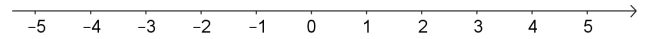


Ungleichungen



MATHEMATIK  
macht  
FREU(N)DE

Auf der Zahlengerade ordnen wir die reellen Zahlen nach ihrer Größe.  
Je weiter rechts die Zahl liegt, desto größer ist sie.  
Wir verwenden die folgenden Schreibweisen:



- $-3 < 5$                       „-3 ist **kleiner** als 5.“
- $-4 \leq -4$                     „-4 ist **kleiner** als -4 oder **gleich** groß wie -4.“
- $-1 > -3$                       „-1 ist **größer** als -3.“
- $-2 \geq -4,2$                     „-2 ist **größer** als -4,2 oder **gleich** groß wie -4,2.“

Merkhilfe:  
kleiner als

Ungleichungen



MATHEMATIK  
macht  
FREU(N)DE

Kreuze jeweils an, ob die Ungleichung wahr oder falsch ist.

wahr	falsch
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$-7 \geq 3$	

wahr	falsch
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$3 - 5 \leq 1$	

wahr	falsch
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$5 \cdot (-2) \geq 7$	

wahr	falsch
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$1 - 3 < 2 - 4$	

wahr	falsch
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(-2) \cdot 4 \leq 0$	

wahr	falsch
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$2 > -\frac{1}{7}$	

Lösungen von Ungleichungen



MATHEMATIK  
macht  
FREU(N)DE

Die Ungleichung  $3 \cdot x + 2 < 14 - x$  enthält eine Variable  $x$ .  
Ob die Ungleichung stimmt, hängt vom Wert von  $x$  ab:

Die Zahl **1** ist eine **Lösung** dieser Ungleichung, weil  $\underbrace{3 \cdot 1 + 2}_{=5} < \underbrace{14 - 1}_{=13}$  wahr ist.

Die Zahl **3** ist *keine* Lösung dieser Ungleichung, weil  $\underbrace{3 \cdot 3 + 2}_{=11} < \underbrace{14 - 3}_{=11}$  falsch ist.

Ungleichungen lösen



MATHEMATIK  
macht  
FREU(N)DE

Tatsächlich hat die Ungleichung  $3 \cdot x + 2 < 14 - x$  unendlich viele Lösungen.

Genau wie die Gleichung  $3 \cdot x + 2 = 14 - x$  können wir auch die Ungleichung nach  $x$  umformen:

$$\begin{array}{l|l} 3 \cdot x + 2 < 14 - x & + x \\ 4 \cdot x + 2 < 14 & - 2 \\ 4 \cdot x < 12 & : 4 \\ x < 3 & \end{array}$$

Die letzte Ungleichung stimmt genau dann, wenn wir für  $x$  eine kleinere Zahl als 3 einsetzen. Wir haben nur Äquivalenzumformungen durchgeführt. Deshalb stimmen auch alle vorherigen Ungleichungen genau dann, wenn wir für  $x$  eine kleinere Zahl als 3 einsetzen.

Alle reellen Zahlen kleiner als 3 sind Lösungen der Ungleichung  $3 \cdot x + 2 < 14 - x$ .  
Die Lösungsmenge der Ungleichung ist also das offene Intervall  $]-\infty; 3[$ .

Multiplikation mit negativen Zahlen / Division durch negative Zahlen



MATHEMATIK  
macht  
FREU(N)DE

Beim Umformen von Ungleichungen müssen wir eine zusätzliche Regel beachten.

Setze in der Lücke rechts das richtige Zeichen  $<$  oder  $>$  ein.

$$\cdot(-3) \left( \begin{array}{l} 4 > 2 \\ -12 < -6 \end{array} \right) :(-3)$$

Beim Multiplizieren mit einer negativen Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

Beim Dividieren durch eine negative Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

Ungleichungen ohne Fallunterscheidung



MATHEMATIK  
macht  
FREU(N)DE

① Löse die Ungleichung über der Grundmenge  $G = \mathbb{R}$ .

- a)  $4 - 3 \cdot x \geq 2 \cdot x + 14$     b)  $\frac{2-x}{3} < \frac{5+2 \cdot x}{2}$     c)  $3 \cdot x - 2 \cdot (5 \cdot x + 4) \leq -(4 \cdot x + 1) \cdot 3$



Wir lösen die Ungleichung  $\frac{3}{x-2} \leq 1$  über der Grundmenge  $G = \mathbb{R}$ .

1) Zuerst ermitteln wir die Definitionsmenge:

Wenn  $x - 2 = 0$ , also  $x = 2$  gilt, dann ist  $\frac{3}{x-2}$  nicht definiert.

Division durch 0

Die Zahl 2 kann damit auch keine Lösung der Gleichung sein.

Die Definitionsmenge  $D$  enthält alle reellen Zahlen außer 2. Kurz:  $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

2) Jetzt ermitteln wir die Lösungsmenge  $L$ , indem wir die Ungleichung nach  $x$  umformen.

Zuerst multiplizieren wir beide Seiten der Ungleichung mit  $(x - 2)$ .

Überlege, ob wir bei dieser Multiplikation das Ungleichheitszeichen umdrehen müssen:

Es hängt vom Wert von  $x$  ab.

Wenn  $x - 2 > 0$ , also  $x > 2$  gilt, dann bleibt es gleich.

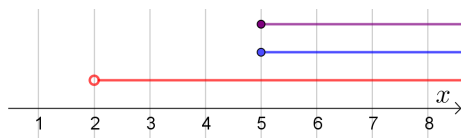
Wenn  $x - 2 < 0$ , also  $x < 2$  gilt, dann müssen wir es umdrehen.

**Fall 1:** Wir untersuchen nur Zahlen  $x > 2$ .

$$3 \leq 1 \cdot (x - 2) \quad | + 2$$

$$5 \leq x$$

Unter den Zahlen  $x > 2$  sind alle Zahlen  $x \geq 5$  Lösungen.



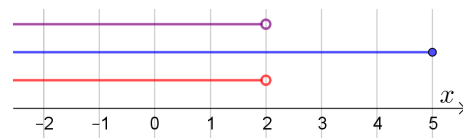
Also sind alle Zahlen  $x \geq 5$  Lösungen.

**Fall 2:** Wir untersuchen nur Zahlen  $x < 2$ .

$$3 \geq 1 \cdot (x - 2) \quad | + 2$$

$$5 \geq x$$

Unter den Zahlen  $x < 2$  sind alle Zahlen  $x \leq 5$  Lösungen.



Also sind alle Zahlen  $x < 2$  Lösungen.

Jede Zahl, die in  $[5; \infty[$  oder in  $] -\infty; 2[$  liegt, ist eine Lösung.

Dafür schreiben wir kurz:  $L = [5; \infty[ \cup ] -\infty; 2[$

Rechts ist das Ergebnis veranschaulicht.

Zu jedem  $x$ -Wert (außer 2) gibt es auf den blauen Kurven einen zugehörigen  $y$ -Wert:

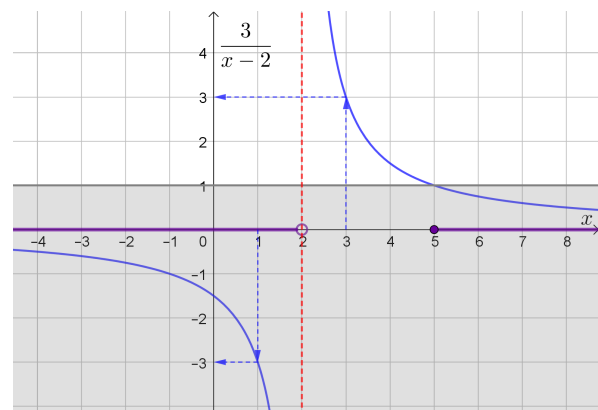
$$y = \frac{3}{x-2}$$

Zum Beispiel:  
 $x = 3 \implies y = 3$   
 $x = 1 \implies y = -3$

Die Lösungen der Ungleichung sind genau jene  $x$ -Werte, für die

$$y = \frac{3}{x-2} \leq 1$$

gilt. Zeichne sie rechts ein.



② Löse die Ungleichung über der Grundmenge  $G = \mathbb{R}$ .

a)  $\frac{42}{x} < 6$     b)  $\frac{5}{x+1} > 7$     c)  $\frac{6 \cdot x - 1}{3 \cdot x + 6} \geq 3$     d)  $\frac{2}{3 \cdot (x-4)} + \frac{5}{2 \cdot (x-4)} \leq 1$     e)  $\frac{5 \cdot x^2}{(x-2)^2} \geq 5$



Wir lösen die Ungleichung  $\frac{2}{x+1} \geq \frac{4}{5-x}$  über der Grundmenge  $G = \mathbb{R}$ .

1) Zuerst ermitteln wir die Definitionsmenge:

Wenn  $x = -1$  gilt, dann ist  $\frac{2}{x+1}$  nicht definiert. Wenn  $x = 5$  gilt, dann ist  $\frac{4}{5-x}$  nicht definiert.

Die Definitionsmenge  $D$  enthält alle reellen Zahlen außer  $-1$  und  $5$ . Kurz:  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 5\}$

2) Jetzt ermitteln wir die Lösungsmenge  $L$ , indem wir die Ungleichung nach  $x$  umformen.

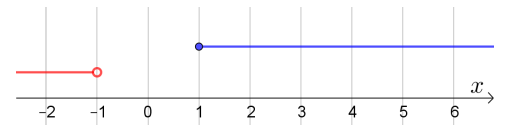
Zuerst multiplizieren wir beide Seiten der Ungleichung mit  $(x+1) \cdot (5-x)$ .

Das Vorzeichen dieses Produkts hängt vom Wert von  $x$  ab. Vervollständige die Tabelle:

Vorzeichen von ..., wenn ...	$x < -1$	$-1 < x < 5$	$x > 5$
$x + 1$	-	+	+
$5 - x$	+	+	-
$(x + 1) \cdot (5 - x)$	-	+	-

**Fall 1:** Wir untersuchen nur Zahlen  $x < -1$ .

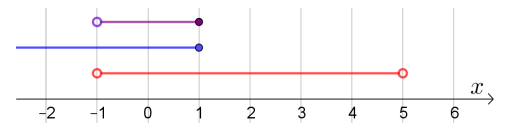
$$\begin{aligned} 2 \cdot (5 - x) &\leq 4 \cdot (x + 1) \\ 10 - 2 \cdot x &\leq 4 \cdot x + 4 \quad | + 2 \cdot x - 4 \\ 6 &\leq 6 \cdot x \quad | : 6 \\ 1 &\leq x \end{aligned}$$



Unter den Zahlen  $x < -1$  sind alle Zahlen  $x \geq 1$  Lösungen. Keine Zahl erfüllt beide Bedingungen.

**Fall 2:** Wir untersuchen nur Zahlen  $-1 < x < 5$ .

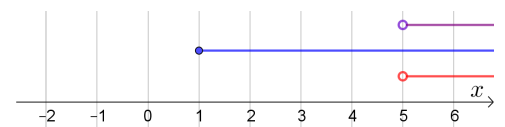
$$\begin{aligned} 2 \cdot (5 - x) &\geq 4 \cdot (x + 1) \\ 10 - 2 \cdot x &\geq 4 \cdot x + 4 \quad | + 2 \cdot x - 4 \\ 6 &\geq 6 \cdot x \quad | : 6 \\ 1 &\geq x \end{aligned}$$



Unter den Zahlen  $-1 < x < 5$  sind alle Zahlen  $x \leq 1$  Lösungen, also alle Zahlen  $-1 < x \leq 1$ .

**Fall 3:** Wir untersuchen nur Zahlen  $x > 5$ .

$$\begin{aligned} 2 \cdot (5 - x) &\leq 4 \cdot (x + 1) \\ 10 - 2 \cdot x &\leq 4 \cdot x + 4 \quad | + 2 \cdot x - 4 \\ 6 &\leq 6 \cdot x \quad | : 6 \\ 1 &\leq x \end{aligned}$$



Unter den Zahlen  $x > 5$  sind alle Zahlen  $x \geq 1$  Lösungen, also alle Zahlen  $x > 5$ .

Die Lösungsmenge  $L$  der Ungleichung ist damit  $L = ]-1; 1] \cup ]5; \infty[$ .

Wir führen die Probe mit  $x = -2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$  und  $x = 6$  durch.

Vervollständige dazu die folgende Tabelle, und vergleiche mit der Lösungsmenge oben:

$x$	$\frac{2}{x+1}$	$\frac{4}{5-x}$	$\frac{2}{x+1} \geq \frac{4}{5-x}$
-2	-2	$\frac{4}{7}$	<input type="checkbox"/> wahr <input checked="" type="checkbox"/> falsch
0	2	$\frac{4}{5}$	<input checked="" type="checkbox"/> wahr <input type="checkbox"/> falsch
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	<input type="checkbox"/> wahr <input checked="" type="checkbox"/> falsch
6	$\frac{2}{7}$	-4	<input checked="" type="checkbox"/> wahr <input type="checkbox"/> falsch

Wir lösen die Ungleichung  $\frac{3}{x-2} > \frac{x}{x^2-4}$  über der Grundmenge  $G = \mathbb{R}$ .

1) Wenn  $x = 2$  gilt, dann ist  $\frac{3}{x-2}$  nicht definiert.

Den Nenner auf der rechten Seite können wir zerlegen:  $x^2 - 4 = (x + 2) \cdot (x - 2)$

Wenn  $x = 2$  oder  $x = -2$  gilt, dann ist  $\frac{x}{x^2-4}$  nicht definiert.

Die Definitionsmenge ist also  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ .

2) Wir multiplizieren beide Seiten der Ungleichung mit  $(x + 2) \cdot (x - 2)$ . Vervollständige die Tabelle:

Vorzeichen von ..., wenn ...	$x < -2$	$-2 < x < 2$	$x > 2$
$x + 2$	-	+	+
$x - 2$	-	-	+
$(x + 2) \cdot (x - 2)$	+	-	+

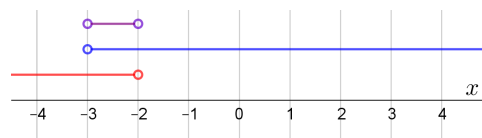
Fall 1: Wir untersuchen nur Zahlen  $x < -2$ .

$$3 \cdot (x + 2) > x$$

$$3 \cdot x + 6 > x \quad | -x - 6$$

$$2 \cdot x > -6 \quad | :2$$

$$x > -3$$



Unter den Zahlen  $x < -2$  sind alle Zahlen  $x > -3$  Lösungen, also alle Zahlen  $-3 < x < -2$ .

Fall 2: Wir untersuchen nur Zahlen  $-2 < x < 2$ .

$$3 \cdot (x + 2) < x$$

$$3 \cdot x + 6 < x \quad | -x - 6$$

$$2 \cdot x < -6 \quad | :2$$

$$x < -3$$



Unter den Zahlen  $-2 < x < 2$  sind alle Zahlen  $x < -3$  Lösungen, also keine Zahl.

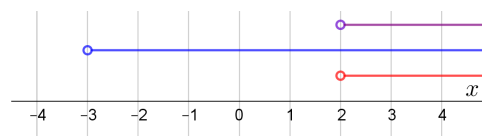
Fall 3: Wir untersuchen nur Zahlen  $x > 2$ .

$$3 \cdot (x + 2) > x$$

$$3 \cdot x + 6 > x \quad | -x - 6$$

$$2 \cdot x > -6 \quad | :2$$

$$x > -3$$



Unter den Zahlen  $x > 2$  sind alle Zahlen  $x > -3$  Lösungen, also alle Zahlen  $x > 2$ .

Die Lösungsmenge  $L$  der Ungleichung ist also  $L = ]-3; -2[ \cup ]2; \infty[$ .



③ Löse die Ungleichung über der Grundmenge  $G = \mathbb{R}$ .

a)  $\frac{4}{x-1} \leq \frac{2}{x-3}$

b)  $\frac{3}{x-5} + \frac{2}{x+10} \geq 0$

c)  $\frac{2 \cdot x + 4}{x^2 - 4 \cdot x} \leq \frac{3}{x-4}$

① a)  $]-2; \infty[$  b)  $]-1; 1[$  c)  $]-\frac{2}{3}; \infty[$  d)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  e)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  f)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  g)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  h)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  i)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  j)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  k)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  l)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  m)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  n)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  o)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  p)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  q)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  r)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  s)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  t)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  u)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  v)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  w)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  x)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  y)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  z)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$

② a)  $]-2; \infty[$  b)  $]-1; 1[$  c)  $]-\frac{2}{3}; \infty[$  d)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  e)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  f)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  g)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  h)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  i)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  j)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  k)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  l)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  m)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  n)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  o)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  p)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  q)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  r)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  s)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  t)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  u)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  v)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  w)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  x)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  y)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  z)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$

③ a)  $]-2; \infty[$  b)  $]-1; 1[$  c)  $]-\frac{2}{3}; \infty[$  d)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  e)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  f)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  g)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  h)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  i)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  j)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  k)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  l)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  m)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  n)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  o)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  p)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  q)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  r)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  s)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  t)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  u)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  v)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  w)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  x)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  y)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$  z)  $]-\frac{1}{2}; \infty[$