Rationale Zahlen

Alle Zahlen, die man als **Bruch** $\frac{a}{b}$ mit ganzen Zahlen a und $b \neq 0$ schreiben kann, heißen **rationale Zahlen** bzw. **Bruchzahlen**.

Jede Dezimalzahl mit endlich vielen Nachkommastellen ist rational. Zum Beispiel: $0{,}42 = \frac{42}{100}$

Jede periodische Dezimalzahl ist rational. Zum Beispiel: $0{,}\dot{3} = 0{,}333... = \frac{1}{3}$

Die Menge der rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ abgekürzt: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

Dabei verwenden wir die folgenden Bezeichnungen: $\frac{a}{b}$ — **Zähler**, **Bruchstrich**, **Nenner**

Bruchstrich – Divisionszeichen

Der Bruchstrich steht so wie die Symbole $\div$, $:$ und $/$ für eine Division.

Es gilt also: $\frac{7}{2} = 7 \div 2 = 7 : 2 = 7/2 = 3{,}5$

Berechne: **a)** $2 + 8 : 4 - 6 = \square$ **b)** $(2 + 8) : (4 - 6) = \square$ **c)** $\frac{2+8}{4-6} = \square$

Versteckte Klammern

Bei jedem Bruch sind Zähler und Nenner jeweils in Klammern gesetzt.
Wir müssen diese Klammern nicht anschreiben, aber dürfen nicht darauf vergessen.

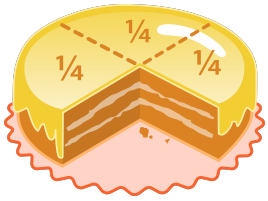
Zum Beispiel: $2 \cdot \frac{x+3}{x-5} = 4$

Falsche Umformung: $2 \cdot x + 3 = 4 \cdot x - 5$
Richtige Umformung: $2 \cdot (x + 3) = 4 \cdot (x - 5)$

Brüche als relative Anteile

Liegt eine Bruchzahl zwischen 0 und 1, dann können wir sie als relativen Anteil interpretieren.

Zum Beispiel: $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75 = 75\,\%$



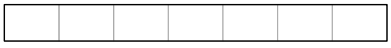
Die ganze Torte rechts wurde in 4 gleich große Stücke geteilt.

Es sind noch 3 Stücke übrig. Das sind $\frac{3}{4}$ bzw. $75\,\%$ der ganzen Torte.

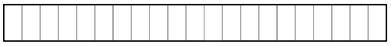
Verschiedene Brüche – Gleiche Bruchzahl

Hinter *verschiedenen* Brüchen kann die *gleiche* Bruchzahl stecken.

Markiere $\frac{2}{7}$ der Rechtecksfläche:



Markiere $\frac{6}{21}$ der Rechtecksfläche:



In beiden Bildern hast du den *gleichen* relativen Anteil der Rechtecksfläche markiert, nämlich:

$$2 : 7 = 6 : 21 = 0{,}2857... = 28{,}57...\,\%$$

Trage jeweils eine Zahl richtig in das Kästchen ein:

a) $\frac{2}{3} = \frac{\square}{12}$ **b)** $\frac{4}{5} = \frac{20}{\square}$ **c)** $\frac{3}{5} = \frac{18}{\square}$ **d)** $\frac{2}{3} = \frac{\square}{21}$

e) $\frac{4}{18} = \frac{\square}{9}$ **f)** $\frac{15}{25} = \frac{3}{\square}$ **g)** $\frac{12}{28} = \frac{3}{\square}$ **h)** $\frac{35}{42} = \frac{\square}{6}$

Erweitern und Kürzen von Brüchen

Wenn wir einen **Bruch erweitern**,
dann multiplizieren wir Zähler und Nenner
mit der gleichen Zahl ($\neq 0$).

Wenn wir einen **Bruch kürzen**,
dann dividieren wir Zähler und Nenner
durch die gleiche Zahl ($\neq 0$).

$$\frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{6}{10}$$

Der Wert des Bruchs verändert sich beim Erweitern und beim Kürzen *nicht*: $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

Wenn Zähler und Nenner jeweils ein Produkt sind, können wir also gleiche Faktoren kürzen:

$$\frac{\cancel{\Delta} \cdot \square \cdot \cancel{\odot} \cdot \Diamond}{\cancel{\odot} \cdot \triangledown \cdot \cancel{\Delta}} = \frac{\square \cdot \Diamond}{\triangledown}$$

Wir *dividieren* links den Zähler und den Nenner jeweils durch Δ und durch ☺.

Brüche vollständig kürzen

Unten findest du zwei Methoden, um den Bruch $\frac{252}{1890}$ vollständig zu kürzen.

i) Berechne zuerst die Primfaktorzerlegung von 252 und von 1890.
Schreibe dann den Zähler und den Nenner als Produkt von Primzahlen und kürze vollständig.

$$\frac{252}{1890} = \frac{\square \cdot \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square}{\square \cdot \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square} = \frac{\square}{\square}$$

ii) Kürze in jedem Schritt durch einen gemeinsamen Teiler.

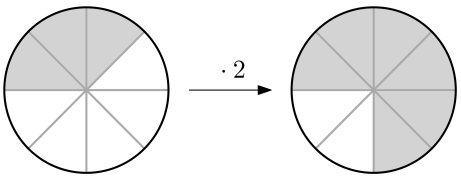
$$\frac{252}{1890} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

Bruch · Zahl

Im Bild rechts wird der relative Anteil $\frac{3}{8}$ verdoppelt. Der neue relative Anteil ist $\frac{6}{8}$.

Als Rechnung: $\frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{3 \cdot 2}{8} = \frac{6}{8}$

Allgemein gilt: $\boldsymbol{\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}}$



Bruch · Zahl

Berechne das Ergebnis.

a) $\frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{\square}{\square}$ **b)** $\frac{3}{7} \cdot 2 = \frac{\square}{\square}$ **c)** $\frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{\square}{\square}$ **d)** $\frac{6}{5} \cdot 7 = \frac{\square}{\square}$

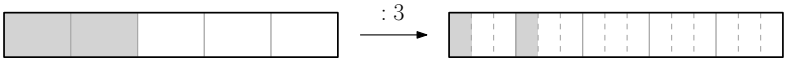
Bruch : Zahl

Um den Bruch $\frac{2}{5}$ durch 3 zu dividieren, multiplizieren wir den Nenner mit 3.

Als Rechnung: $\frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$

Allgemein gilt: $\boldsymbol{\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}}$

Grafisch:



Bruch : Zahl

Berechne das Ergebnis.

a) $\frac{1}{4} : 3 = \frac{\square}{\square}$ **b)** $\frac{3}{7} : 2 = \frac{\square}{\square}$ **c)** $\frac{2}{3} : 5 = \frac{\square}{\square}$ **d)** $\frac{6}{5} : 7 = \frac{\square}{\square}$

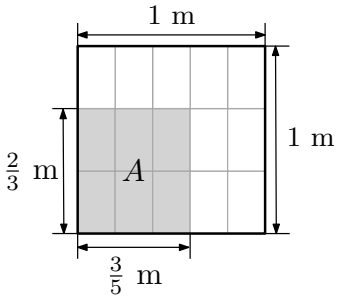
Bruch · Bruch

Rechts ist ein Quadrat mit Seitenlänge 1 m dargestellt.

Wir berechnen den Flächeninhalt A der grau markierten Fläche auf 2 verschiedene Arten:

1) $A = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}\ \text{m}^2$ (Flächeninhaltsformel für Rechtecke)

2) $A = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5}\ \text{m}^2$ (Relativer Anteil von $1\,\text{m}^2$)



Allgemein gilt: $\boldsymbol{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$ „Zähler mal Zähler. Nenner mal Nenner."

Bruch · Bruch

Berechne das Ergebnis, und kürze so weit wie möglich.

a) $\frac{3}{2} \cdot \frac{14}{6} = \square$ **b)** $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{2} = \square$

x : Bruch

Statt durch den Bruch $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ zu dividieren, können wir auch mit seinem **Kehrwert** $\boldsymbol{\frac{b}{a}}$ multiplizieren.

Zum Beispiel: $5 : \frac{3}{2} = 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$

Allgemein gilt: $\boldsymbol{x : \frac{a}{b} = x \cdot \frac{b}{a}}$

Begründung: $12 : 4 = 3$, weil $3 \cdot 4 = 12$ ✓

$x : \frac{a}{b} = x \cdot \frac{b}{a}$, weil $\left(x \cdot \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{a}{b} = x \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = x \cdot \frac{b \cdot a}{a \cdot b} = x \cdot 1 = x$ ✓

Beachte, dass $\frac{3}{2} : 5 = \frac{3}{10}$ der Kehrwert von $5 : \frac{3}{2} = \frac{10}{3}$ ist.

x : Bruch

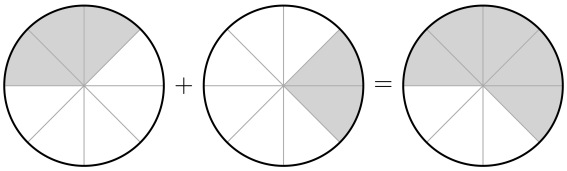
Berechne das Ergebnis, und kürze so weit wie möglich.

a) $35 : \frac{20}{3} = \square$ **b)** $\frac{14}{15} : \frac{28}{3} = \square$

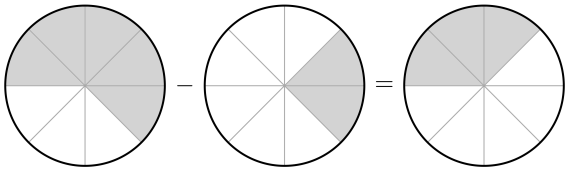
Bruch ± Bruch

Wenn zwei Brüche den *gleichen Nenner* haben, dann können wir sie direkt addieren und subtrahieren:

$$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}$$



$$\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5-2}{8} = \frac{3}{8}$$

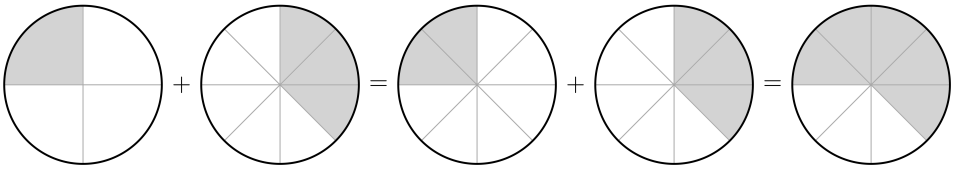


Allgemein gilt: $\boldsymbol{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}}$

Allgemein gilt: $\boldsymbol{\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}}$

Wenn sie *verschiedene Nenner* haben, dann bringen wir sie zuerst auf einen gemeinsamen Nenner:

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{2+3}{8} = \frac{5}{8}$$



Bruch ± Bruch

Berechne das Ergebnis, und kürze so weit wie möglich.

a) $\frac{5}{6} + \frac{4}{9} =$ ☐

b) $3 - \frac{2}{7} =$ ☐

Kleinster gemeinsamer Nenner

Die Brüche $\frac{1}{30}$ und $\frac{1}{42}$ könnten wir auf den gemeinsamen Nenner $30 \cdot 42 = 1260$ bringen.

Weniger Aufwand bei $\frac{1}{30} + \frac{1}{42}$ haben wir, indem wir die Brüche auf den *kleinsten* gemeinsamen Nenner,

nämlich $\text{kgV}(30; 42) = \text{kgV}(2 \cdot 3 \cdot 5; 2 \cdot 3 \cdot 7) =$ ☐ $\cdot$ ☐ $\cdot$ ☐ $\cdot$ ☐ $=$ ☐ bringen:

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{42} =$$ ☐

Doppelbrüche

Zur Auflösung von Doppelbrüchen können wir den Hauptbruchstrich durch eine Division ersetzen:

i) $\boldsymbol{\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}}$ **ii)** $\boldsymbol{\frac{a}{\frac{b}{c}} = a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}}$ **iii)** $\boldsymbol{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}}$

„Außen mal außen durch innen mal innen“

Doppelbrüche

Berechne das Ergebnis, und kürze so weit wie möglich.

a) $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{2}{3}} =$ ☐

b) $\frac{\frac{7}{2}}{3} =$ ☐

c) $\frac{5}{\frac{2}{3}} =$ ☐