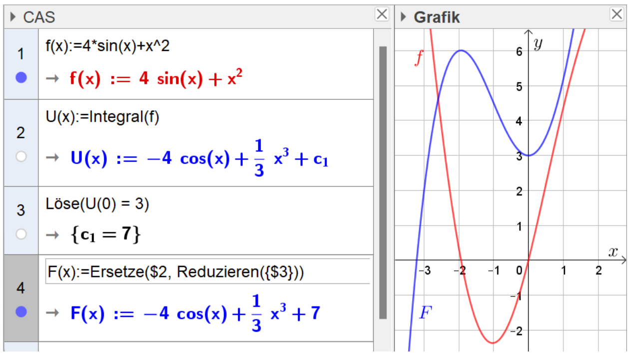
Stammfunktionen

Für die Funktion f gilt: $f(x) = 4 \cdot \sin(x) + x^2$

1) Ermittle (ohne Technologieeinsatz) alle Stammfunktionen von f.

2) Ermittle (ohne Technologieeinsatz) jene Stammfunktion F von f, die $F(0) = 3$ erfüllt.



1) $F(x) = -4 \cdot \cos(x) + \frac{1}{3} \cdot x^3 + c$
ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f.

2) $F(0) = 3 \iff -4 + 0 + c = 3 \iff$
$\iff c = 7$

$\implies F(x) = -4 \cdot \cos(x) + \frac{1}{3} \cdot x^3 + 7$

Rechts oben sieht du, wie man diese Aufgabe mit dem Befehl **Integral**(<Funktion>) in der CAS-Ansicht lösen kann. Den Befehl in Zeile 4 musst du nicht händisch eingeben. Du kannst stattdessen das Ergebnis $\{c_1 = 7\}$ aus Zeile 3 mit der Maus in Zeile 2 ziehen (Drag & Drop).

Wenn die unabhängige Variable x heißt, wird ein weißer Kreis unter der Zeilennummer 4 angezeigt. Mit Klick auf den Kreis wird eine Funktion erstellt und der Graph in der Grafik-Ansicht angezeigt.

Stammfunktionen

Für eine Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v gilt:

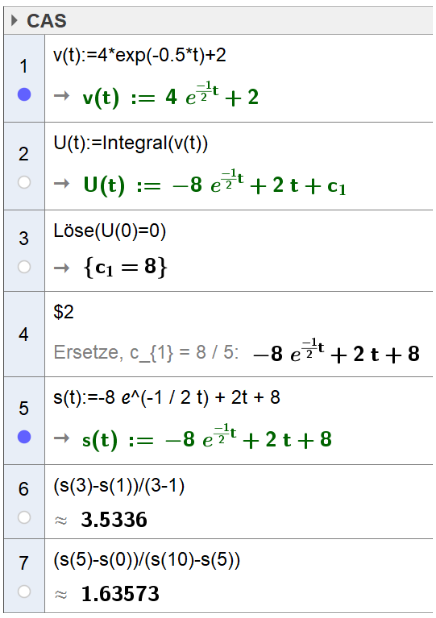
$$v(t) = 4 \cdot e^{-0{,}5 \cdot t} + 2$$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden
$v(t) \ldots$ Geschwindigkeit in m/s

1) Ermittle eine Gleichung der zugehörigen Weg-Zeit-Funktion s, die $s(0) = 0$ erfüllt.

2) Ermittle die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[1; 3]$.

3) Die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v ist streng monoton fallend.
Um wie viel Prozent ist der zurückgelegte Weg im Zeitintervall $[0; 5]$ größer als jener in $[5; 10]$?



1) Für die Weg-Zeit-Funktion s gilt:

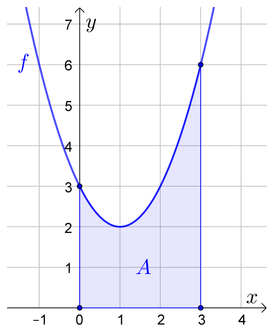
$$s(t) = -8 \cdot e^{-0{,}5 \cdot t} + 2 \cdot t + 8$$

2) Die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[1; 3]$ beträgt 3,533... m/s.

3) Im Zeitintervall $[0; 5]$ ist der zurückgelegte Weg um 63,57... % größer als jener in $[5; 10]$.

Bestimmtes Integral

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2 - 2 \cdot x + 3$ ist rechts dargestellt.



1) Eine Fläche mit Inhalt A ist rechts markiert.
Stelle mithilfe von f eine Formel zur Berechnung von A auf.

$$A = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$$

2) Berechne A mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

$$A = \frac{1}{3} \cdot x^3 - x^2 + 3 \cdot x\,\Big|_0^3 = 9 - 0 = 9$$

Rechts siehst du, wie man das bestimmte Integral mit dem Befehl **Integral**(<Funktion>, <Startwert>, <Endwert>) ermitteln kann.
Wenn du diesen Befehl in der Eingabezeile verwendest, wird die entsprechende Fläche auch in der Grafik-Ansicht markiert.

CAS

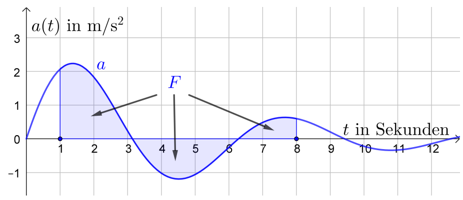
1	f(x):=x^2-2*x+3
	→ $\mathbf{f(x) := x^2 - 2\,x + 3}$
2	Integral(f,0,3)
	→ **9**

Bestimmtes Integral

Für die rechts dargestellte Beschleunigung-Zeit-Funktion a gilt:

$$a(t) = 3 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t} \cdot \sin(t)$$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden
$a(t) \ldots$ Beschleunigung in $\mathrm{m/s^2}$



1) Ermittle den dargestellten orientierten Flächeninhalt F. Welche Einheit hat das Ergebnis?

$F = 1{,}643\ldots\ \mathrm{m/s}$ Einheit: $\mathrm{s} \cdot \mathrm{m/s^2} = \mathrm{m/s}$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt:

$$F = \int_1^8 \underbrace{a(t)}_{=v'(t)}\,\mathrm{d}t = v(t)\,\Big|_1^8 = v(8) - v(1)$$

CAS

1	a(t):=3*exp(-0.2*t)*sin(t)
	→ $\mathbf{a(t) := 3\,e^{\frac{-1}{5}t}\,\sin(t)}$
2	Integral(a,1,8)
	≈ **1.64301**

2) Welche Bedeutung hat der Wert von F also für die Geschwindigkeit?

Zum Zeitpunkt $t = 8$ ist die Geschwindigkeit um $1{,}643\ldots\ \mathrm{m/s}$ größer als zum Zeitpunkt $t = 1$.

3) Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt $v(0) = 4\,\mathrm{m/s}$.
Ermittle den zurückgelegten Weg im Zeitintervall $[3; 7]$.

Aus dem Hauptsatz folgt:

$$\int_3^7 \underbrace{v(t)}_{=s'(t)}\,\mathrm{d}t = s(t)\,\Big|_3^7 = s(7) - s(3)$$

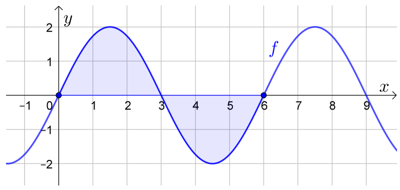
Der zurückgelegte Weg im Zeitintervall $[3; 7]$ ist $28{,}12\ldots\ \mathrm{m}$.

3	U(t):=Integral(a)
	→ $\mathbf{U(t) := 15\,e^{\frac{-1}{5}t}\left(\frac{-5}{26}\cos(t) - \frac{1}{26}\sin(t)\right) + c_1}$
4	Löse(U(0)=4)
	→ $\mathbf{\left\{c_1 = \frac{179}{26}\right\}}$
5	v(t):=15e^(-1 / 5 t) (-5 / 26 cos(t) - 1 / 26 sin(t)) + 179/26
	→ $\mathbf{v(t) := 15\,e^{\frac{-1}{5}t}\left(\frac{-5}{26}\cos(t) - \frac{1}{26}\sin(t)\right) + \frac{179}{26}}$
6	Integral(v,3,7)
	≈ **28.12235**

Allgemeine Sinusfunktion

Für die rechts dargestellte Funktion f gilt:

$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right)$$



Im Intervall $[0; 6]$ schließt der Graph mit der x-Achse eine Fläche mit Inhalt A ein.

1) Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein.

i) $\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ **ii)** $A = 2 \cdot \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ **iii)** $A = \int_0^6 |f(x)|\,\mathrm{d}x$

2) Ermittle A. $|f(x)|$ kannst du im CAS entweder mit den senkrechten Betragsstrichen oder mit **abs**$(f(x))$ eingeben.

CAS	
1	f(x):=2*sin(pi/3*x) → $f(x) := 2 \sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right)$
2	Integral(|f(x)|,0,6) → $\frac{24}{\pi}$
3	$2 ≈ 7.63944

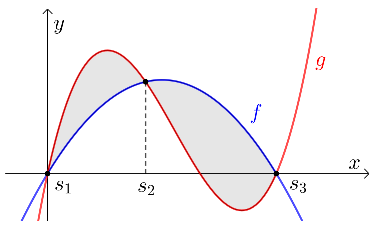
$$A = \frac{24}{\pi} = 7{,}639...$$

Zwischenfläche

Für die rechts dargestellten Funktionen f und g gilt:

$$f(x) = -5 \cdot x^2 + 35 \cdot x$$

$$g(x) = 3 \cdot x^3 - 35 \cdot x^2 + 98 \cdot x$$



Die beiden markierten Flächen haben zusammen den Inhalt A.

1) Ermittle die Schnittstellen $s_1 = 0$, $s_2 = 3$ und $s_3 = 7$.

2) Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein.

i) $A = \int_0^3 [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x + \int_3^7 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ **ii)** $A = \int_0^7 |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$

Links unten siehst du 3 Möglichkeiten, um den Flächeninhalt A im CAS zu ermitteln.

Verwendest du den Befehl **IntegralZwischen**(<Funktion>, <Funktion>, <Startwert>, <Endwert>) in der Eingabezeile, wird die entsprechende Zwischenfläche auch in der Grafik-Ansicht markiert.

CAS	
1	f(x):=-5*x^2+35*x → $f(x) := -5\,x^2 + 35\,x$
2	g(x):=3*x^3-35*x^2+98*x → $g(x) := 3\,x^3 - 35\,x^2 + 98\,x$
3	Löse(f(x)=g(x)) → $\{x = 0, x = 3, x = 7\}$
4	Integral(g-f,0,3)+Integral(f-g,3,7) ≈ 234.25
5	IntegralZwischen(g,f,0,3) + IntegralZwischen(f,g,3,7) ≈ 234.25
6	Integral(|f-g|,0,7) ≈ 234.25

Die beiden markierten Flächen haben also zusammen den Flächeninhalt $A = 234{,}25$.

Funktion mit Parameter MmF

Für die Funktion f gilt: $f(t) = a \cdot t^2$ mit $a \neq 0$

Ermittle (ohne Technologieeinsatz) alle Stammfunktionen von f.

$$F(t) = a \cdot \frac{1}{3} \cdot t^3 + c$$

Rechts siehst du, warum man bei Funktionen mit Parametern im CAS aufpassen muss.

- Wenn die unabhängige Variable x heißt, wird richtig nach x integriert.
- Wenn die unabhängige Variable t heißt, wird *nicht* nach t integriert, sondern nach a.

CAS
1 f(x):=a*x^2
→ $f(x) := a\,x^2$
2 Integral(f(x))
→ $\frac{1}{3} a\,x^3 + c_1$

CAS
1 f(t):=a*t^2
→ $f(t) := a\,t^2$
2 Integral(f(t))
→ $\frac{1}{2} a^2\,t^2 + c_1$

Damit das CAS richtig nach t integriert, kannst du den Befehl

Integral(<Funktion>, <Variable>)

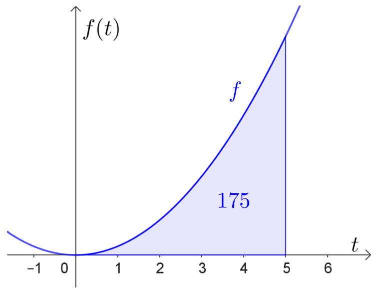
wie rechts dargestellt verwenden.

CAS
1 f(t):=a*t^2
→ $f(t) := a\,t^2$
2 Integral(f(t),t)
→ $\frac{1}{3} a\,t^3 + c_1$

Funktion mit Parameter MmF

Für die Funktion f gilt: $f(t) = a \cdot t^2$ mit $a \neq 0$

Berechne a so, dass der Funktionsgraph mit der waagrechten Achse im Intervall $[0; 5]$ den Flächeninhalt 175 einschließt.



CAS
1 f(t):=a*t^2
→ $f(t) := a\,t^2$
2 Integral(f(t), t, 0, 5)=175
→ $\frac{125}{3} a = 175$
3 $2
Löse: $\left\{a = \frac{21}{5}\right\}$

$$\Longrightarrow \quad a = \frac{21}{5}$$

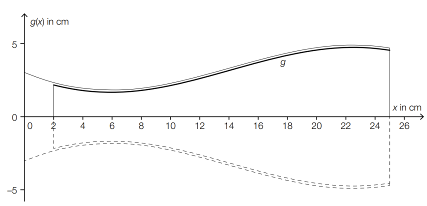
Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Form eines Weizenbierglases kann näherungsweise durch die Rotation des Graphen der Funktion g um die x-Achse dargestellt werden (siehe nebenstehende Abbildung). Es gilt:

$$g(x) = -0{,}00108 \cdot x^3 + 0{,}046 \cdot x^2 - 0{,}4367 \cdot x + 3 \quad \text{mit } 2 \leq x \leq 25$$

x, $g(x)$ … Koordinaten in cm

Berechnen Sie das Füllvolumen des Weizenbierglases in Litern.



CAS
1 g(x):=-0.00108*x^3+0.046*x^2-0.4367*x+3
→ $g(x) := \frac{-27}{25000} x^3 + \frac{23}{500} x^2 - \frac{4367}{10000} x + 3$
2 Integral(pi*g(x)^2,2,25)
≈ 678.64492

Das Füllvolumen beträgt 678,6… cm^3 = 678,6… ml = 0,6786… L.

Dieses Werk des Projekts MmF unterliegt einer CC BY-NC-ND 4.0 Lizenz.
https://mmf.univie.ac.at