Exponentialgleichungen lösen

Exponentialgleichungen, bei denen die gesuchte Variable nur in einem Exponenten vorkommt, kannst du immer mit den gleichen Schritten lösen:

1) Die Potenz mit der gesuchten Variable auf einer Seite isolieren.

2) Beide Seiten logarithmieren. Jede Basis beim Logarithmus passt. Verwende z.B. die gleiche Basis wie die Potenz.

3) Rechenregel $\log(a^x) = x \cdot \log(a)$ verwenden und umformen.

Zum Beispiel: $42 - 3 \cdot 2^{\frac{x-1}{4}} = 18$

1)
$$42 - 3 \cdot 2^{\frac{x-1}{4}} = 18 \quad \Big| + 3 \cdot 2^{\frac{x-1}{4}} - 18$$
$$24 = 3 \cdot 2^{\frac{x-1}{4}} \quad \Big| : 3$$
$$2^{\frac{x-1}{4}} = 8 \quad \Big| \log_2(.)$$

2)
$$\log_2\left(2^{\frac{x-1}{4}}\right) = \underbrace{\log_2(8)}_{=3}$$

$\log_2(8) = 3$, weil $2^3 = 8$.

3)
$$\frac{x-1}{4} \cdot \underbrace{\log_2(2)}_{=1} = 3 \quad \Big| \cdot 4$$
$$x - 1 = 12 \quad \Big| + 1$$
$$x = 13$$

Exponentialgleichungen lösen

① Löse die Exponentialgleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $3 \cdot 5^{\left(\frac{x-2}{x}\right)} - 64 = 11$ **b)** $\dfrac{45}{3^{(x^2+1)}} - 2 = 3$ **c)** $23 - 17 \cdot (1 - e^{-0{,}04 \cdot x}) = 10$ **d)** $10^{\left(x^2 - 2 \cdot x - 3\right)} = 1$

Logarithmusgleichungen lösen

Logarithmusgleichungen, bei denen die gesuchte Variable nur im Argument eines Logarithmus vorkommt, kannst du immer mit den gleichen Schritten lösen.

Zum Beispiel: $\dfrac{5 + \log_5(13 \cdot x + 83)}{4} = 2$

1) Den Logarithmus mit der gesuchten Variable auf einer Seite isolieren:

$$5 + \log_5(13 \cdot x + 83) = 8 \iff \log_5(13 \cdot x + 83) = 3$$

2) Basis b vom Logarithmus ablesen und auf beiden Seiten „b hoch“ rechnen:

$$5^{\log_5(13 \cdot x + 83)} = 5^3$$

3) $b^{\log_b(☺)} = ☺$ verwenden und umformen:

$$13 \cdot x + 83 = 125 \iff 13 \cdot x = 42 \iff x = 4$$

Logarithmusgleichungen lösen

② Löse die Logarithmusgleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $3 \cdot \log_2(x - 4) = 12$ **b)** $\lg(5 \cdot x^2 + 5 \cdot x) = 2$ **c)** $\dfrac{3}{\ln(4 \cdot x - 7)} = -6$

Exponentialgleichungen, bei denen die Variable an mehreren Stellen vorkommt, erfordern Geschick.

Die Gleichung $2^x + 42 = 3^x$ kann nicht auf x umgeformt werden. Sie hat aber die Lösung $x = 3{,}638\ldots$.

Solche Gleichungen müssen spezielle Strukturen aufweisen, damit sie explizit gelöst werden können.

Faktorisierung

Zum Beispiel: $3 \cdot 25^x - 5 \cdot 9^x = 0$

$$\begin{aligned} 3 \cdot 25^x &= 5 \cdot 9^x && \mid \lg(.) \\ \lg(3) + x \cdot \lg(25) &= \lg(5) + x \cdot \lg(9) \\ x \cdot \lg(25) - x \cdot \lg(9) &= \lg(5) - \lg(3) \\ x &= \frac{\lg(5) - \lg(3)}{\lg(25) - \lg(9)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Wir versuchen also beide Seiten der Exponentialgleichung als Produkt zu schreiben und $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$ zu verwenden.

Zum Beispiel: $2^{x+3} - 8 \cdot 5^{x-2} = 3 \cdot 2^x$

$$\begin{aligned} 2^{x+3} - 3 \cdot 2^x &= 8 \cdot 5^{x-2} \\ 2^x \cdot \left(2^3 - 3\right) &= 8 \cdot 5^{x-2} && \mid \log_2(.) \\ x \cdot \log_2(2) + \log_2(5) &= \log_2(8) + (x-2) \cdot \log_2(5) \\ x + \log_2(5) &= 3 + x \cdot \log_2(5) - 2 \cdot \log_2(5) && \mid -\log_2(5) - x \cdot \log_2(5) \\ x \cdot (1 - \log_2(5)) &= 3 - 3 \cdot \log_2(5) && \mid \ : (1 - \log_2(5)) \\ x &= \frac{3 \cdot (1 - \log_2(5))}{1 - \log_2(5)} = 3 \end{aligned}$$

Substitution

Zum Beispiel: $8^x - 5 \cdot 4^x + 2^{(x+2)} = 0$

Wir können alle Potenzen mit Basis 2 anschreiben: $8^x = (2^3)^x = 2^{3 \cdot x} = (2^x)^3$ und $4^x = (2^x)^2$

$$8^x - 5 \cdot 4^x + 2^{x+2} = 0 \iff (2^x)^3 - 5 \cdot (2^x)^2 + 2^2 \cdot 2^x = 0$$

Mit der Substitution $u = 2^x$ wird aus der Exponentialgleichung eine kubische Gleichung:

$$u^3 - 5 \cdot u^2 + 4 \cdot u = 0 \iff u \cdot \left(u^2 - 5 \cdot u + 4\right) = 0$$

Die kubische Gleichung hat die 3 Lösungen $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ und $u_3 = 4$.
Die Gleichung $0 = 2^x$ hat keine Lösung, weil $2^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Die Gleichung $1 = 2^x$ liefert die Lösung $x = 0$.
Die Gleichung $4 = 2^x$ liefert die Lösung $x = 2$.
Die Lösungsmenge der Exponentialgleichung ist also $L = \{0, 2\}$.

Strukturen erkennen

(3) Löse die Exponentialgleichungen über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $5^{(2 \cdot x)} \cdot 3^{(2 \cdot x)} - 4 \cdot 3^{(x+1)} = 7 \cdot 3^{(x+2)}$ **b)** $6^{(1+x)} + 6^{(1-x)} = 37$ **c)** $4^x + 8 = 6 \cdot 2^x$

(1) **a)** $L = \{-2\}$ **b)** $L = \{-1, 1\}$ **c)** $L = \left\{\frac{\ln(\frac{4}{17})}{-0{,}04}\right\} = \{36{,}17\ldots\}$ **d)** $L = \{-1, 3\}$

(2) **a)** $L = \{20\}$ **b)** $L = \{-5, 4\}$ **c)** $L = \left\{\frac{e^{-0{,}5}+7}{4}\right\} = \{1{,}901\ldots\}$

(3) **a)** $L = \{1\}$ **b)** $L = \{-1, 1\}$ **c)** $L = \{1, 2\}$