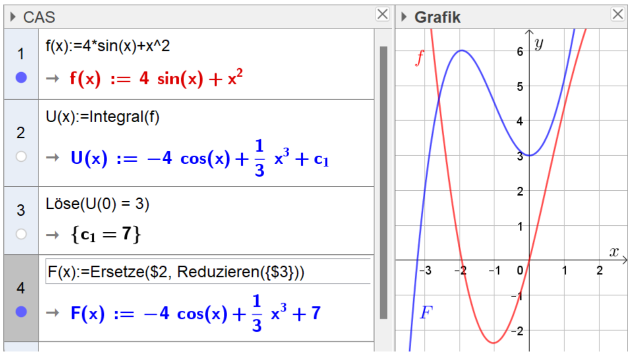
Stammfunktionen

Für die Funktion f gilt: $f(x) = 4 \cdot \sin(x) + x^2$

1) Ermittle (ohne Technologieeinsatz) alle Stammfunktionen von f.

2) Ermittle (ohne Technologieeinsatz) jene Stammfunktion F von f, die $F(0) = 3$ erfüllt.



Rechts oben siehst du, wie man diese Aufgabe mit dem Befehl **Integral**(<Funktion>) in der CAS-Ansicht lösen kann. Den Befehl in Zeile 4 musst du nicht händisch eingeben. Du kannst stattdessen das Ergebnis $\{c_1 = 7\}$ aus Zeile 3 mit der Maus in Zeile 2 ziehen (Drag & Drop).

Wenn die unabhängige Variable x heißt, wird ein weißer Kreis unter der Zeilennummer 4 angezeigt. Mit Klick auf den Kreis wird eine Funktion erstellt und der Graph in der Grafik-Ansicht angezeigt.

Stammfunktionen

Für eine Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v gilt:

$$v(t) = 4 \cdot e^{-0{,}5 \cdot t} + 2$$

$t \dots$ Zeit in Sekunden
$v(t) \dots$ Geschwindigkeit in m/s

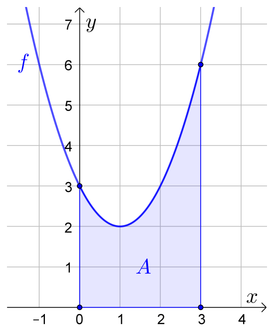
1) Ermittle eine Gleichung der zugehörigen Weg-Zeit-Funktion s, die $s(0) = 0$ erfüllt.

2) Ermittle die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[1; 3]$.

3) Die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v ist streng monoton fallend.
Um wie viel Prozent ist der zurückgelegte Weg im Zeitintervall $[0; 5]$ größer als jener in $[5; 10]$?

Bestimmtes Integral

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2 - 2\cdot x + 3$ ist rechts dargestellt.

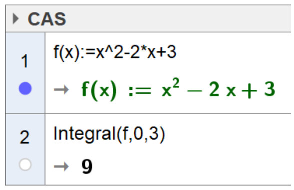


1) Eine Fläche mit Inhalt A ist rechts markiert.
Stelle mithilfe von f eine Formel zur Berechnung von A auf.

$A =$

2) Berechne A mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

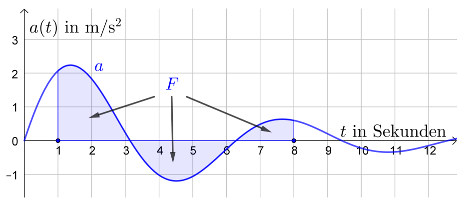
Rechts siehst du, wie man das bestimmte Integral mit dem Befehl **Integral**(<Funktion>, <Startwert>, <Endwert>) ermitteln kann.
Wenn du diesen Befehl in der Eingabezeile verwendest, wird die entsprechende Fläche auch in der Grafik-Ansicht markiert.



Bestimmtes Integral

Für die rechts dargestellte Beschleunigung-Zeit-Funktion a gilt:

$$a(t) = 3\cdot e^{-0{,}2\cdot t}\cdot \sin(t)$$



t ... Zeit in Sekunden
$a(t)$ ... Beschleunigung in $\mathrm{m/s^2}$

1) Ermittle den dargestellten orientierten Flächeninhalt F. Welche Einheit hat das Ergebnis?

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt:

$$F = \int_1^8 \underbrace{a(t)}_{=v'(t)}\,\mathrm{d}t = v(t)\,\Big|_1^8 = v(8) - v(1)$$

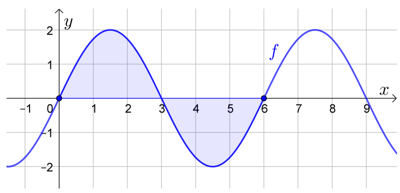
2) Welche Bedeutung hat der Wert von F also für die Geschwindigkeit?

3) Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt $v(0) = 4\,\mathrm{m/s}$.
Ermittle den zurückgelegten Weg im Zeitintervall $[3; 7]$.

Allgemeine Sinusfunktion

Für die rechts dargestellte Funktion f gilt:

$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right)$$



Im Intervall $[0; 6]$ schließt der Graph mit der x-Achse eine Fläche mit Inhalt A ein.

1) Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein.

i) $\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = \square$ **ii)** $A = 2 \cdot \int_{\square}^{\square} f(x)\,\mathrm{d}x$ **iii)** $A = \int_{\square}^{\square} |f(x)|\,\mathrm{d}x$

2) Ermittle A.

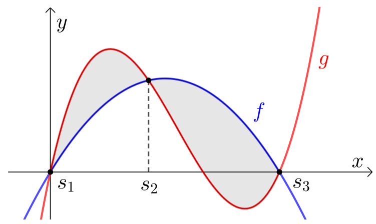
$|f(x)|$ kannst du im CAS entweder mit den senkrechten Betragsstrichen oder mit **abs**$(f(x))$ eingeben.

Zwischenfläche

Für die rechts dargestellten Funktionen f und g gilt:

$$f(x) = -5 \cdot x^2 + 35 \cdot x$$

$$g(x) = 3 \cdot x^3 - 35 \cdot x^2 + 98 \cdot x$$



Die beiden markierten Flächen haben zusammen den Inhalt A.

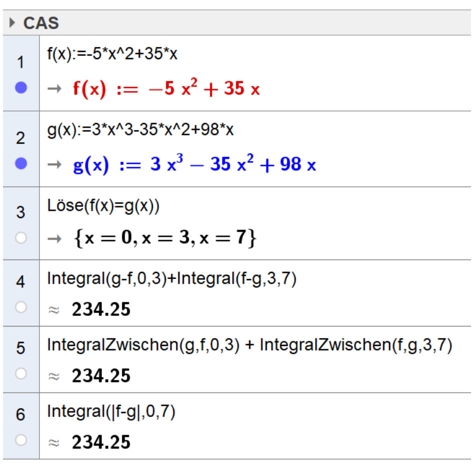
1) Ermittle die Schnittstellen $s_1 = \square$, $s_2 = \square$ und $s_3 = \square$.

2) Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein.

i) $A = \int_{\square}^{\square} [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x + \int_{\square}^{\square} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ **ii)** $A = \int_{\square}^{\square} |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$

Links unten siehst du 3 Möglichkeiten, um den Flächeninhalt A im CAS zu ermitteln.

Verwendest du den Befehl **IntegralZwischen**(<Funktion>, <Funktion>, <Startwert>, <Endwert>) in der Eingabezeile, wird die entsprechende Zwischenfläche auch in der Grafik-Ansicht markiert.



Die beiden markierten Flächen haben also zusammen den Flächeninhalt $A = \square$.

Funktion mit Parameter

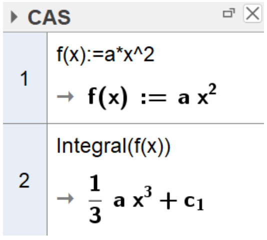
Für die Funktion f gilt: $f(t) = a \cdot t^2$ mit $a \neq 0$

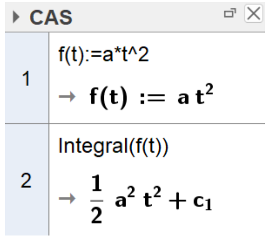
Ermittle (ohne Technologieeinsatz) alle Stammfunktionen von f.

$F(t) =$

Rechts siehst du, warum man bei Funktionen mit Parametern im CAS aufpassen muss.

- Wenn die unabhängige Variable x heißt, wird richtig nach x integriert.
- Wenn die unabhängige Variable t heißt, wird *nicht* nach t integriert, sondern nach a.

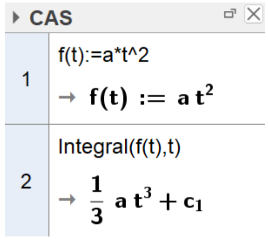




Damit das CAS richtig nach t integriert, kannst du den Befehl

Integral(<Funktion>, <Variable>)

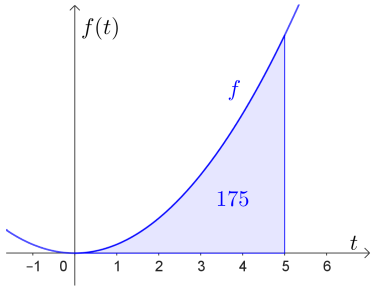
wie rechts dargestellt verwenden.



Funktion mit Parameter

Für die Funktion f gilt: $f(t) = a \cdot t^2$ mit $a \neq 0$

Berechne a so, dass der Funktionsgraph mit der waagrechten Achse im Intervall $[0; 5]$ den Flächeninhalt 175 einschließt.



Die Form eines Weizenbierglases kann näherungsweise durch die Rotation des Graphen der Funktion g um die x-Achse dargestellt werden (siehe nebenstehende Abbildung). Es gilt:

$g(x) = -0{,}00108 \cdot x^3 + 0{,}046 \cdot x^2 - 0{,}4367 \cdot x + 3$ mit $2 \leq x \leq 25$

x, $g(x)$ ... Koordinaten in cm

Berechnen Sie das Füllvolumen des Weizenbierglases in Litern.