho = 10 \cdot \sqrt{2}$ ,  $M(21/-3)$

M liegt auf der Kurvennormalen in S und hat von S den Abstand  $1/\kappa$ .

f)  $u = -0,4$ ,  $S^*(22,52/10,36)$

Die Gerade HS ist parallel zur Parabelachse (siehe Seite 3), also ist die Scheiteltangente orthogonal zu HS.

### Fortsetzung Aufgabe 1

a)  $\overline{P_1P_2} = (A \cdot (u_2^2 - u_1^2) + B \cdot (u_2 - u_1) / D \cdot (u_2^2 - u_1^2) + E \cdot (u_2 - u_1))$  und  $\dot{P}(m) = (A \cdot (u_1 + u_2) + B / D \cdot (u_1 + u_2) + E)$  sind parallel, da  $\overline{P_1P_2} = (u_2 - u_1) \cdot \dot{P}(m)$

b)  $\mathbf{c} = (A/D) \perp \dot{P}(u^*) \Rightarrow u^* = -0,5 \cdot (AB + DE) / (A^2 + D^2)$

c)  $v^2 = \dot{P}^2 = (2A \cdot t + B)^2 + (2D \cdot t + E)^2$  ist extremal  $\Rightarrow 2 \cdot v \cdot \dot{v} = 4A \cdot (2A \cdot t + B) + 4D \cdot (2D \cdot t + E) = 0 \Rightarrow t = u^*$ ; minimal wegen  $v^2 \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \pm\infty$

$n = |\ddot{P}|$  wegen  $b = 0 \Rightarrow n = 2\sqrt{A^2 + D^2}$

### Aufgabe 2

a)  $P(-4,8/4,912)$ ,  $\dot{P} \parallel (-3/3,2)$

b) ja

$y = -2 \Rightarrow u = 2 \Rightarrow x = 60$

c)  $u_1 = 1$ ,  $P_1(-6/7)$ ;  $u_2 = 0,2$ ,  $P_2(1,68/-1,352)$

d)  $u = 0,562$ ,  $W(-1,608/2,082)$ ,  $k = -0,820$

### Aufgabe 3

a)  $P(2,88/7,62)$ ,  $\dot{P} = (13,8/6,2)$ ,  $k = 0,449$ ,  $\rho = 2,838$

b)  $u = 5/6$ ,  $\dot{P} \parallel (-5/1) \Rightarrow 78,7^\circ$

c)  $u = 5/9$ ,  $(5,144/7,202)$

d) ja

u-Wert für Tangentenvektor parallel zu Vektor (1/-1) berechnen, ergibt  $u = 0,5$ ; Kurvenpunkt (5/7,5) in Geradengleichung einsetzen

e)  $u = 0,951$ ,  $Q(-6,354/8,705)$

f)  $A_1(0/0)$ ,  $A_2(0/16,667)$ ,  $A_3(16,667/0)$ ,  $A_4(-10/10)$

Kontrollpunkte  $A_2$  und  $A_3$  liegen auf Anfangs- und Endtangente, daher gilt  $A_2(0/\lambda)$  und  $A_3(-10+8\mu/10-3\mu)$ .  
Vergleichen der konkret vorliegenden Parameterdarstellung mit der allgemeinen Parametrisierung einer kubischen Bezierkurve ergibt  $\mu=10/3$  und  $\lambda=50/3$ .

### Aufgabe 4

a)  $t_1 [2x - y = 0]$ ,  $t_2 [2x + 3y = 20]$ ,  $T(2,5/5)$

b)  $u = 0,25$ ,  $R(1,5625/5,625)$ ,  $t_R \parallel y$ -Achse

c)  $u = 0,5$ ,  $S(1,25/7,5)$

Tangentenvektor ist Nullvektor

d)  $t_S [2x + y = 10]$

Richtungsvektor  $\ddot{P}(0,5) = (30/-60)$

e) ja (Symmetrieachse  $t_S$ , Symmetrierichtung  $\parallel x$ -Achse)

$P_1 = P(0,5 - t) = (-40t^3 + 15t^2 + 1,25/-30t^2 + 7,5)$ ,  $P_2 = P(0,5 + t) = (40t^3 + 15t^2 + 1,25/-30t^2 + 7,5) \Rightarrow$   
 $P_1P_2 \parallel x$ -Achse,  $H = 0,5 \cdot (P_1 + P_2) = (15t^2 + 1,25/-30t^2 + 7,5)$  auf  $t_S$

### Aufgabe 5

a)  $x(u) = 20u - 10u^2$ ,  $y(u) = 20u - 20u^2$ ;  $0 \leq u \leq 1$

b)  $x(u) = 20u - 10u^2 + d \cdot \frac{1-2u}{\sqrt{5u^2 - 6u + 2}}$ ,  $y(u) = 20u - 20u^2 + d \cdot \frac{-1+u}{\sqrt{5u^2 - 6u + 2}}$ ;  $0 \leq u \leq 1$

d)  $u = 0,6$ ,  $S^*(8,4/4,8)$ ,  $M(7,6/3,2)$

Die Parabelachse ist parallel zu  $HA_2$  (H ist Halbierungspunkt von  $A_1A_3$ ), also ist der Tangentenvektor in  $S^*$  orthogonal zum Vektor  $\overline{HA_2}$ .

e)  $u_1 = 0,472$ ,  $u_2 = 0,728$ ,  $S_1(7,529/2,001)$ ,  $S_2(6,684/2,423)$

Der Tangentenvektor in einer Spitze ist der Nullvektor. Löse die Gleichung  $\dot{x} = 0$  (oder  $\dot{y} = 0$ ); sie lässt sich auf die quadratische Gleichung  $5u^2 - 6u + 2 - \sqrt[3]{d^2/400} = 0$  reduzieren.

Da die Spitzen auf der Evolute der Parabel liegen müssen, können alternativ auch jene  $u$ -Werte berechnet werden, für die der Krümmungsradius  $\rho$  der Parabel gleich 3 ist. Die Rechnung führt auf die quadratische Gleichung  $5u^2 - 6u + 2 - \sqrt[3]{0,0225} = 0$ , die mit der vorhin angegebenen Gleichung für  $d = 3$  übereinstimmt.

f)  $d = 4/\sqrt{5} = 1,789$ ,  $u_{12} = 0,6$ ,  $S_{12}(7,6/3,2)$

Zusammenfallende Spitzen entsprechen einer Doppellösung der oben genannten quadratischen Gleichung. Daher kann der  $d$ -Wert durch Nullsetzen der Diskriminante berechnet werden. Einfacher kann man den  $d$ -Wert auch als Abstand von  $S^*$  und  $M$  ermitteln.

## Aufgabe 6

a)  $H(2,097/2,880)$

b)  $\mathbf{v} = (2,736/2,613)$ ,  $\alpha = 43,7^\circ$

c)  $\mathbf{b} = (-4,900/-4,678)$ ,  $\mathbf{n} = (4,900/-5,132)$

Die Berechnung von  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{n}$  ist für die Zeichnung nicht erforderlich.

d)  $v = 3,783$  m/s,  $b = -6,775$  m/s<sup>2</sup>,  $n = 7,095$  m/s<sup>2</sup>

e)  $\rho = 2,017$

Der Krümmungsradius  $\rho$  ergibt sich aus den Werten für  $n$  und  $v$  (siehe Seite 13).

f)  $\alpha_0 = 59,97^\circ$ ,  $t = 1,249$  s

Der Ansatz  $x(t) = 5$ ,  $y(t) = 1$  führt auf eine quadratische Gleichung in  $\tan \alpha_0$ . Auch  $\alpha_0 = 41,34^\circ$  ist theoretisch möglich; der Ball würde aber aufgrund seiner Größe am Ring abprallen.

g)  $OW = 12$  m,  $v_0 = 10,850$  m/s

Der Schnittpunkt der Tangenten in  $O$  und  $W$  hat stets die doppelte Höhe wie der Scheitel des Parabelbogens (siehe Seiten 5 oder 26). Die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  ergibt sich aus  $x(t) = 12$ ,  $y(t) = 0$ .

## Aufgabe 7

a)  $t = 0,407$ ,  $Q(2/1,832)$ ,  $k = 0,302$

b)  $H(\pi/2)$ ,  $v = 12,566$  m/s,  $b = 0$

c)  $|\mathbf{a}(t)| = 4\pi^2$

d)  $t = 0,75$ ,  $R(5,712/1)$ ,  $x + y = 6,712$

e)  $\mathbf{a} = (-4\pi^2/0) = (-39,478/0)$

f)  $v = 8,886$  m/s,  $b = -27,915$  m/s<sup>2</sup>,  $n = 27,915$  m/s<sup>2</sup>

g)  $-39,478$  m/s<sup>2</sup>

Der Beschleunigungsvektor in  $S$  ist  $\mathbf{a} = (0/4\pi^2)$ . Da er tangential zur Kurve ist, ist die Normalbeschleunigung gleich 0 und sein Betrag gleich dem Betrag der Bahnbeschleunigung. Das Minus ergibt sich aus der Verringerung der Bahngeschwindigkeit auf 0.

## Aufgabe 8

a)  $x(u) = 2/3 \cdot \sin u + 2/3 \cdot \sin 2u$  ,  $y(u) = 2/3 \cdot \cos u - 2/3 \cdot \cos 2u$  ;  $0 \leq u \leq 2\pi$

c)  $2\pi = 6,283$  s

Da die Rollgeschwindigkeit gleich 1 ist und u die Bogenlänge auf dem ruhenden Kreis ist, gilt  $u = t$ .

d)  $u = t = \pi/3$ ;  $v = 2/3 = 0,667$  m/s,  $b = 0$  m/s<sup>2</sup>,  $n = 10/3 = 3,333$  m/s<sup>2</sup>

Da v minimal ist, ist  $b = 0$  und n gleich dem Betrag des Beschleunigungsvektors **a**.

e)  $\rho = v^2/n = 2/15$

## Aufgabe 9

a)  $x(u) = (0,5 + d) \cdot \sin u$  ,  $y(u) = (-0,5 + d) \cdot \cos u$  ;  $0 \leq u \leq 2\pi$

u ist positiv orientierter Winkel von RS zur y-Achse; Verwendung von Vektorrechnung empfehlenswert

c) Kurve ist skalierter Kreis, also Ellipse

$d > 0,5$ : Ellipse mit Hauptachse auf x-Achse;  $d = 0,5$ : Strecke auf x-Achse;  $0 < d < 0,5$ : Ellipse mit Hauptachse auf x-Achse;  $d = 0$ : Kreis;  $-0,5 < d < 0$ : Ellipse mit Hauptachse auf y-Achse;  $d = -0,5$ : Strecke auf y-Achse;  $d < -0,5$ : Ellipse mit Hauptachse auf y-Achse

d) ja

$N(\sin u / -\cos u)$ , Vektoren  $\overline{PN}$  und  $\dot{P}$  sind orthogonal

e)  $\rho_A = PR^2/PS$ ,  $\rho_B = PS^2/PR$

f)  $\rho = PN^3/(PR \cdot PS)$

## Aufgabe 10

a)  $x(u) = \sin^3 u$  ,  $y(u) = -\cos^3 u$  ;  $0 \leq u \leq 2\pi$

u ist positiv orientierter Winkel von RS zur y-Achse; Verwendung von Vektorrechnung empfehlenswert

c) ja

Vektoren  $\overline{RS}$  und  $\dot{P}$  sind parallel

d)  $u = 6$

e)  $x(s) = \sqrt{(2s/3)^3}$  ,  $y(s) = -\sqrt{(1-2s/3)^3}$  ;  $0 \leq s \leq 1,5$

$s = 3/2 \cdot \sin^2 u$  (bei der oben genannten Parametrisierung)

## Aufgabe 11

a)  $x(u) = \tan u - d \cdot \sin u$  ,  $y(u) = 1 - d \cdot \cos u$  ;  $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$

Verwendung von Vektorrechnung empfehlenswert

c) ja

$N(\tan u / -\tan^2 u)$ , Vektoren  $\overline{PN}$  und  $\dot{P}$  sind orthogonal

d)  $x(w) = w - d \cdot w / \sqrt{w^2 + 1}$  ,  $y(w) = 1 - d / \sqrt{w^2 + 1}$  ;  $-\infty \leq w \leq \infty$

Verwende trigonometrische Umformungen oder interpretiere w geometrisch und führe eine Neuberechnung der Parameterdarstellung durch.

## Aufgabe 12

a)  $x(u) = \sin u - u \cdot \cos u$  ,  $y(u) = \cos u + u \cdot \sin u$  ;  $-\infty < u < \infty$

u ist positiv orientierter Winkel von OT zur y-Achse, also Bogenlänge auf dem Kreis

c)  $T(\sin u / \cos u)$ , Vektoren  $\overline{OT}$  und  $\dot{P}$  sind parallel

d)  $\kappa(u) = -1/u$  nach Vereinfachung der Krümmungsformel, also gilt  $\rho = PT$

e)  $u = 4,493$ ,  $S(0/-4,603)$ ,  $L = 10,095$

Berechnung von u näherungsweise (mit Umformungen nicht möglich), Integration elementar ( $\dot{P}^2 = u^2$ )

f) Kreisbogenlänge u proportional zur Zeit t, also Umparametrisierung  $u = k \cdot t$ ;

$v = |\dot{\mathbf{v}}| = k^2 \cdot t \Rightarrow b = k^2$ ;  $|\mathbf{a}| = k^2 \cdot \sqrt{1+t^2} \cdot k^2 \Rightarrow n = k^3 \cdot t$  (Pythagoras)

## Aufgabe 13

a)  $x(u) = u - \sinh u / \cosh u$  ,  $y(u) = 1 / \cosh u$  ;  $-\infty < u < \infty$

Das Bogenlängenintegral für die Kettenlinie ergibt  $s(u) = \sinh u$ .

c)  $S(u/0)$

## Aufgabe 14

b) Die Projektionen auf die xz-Ebene und die yz-Ebene zeigen, dass die xy-Ebene die Kurve oskuliert.

c)  $P(3/1,5/1)$ ,  $\dot{P} = (3/3/3)$

d)  $\ddot{P} = (0/3/6)$ ,  $\mathbf{h} \parallel (-1/0/1)$ ,  $\mathbf{b} \parallel (1/-2/1)$

1) zuerst  $\mathbf{b}$  berechnen, dann  $\mathbf{h}$ :  $\dot{P} \times \ddot{P} \parallel \mathbf{b}$ , dann  $\mathbf{b} \times \dot{P} \parallel \mathbf{h}$

2) zuerst  $\mathbf{h}$  berechnen, dann  $\mathbf{b}$ : Ansatz  $\mathbf{h} = \ddot{P} - \lambda \cdot \dot{P}$  mit  $\dot{P}$  multiplizieren, ergibt  $\lambda = 1$ ; dann  $\dot{P} \times \mathbf{h} \parallel \mathbf{b}$

e)  $\rho = 9 / \sqrt{2}$  ,  $M(-1,5/1,5/5,5)$

f)  $u = 1,448$ ,  $Q(4,345/3,146/3,038)$

$\tan^2 40^\circ \cdot u^4 - u^2 - 1 = 0$  (bei händischer Berechnung ☺)

g)  $u = 0,573$ ,  $R(1,719/0,492/0,188)$

$u^4 + 4u^2 - \tan^2 50^\circ = 0$  (☺)

## Aufgabe 15

a)  $x(u) = 6u^3 - 6u^2 + 2$ ,  $y(u) = -6u^2 + 6u$ ,  $z(u) = 4u^3 - 3u^2 + 3u$ ;  $0 \leq u \leq 1$

b)  $\dot{P}(0) = (0/6/3)$ ,  $\ddot{P}(0) = (-12/-12/-6)$ ,  $\dot{P} \times \ddot{P} = (0/-36/72)$

$\dot{P}(0) \parallel \overline{A_1 A_2}$ ;  $A_3$  in  $\sigma$  [ $y - 2z = 0$ ] einsetzen

c)  $P(0,5) = (1,25/1,5/1,25)$

d)  $\dot{P}(0,5) = (-1,5/0/3)$

e)  $\mathbf{h} \parallel (6/-10/3)$ ,  $\mathbf{b} \parallel (4/3/2)$

1) zuerst  $\mathbf{b}$  berechnen, dann  $\mathbf{h}$ :  $\dot{P} \times \ddot{P} \parallel \mathbf{b}$ , dann  $\mathbf{b} \times \dot{P} \parallel \mathbf{h}$

2) zuerst  $\mathbf{h}$  berechnen, dann  $\mathbf{b}$ : Ansatz  $\mathbf{h} = \ddot{P} - \lambda \cdot \dot{P}$  mit  $\dot{P}$  multiplizieren, ergibt  $\lambda = 0,8$ ; dann  $\dot{P} \times \mathbf{h} \parallel \mathbf{b}$

f) Die Schnittpunkte mit  $\sigma$  [ $4x + 3y + 2z = 12$ ] sind die Halbierungspunkte der Seiten (vgl. Seite 26).

## Aufgabe 16

a)  $x(u) = 5 \cdot \cos u$ ,  $y(u) = 5 \cdot \sin u$ ,  $z(u) = 2u/\pi$ ;  $0 \leq u \leq 4\pi$

b)  $\alpha = 7,26^\circ$

ohne Differentialrechnung: Zylindermantel abwickeln  $\Rightarrow \tan \alpha = 4/10\pi$

c) 57,005 km/h

ohne Differentialrechnung: Zylindermantel abwickeln  $\Rightarrow L = 63,339$  m

d)  $5\pi^2 = 49,348$  m/s<sup>2</sup>  $\approx 5g$

Umparametrisierung  $u = \pi \cdot t$ ; wegen  $\mathbf{a} \perp \mathbf{v}$  gilt  $n = |\mathbf{a}|$

## Aufgabe 17

a) Drehzylinder  $x^2 + (z - 1)^2 = 1$ , Kugel  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

b) Kurvenpunkt P auf xz-Ebene projizieren ergibt Q(sin u / 1 + cos u), Punkt M(0/1) auf Drehzylinderachse  $\Rightarrow$  u ist Winkel des Vektors  $\overline{MQ}$  zur positiven z-Achse

c)  $P(1/\sqrt{2}/1)$ ,  $\dot{P} = (0/0,5 \cdot \sqrt{2}/-1)$

d)  $\ddot{P} = (-1/-0,25 \cdot \sqrt{2}/0)$ ,  $\sigma$  [ $x - 2\sqrt{2}y - 2z = -5$ ], Schnittgerade durch (-5/0/0) und (0/0/2,5)

e)  $v = 1,225$  m/s,  $b = -0,204$  m/s<sup>2</sup>,  $n = 1,041$  m/s<sup>2</sup>

f) (0/0/2), (0/2/0), (0/-2/0)

Beschleunigungsvektor  $\mathbf{a}$  orthogonal zum Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$

g) nein

Beschleunigungsvektor  $\mathbf{a}$  kollinear zum Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  nicht möglich, da  $\mathbf{v} \times \mathbf{a} \neq \mathbf{o}$  für alle u

## Aufgabe 18

a)  $\alpha = 50,19^\circ$

$\dot{P}(0) = (0/5/6) \Rightarrow \tan \alpha = 1,2$

b)  $(5/0/0), (-1/0/0)$

$0, \pi, 2\pi$  sind die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen  $y(u) = 0$  und  $z(u) = 0$

c) nein

Der Punkt P rotiert dreimal so schnell um M wie M um die z-Achse rotiert (siehe Seite 22). Die weiteren Lagen  $P_1, P_2, P_3, \dots$  von P in der xy-Ebene entsprechen daher den Drehwinkeln  $u = 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, \dots$  von M um die z-Achse.

d)  $P(0/-3/2), \dot{P} = (3/6/0)$

## Aufgabe 19

a)  $x(u) = 0,5 \cdot \sin 6u$ ,  $y(u) = u + \frac{u \cdot \cos 6u}{2 \cdot \sqrt{1+u^2}}$ ,  $z(u) = 1 + 0,5 \cdot u^2 - \frac{\cos 6u}{2 \cdot \sqrt{1+u^2}}$ ;  $-2 \leq u \leq 2$

c)  $u = \pi/12, Q(0,5/0,262/1,034)$

d) ja

$x(-u) = -x(u), y(-u) = -y(u), z(-u) = z(u)$

## Aufgabe 20

a)  $U(9/12/20)$

b)  $\mathbf{e}_x = (0,48/0,64/-0,6), \mathbf{e}_y = (-0,8/0,6/0)$

c)  $\xi(u) = 20 \cdot \cos u$ ,  $\eta(u) = 20 \cdot \sin u$ ;  $0 \leq u \leq 2\pi$

d)  $x(u) = 9 + 9,6 \cdot \cos u - 16 \cdot \sin u$ ,  $y(u) = 12 + 12,8 \cdot \cos u + 12 \cdot \sin u$ ,  $z(u) = 20 - 12 \cdot \cos u$

## Aufgabe 21

a)  $U(3/4/5)$

b)  $\mathbf{e}_x = \sqrt{2} \cdot (-0,3/-0,4/0,5), \mathbf{e}_y = (0,8/-0,6/0), \mathbf{e}_z = \sqrt{2} \cdot (-0,3/-0,4/0,5)$

c)  $\xi(u) = 5\sqrt{2} \cdot \cos u$ ,  $\eta(u) = 5\sqrt{2} \cdot \sin u$ ,  $\zeta(u) = 5\sqrt{2} \cdot u$ ;  $0 \leq u \leq 2\pi$

Beim angegebenen Winkel der Tangenten zur Schraubachse ist die Ganghöhe  $h$  gleich  $2r\pi$  (vgl. Verebnung der Drehzylinderfläche).

d)  $x(u) = 3 - 3 \cdot \cos u + 4\sqrt{2} \cdot \sin u - 3u$ ,  $y(u) = 4 - 4 \cdot \cos u - 3\sqrt{2} \cdot \sin u - 4u$ ,  $z(u) = 5 - 5 \cdot \cos u + 5u$