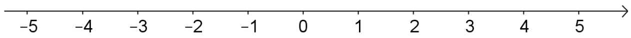
Ungleichungen

Auf der Zahlengerade ordnen wir die reellen Zahlen nach ihrer Größe.
Je weiter rechts die Zahl liegt, desto größer ist sie.
Wir verwenden die folgenden Schreibweisen:



$-3 < 5$ „-3 ist kleiner als 5."
$-4 \leq -4$ „-4 ist kleiner als -4 oder gleich groß wie -4."
$-1 > -3$ „-1 ist größer als -3."
$-2 \geq -4{,}2$ „-2 ist größer als $-4{,}2$ oder gleich groß wie $-4{,}2$."

Merkhilfe:
kleiner als

Ungleichungen

Kreuze jeweils an, ob die Ungleichung wahr oder falsch ist.

wahr	falsch	Ungleichung
☐	☐	$-7 \geq 3$
☐	☐	$3 - 5 \leq 1$
☐	☐	$5 \cdot (-2) \geq 7$
☐	☐	$1 - 3 < 2 - 4$
☐	☐	$(-2) \cdot 4 \leq 0$
☐	☐	$2 > -\frac{1}{7}$

Lösungen von Ungleichungen

Die Ungleichung $3 \cdot x + 2 < 14 - x$ enthält eine Variable x.
Ob die Ungleichung stimmt, hängt vom Wert von x ab:

Die Zahl **1** ist eine **Lösung** dieser Ungleichung, weil $\underbrace{3 \cdot \mathbf{1} + 2}_{=5} < \underbrace{14 - \mathbf{1}}_{=13}$ wahr ist.

Die Zahl 3 ist *keine* Lösung dieser Ungleichung, weil $\underbrace{3 \cdot 3 + 2}_{=11} < \underbrace{14 - 3}_{=11}$ falsch ist.

Ungleichungen lösen

Tatsächlich hat die Ungleichung $3 \cdot x + 2 < 14 - x$ unendlich viele Lösungen.
Genau wie die Gleichung $3 \cdot x + 2 = 14 - x$ können wir auch die Ungleichung nach x umformen:

$$\begin{aligned} 3 \cdot x + 2 &< 14 - x \quad &&| + x \\ 4 \cdot x + 2 &< 14 &&| - 2 \\ 4 \cdot x &< 12 &&| : 4 \\ x &< 3 \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung stimmt genau dann, wenn wir für x eine kleinere Zahl als 3 einsetzen. Wir haben nur Äquivalenzumformungen durchgeführt. Deshalb stimmen auch alle vorherigen Ungleichungen genau dann, wenn wir für x eine kleinere Zahl als 3 einsetzen.

Alle reellen Zahlen kleiner als 3 sind Lösungen der Ungleichung $3 \cdot x + 2 < 14 - x$.
Die Lösungsmenge der Ungleichung ist also das offene Intervall $]-\infty; 3[$.

Multiplikation mit negativen Zahlen / Division durch negative Zahlen

Beim Umformen von Ungleichungen müssen wir eine zusätzliche Regel beachten.

Setze in der Lücke rechts das richtige Zeichen $<$ oder $>$ ein.

$$\begin{array}{c} 4 > 2 \\ \cdot(-3) \downarrow \quad \uparrow :(-3) \\ -12 \ \square \ -6 \end{array}$$

Beim Multiplizieren mit einer negativen Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen um.
Beim Dividieren durch eine negative Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

Ungleichungen ohne Fallunterscheidung

1 Löse die Ungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{R}$.

a) $4 - 3 \cdot x \geq 2 \cdot x + 14$ **b)** $\dfrac{2 - x}{3} < \dfrac{5 + 2 \cdot x}{2}$ **c)** $3 \cdot x - 2 \cdot (5 \cdot x + 4) \leq -(4 \cdot x + 1) \cdot 3$

Bruchungleichungen lösen

Wir lösen die Ungleichung $\dfrac{3}{x-2} \leq 1$ über der Grundmenge $G = \mathbb{R}$.

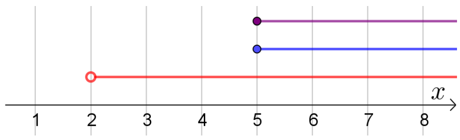
1) Zuerst ermitteln wir die Definitionsmenge:
Wenn $x - 2 = 0$, also $x = 2$ gilt, dann ist $\frac{3}{x-2}$ *nicht* definiert. Division durch 0
Die Zahl 2 kann damit auch keine Lösung der Gleichung sein.
Die Definitionsmenge D enthält alle reellen Zahlen außer 2. Kurz: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

2) Jetzt ermitteln wir die Lösungsmenge L, indem wir die Ungleichung nach x umformen.
Zuerst multiplizieren wir beide Seiten der Ungleichung mit $(x - 2)$.
Überlege, ob wir bei dieser Multiplikation das Ungleichheitszeichen umdrehen müssen:

Fall 1: Wir untersuchen nur Zahlen $x > 2$.

$$3 \leq 1 \cdot (x - 2) \quad | +2$$
$$5 \leq x$$

Unter den Zahlen $x > 2$ sind
alle Zahlen $x \geq 5$ Lösungen.

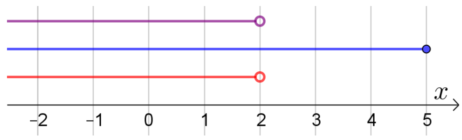


Also sind alle Zahlen $x \geq 5$ Lösungen.

Fall 2: Wir untersuchen nur Zahlen $x < 2$.

$$3 \geq 1 \cdot (x - 2) \quad | +2$$
$$5 \geq x$$

Unter den Zahlen $x < 2$ sind
alle Zahlen $x \leq 5$ Lösungen.



Also sind alle Zahlen $x < 2$ Lösungen.

Jede Zahl, die in $[5; \infty[$ *oder* in $]-\infty; 2[$ liegt, ist eine Lösung.

Dafür schreiben wir kurz: $L = [5; \infty[\ \cup\ ]-\infty; 2[$

Rechts ist das Ergebnis veranschaulicht.
Zu jedem x-Wert (außer 2) gibt es auf den blauen Kurven einen zugehörigen y-Wert:

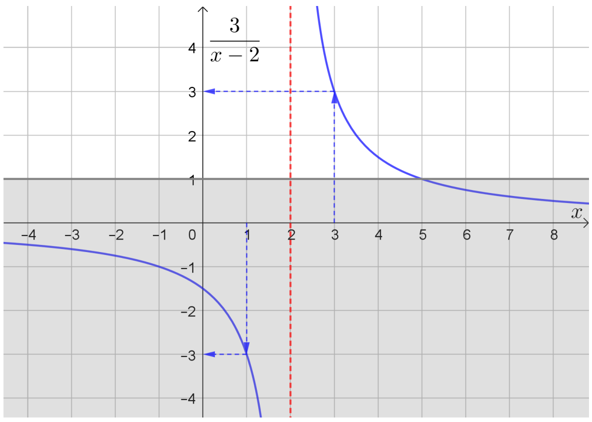
$$y = \frac{3}{x-2}$$

Zum Beispiel:
$x = 3 \implies y = 3$
$x = 1 \implies y = -3$

Die Lösungen der Ungleichung sind genau jene x-Werte, für die

$$y = \frac{3}{x-2} \leq 1$$

gilt. Zeichne sie rechts ein.



Bruchungleichungen

② Löse die Ungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{R}$.

a) $\dfrac{42}{x} < 6$ **b)** $\dfrac{5}{x+1} > 7$ **c)** $\dfrac{6 \cdot x - 1}{3 \cdot x + 6} \geq 3$ **d)** $\dfrac{2}{3 \cdot (x-4)} + \dfrac{5}{2 \cdot (x-4)} \leq 1$ **e)** $\dfrac{5 \cdot x^2}{(x-2)^2} \geq 5$

Bruchungleichungen lösen

Wir lösen die Ungleichung $\dfrac{2}{x+1} \geq \dfrac{4}{5-x}$ über der Grundmenge $G = \mathbb{R}$.

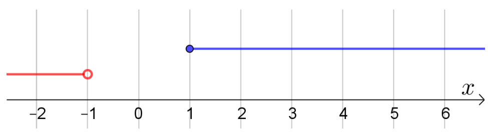
1) Zuerst ermitteln wir die Definitionsmenge:
Wenn $x = -1$ gilt, dann ist $\frac{2}{x+1}$ *nicht* definiert. Wenn $x = 5$ gilt, dann ist $\frac{4}{5-x}$ *nicht* definiert.
Die Definitionsmenge D enthält alle reellen Zahlen außer -1 und 5. Kurz: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 5\}$

2) Jetzt ermitteln wir die Lösungsmenge L, indem wir die Ungleichung nach x umformen.
Zuerst multiplizieren wir beide Seiten der Ungleichung mit $(x+1) \cdot (5-x)$.
Das Vorzeichen dieses Produkts hängt vom Wert von x ab. Vervollständige die Tabelle:

Vorzeichen von ..., wenn ...	$x < -1$	$-1 < x < 5$	$x > 5$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$5-x$			
$(x+1)\cdot(5-x)$			

Fall 1: Wir untersuchen nur Zahlen $x < -1$.

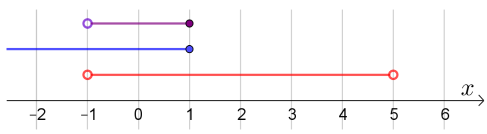
$$\begin{aligned} 2\cdot(5-x) &\leq 4\cdot(x+1) \\ 10 - 2\cdot x &\leq 4\cdot x + 4 \quad &&|\ +2\cdot x - 4 \\ 6 &\leq 6\cdot x &&|\ :6 \\ 1 &\leq x \end{aligned}$$



Unter den Zahlen $x < -1$ sind alle Zahlen $x \geq 1$ Lösungen. Keine Zahl erfüllt *beide* Bedingungen.

Fall 2: Wir untersuchen nur Zahlen $-1 < x < 5$.

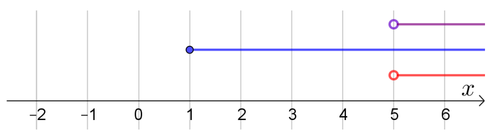
$$\begin{aligned} 2\cdot(5-x) &\geq 4\cdot(x+1) \\ 10 - 2\cdot x &\geq 4\cdot x + 4 \quad &&|\ +2\cdot x - 4 \\ 6 &\geq 6\cdot x &&|\ :6 \\ 1 &\geq x \end{aligned}$$



Unter den Zahlen $-1 < x < 5$ sind alle Zahlen $x \leq 1$ Lösungen, also alle Zahlen $-1 < x \leq 1$.

Fall 3: Wir untersuchen nur Zahlen $x > 5$.

$$\begin{aligned} 2\cdot(5-x) &\leq 4\cdot(x+1) \\ 10 - 2\cdot x &\leq 4\cdot x + 4 \quad &&|\ +2\cdot x - 4 \\ 6 &\leq 6\cdot x &&|\ :6 \\ 1 &\leq x \end{aligned}$$



Unter den Zahlen $x > 5$ sind alle Zahlen $x \geq 1$ Lösungen, also alle Zahlen $x > 5$.

Die Lösungsmenge L der Ungleichung ist damit $L = \,]-1; 1] \cup \,]5; \infty[$.

Wir führen die Probe mit $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ und $x = 6$ durch.
Vervollständige dazu die folgende Tabelle, und vergleiche mit der Lösungsmenge oben:

x	$\frac{2}{x+1}$	$\frac{4}{5-x}$	$\frac{2}{x+1} \geq \frac{4}{5-x}$
-2			☐ wahr ☐ falsch
0			☐ wahr ☐ falsch
2			☐ wahr ☐ falsch
6			☐ wahr ☐ falsch

Bruchungleichungen lösen

Wir lösen die Ungleichung $\dfrac{3}{x-2} > \dfrac{x}{x^2-4}$ über der Grundmenge $G = \mathbb{R}$.

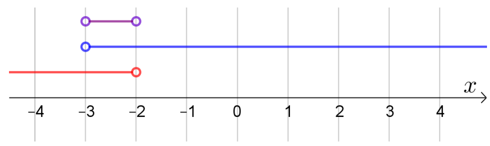
1) Wenn $x = 2$ gilt, dann ist $\frac{3}{x-2}$ *nicht* definiert.
Den Nenner auf der rechten Seite können wir zerlegen: $x^2 - 4 = (x+2) \cdot (x-2)$
Wenn $x = 2$ oder $x = -2$ gilt, dann ist $\frac{x}{x^2-4}$ *nicht* definiert.
Die Definitionsmenge ist also $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

2) Wir multiplizieren beide Seiten der Ungleichung mit $(x+2) \cdot (x-2)$. Vervollständige die Tabelle:

Vorzeichen von …, wenn …	$x < -2$	$-2 < x < 2$	$x > 2$
$x + 2$			
$x - 2$			
$(x+2) \cdot (x-2)$			

Fall 1: Wir untersuchen nur Zahlen $x < -2$.

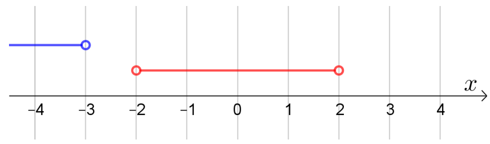
$$\begin{aligned} 3 \cdot (x+2) &> x \\ 3 \cdot x + 6 &> x \quad &| -x-6 \\ 2 \cdot x &> -6 \quad &| :2 \\ x &> -3 \end{aligned}$$



Unter den Zahlen $x < -2$ sind alle Zahlen $x > -3$ Lösungen, also alle Zahlen $-3 < x < -2$.

Fall 2: Wir untersuchen nur Zahlen $-2 < x < 2$.

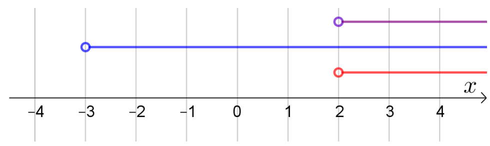
$$\begin{aligned} 3 \cdot (x+2) &< x \\ 3 \cdot x + 6 &< x \quad &| -x-6 \\ 2 \cdot x &< -6 \quad &| :2 \\ x &< -3 \end{aligned}$$



Unter den Zahlen $-2 < x < 2$ sind alle Zahlen $x < -3$ Lösungen, also *keine* Zahl.

Fall 3: Wir untersuchen nur Zahlen $x > 2$.

$$\begin{aligned} 3 \cdot (x+2) &> x \\ 3 \cdot x + 6 &> x \quad &| -x-6 \\ 2 \cdot x &> -6 \quad &| :2 \\ x &> -3 \end{aligned}$$



Unter den Zahlen $x > 2$ sind alle Zahlen $x > -3$ Lösungen, also alle Zahlen $x > 2$.

Die Lösungsmenge L der Ungleichung ist also $L = \,]-3; -2[\, \cup \,]2; \infty[$.

Bruchungleichungen

③ Löse die Ungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{R}$.

a) $\dfrac{4}{x-1} \leq \dfrac{2}{x-3}$ **b)** $\dfrac{3}{x-5} + \dfrac{2}{x+10} \geq 0$ **c)** $\dfrac{2 \cdot x + 4}{x^2 - 4 \cdot x} \leq \dfrac{3}{x-4}$

① **a)** $]-\infty; -2]$ **b)** $]-\frac{11}{8}; \infty[$ **c)** $]-\infty; 1]$

② **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $L = \,]-\infty; 0[\, \cup \,]7; \infty[$ **b)** $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $L = \,]-1; -\frac{2}{7}[$ **c)** $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $L = [-\frac{19}{3}; -2[$
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$, $L = \,]-\infty; 4[\, \cup [\frac{43}{6}; \infty[$ **e)** $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $L = [1; 2[\, \cup \,]2; \infty[\, = [1; \infty[\, \setminus \{2\}$

③ **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$, $L = \,]-\infty; 1[\, \cup \,]3; 5]$ **b)** $D = \mathbb{R} \setminus \{-10; 5\}$, $L = \,]-10; -4] \cup \,]5; \infty[$ **c)** $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$, $L = \,]0; \infty[\, \setminus \{4\}$