Monotonie. Extremwerte. Krümmung

Dmytro Rzhemovskyi, Mariia Mykhalova
Projekt MmF

February 21, 2024

UNGLEICHUNGEN

Aufgabe 1. Ermittle für folgende Polynomfunktionen, auf welchen Intervallen die Funktionswerte positiv/negativ sind.

a) $f(x) = x(x-2)$
b) $f(x) = (x+1)(x+3)$
c) $f(x) = (3-2x)(x+5)$
d) $f(x) = x(x+3)(x-1)$
e) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$
f) $f(x) = (4-x)(x+1)^2$
g) $f(x) = (2x+5)^3(3-x)$
h) $f(x) = (2-x)^2(2x+6)^5$

Aufgabe 2. Untersuche für folgende rationale Funktionen, auf welchen Intervallen die Funktionswerte positiv/negativ sind.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$
b) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$
c) $f(x) = \dfrac{3-x}{x+4}$
d) $f(x) = \dfrac{x(x-3)}{4x+5}$
e) $f(x) = \dfrac{(2x-1)^2}{(x-2)(-5-x)}$
f) $f(x) = \dfrac{x(3x+6)^3}{(x-2)(2x+3)^4}$

Aufgabe 3. Untersuche für folgende Funktionen, auf welchen Intervallen die Funktionswerte positiv/negativ sind.

a) $f(x) = e^x(x+1)$
b) $f(x) = (x+1)\ln(x)$
c) $f(x) = e^{-x}(2x-1)$
d) $f(x) = (x+3)^2\ln(2-3x)$
e) $f(x) = (e^x-1)(3x-12)$
f) $f(x) = (x-2)(\ln(x)-1)$
g) $f(x) = (x-10)\sqrt{x-3}$
h) $f(x) = (4-x)\sqrt{x-1}$
i) $f(x) = (x+5)\sqrt{x^2-9}$
j) $f(x) = (x^2-x-6)\sqrt{x^2-x-2}$

MONOTONIE UND EXTREMWERTE

Proposition 1. *(**Monotonieverhalten** einer differenzierbaren Funktion)*

Gegeben ist eine auf dem Intervall (a,b) stetig differenzierbare Funktion $f(x)$.

*a) Wenn für alle $x \in (a,b)$ gilt $f'(x) > 0$, dann ist die Funktion f monoton **steigend** auf dem Intervall (a,b).*

b) Wenn für alle $x \in (a,b)$ gilt $f'(x) < 0$, dann ist die Funktion f monoton ***fallend*** *auf dem Intervall (a,b).*

Proposition 2. *(**Lokale Extremstellen** einer differenzierbaren Funktion)*

Gegeben ist eine auf dem Intervall (a,b) stetig differenzierbare Funktion $f(x)$.

Wenn an der Stelle $x_0 \in (a,b)$ $f'(x_0) = 0$ gilt und

a) die Ableitung an der Stelle x_0 von positivem auf negatives Vorzeichen wechselt, dann ist der Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$ ein ***Hochpunkt****.*

b) $f''(x_0) < 0$, dann ist der Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$ ein ***Hochpunkt****.*

c) die Ableitung an der Stelle x_0 von negativem auf positives Vorzeichen wechselt, dann ist der Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$ ein ***Tiefpunkt****.*

d) $f''(x_0) > 0$, dann ist der Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$ ein ***Tiefpunkt****.*

Wenn für die Stelle x_0 gilt $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann ist der Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$ weder ein Hoch- noch ein Tiefpunkt und heißt ***Sattelpunkt****.*

Aufgabe 4. Ermittle für die angegebenen Funktionen jeweils das Monotonieverhalten und alle Extrem- und Sattelpunkte.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b) $f(x) = -x^2 + 6x - 8$

c) $f(x) = 2x^3$

d) $f(x) = -x^5 + 3$

e) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$

f) $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 6x + 6$

g) $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$

h) $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2 - 6x + 9}$

i) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{-x^2 - 4x - 5}$

j) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 4}{x - 8}$

k) $f(x) = xe^{2x-1}$

l) $f(x) = (1+2x)e^{-x^2}$

m) $f(x) = x^2 \ln x$

n) $f(x) = x^3 \ln x^2$

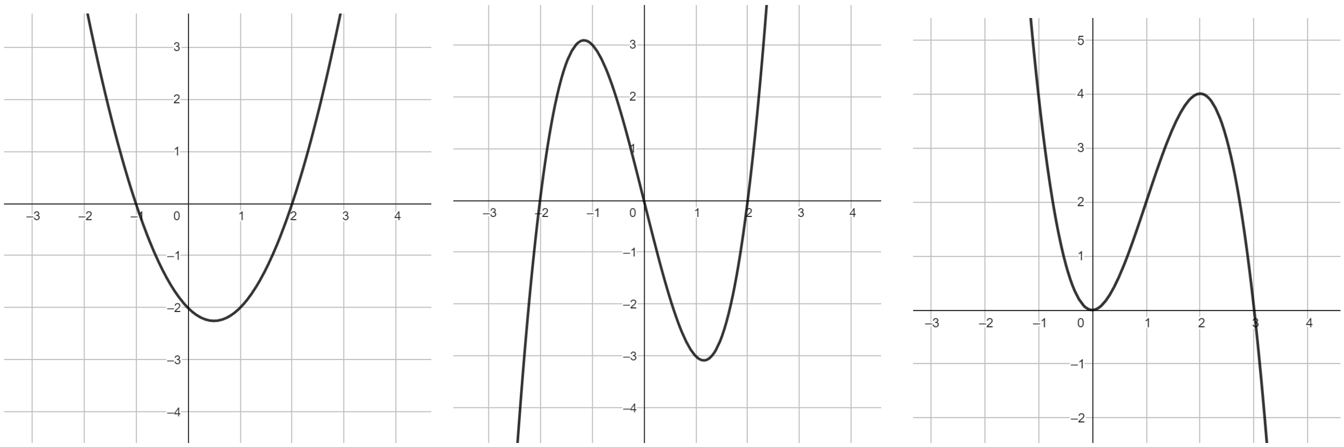
Aufgabe 5. Gegeben ist der Graph der Ableitungsfunktion $f'(x)$. Ermittle die Form des Graphen der Funktion $f(x)$.

Aufgabe 6. Ermittle für die folgenden Funktionen die angegebenen Extremwerte.

a) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$. Ermittle $\min\limits_{x \in [1;4]} f(x)$ und $\max\limits_{x \in [1;4]} f(x)$.

b) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$. Ermittle $\min\limits_{x \in [-1;3]} f(x)$ und $\max\limits_{x \in [-1;3]} f(x)$.

c) $f(x) = e^{-x}(x-2)$. Ermittle $\min\limits_{x \in [0;5]} f(x)$ und $\max\limits_{x \in [0;5]} f(x)$.



a) $f'(x) = x^2 - x - 2$ b) $f'(x) = x^3 - 4x$ c) $f'(x) = -x^3 + 3x^2$

Figure 1: Aufgabe 5

KRÜMMUNG UND WENDEPUNKTE

Proposition 3. *Gegeben ist eine auf dem Intervall (a, b) zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(x)$.*

a) Wenn für alle $x \in (a, b)$ gilt $f''(x) > 0$, dann ist die Funktion f konvex auf dem Intervall (a, b), d. h. sie hat dasselbe Krümmungsverhalten wie die Funktion x^2.

b) Wenn für alle $x \in (a, b)$ gilt $f''(x) < 0$, dann ist die Funktion f konvex auf dem Interval (a, b), d. h. sie hat dasselbe Krümmungsverhalten wie die Funktion $-x^2$.

*Die Stelle x_0, an der die Funktion ihr Krümmungsverhalten ändert, heißt **Wendestelle**.*

Aufgabe 7. Ermittle für folgende Funktionen das Krümmungsverhalten und die Wendepunkte.

a) $f(x) = x^3 - 4x + 3$

b) $f(x) = x^3 - 9x^2 + x - 5$

c) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + x + 10$

d) $f(x) = \dfrac{x^4}{2} - 2x^3 + 3x^2 + 5x - 2$

e) $f(x) = \dfrac{2 - x}{2(x-1)^2}$

f) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2}$

g) $f(x) = xe^{2x}$

h) $f(x) = (x + 3)e^{-x}$

Aufgabe 8. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$ mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

Untersuche wie das Krümmungsverhalten der Funktion von den Werten des Parameters α abhängt.