Newtonverfahren

Dmytro Rzhemovskyi, Mariia Mykhalova
Projekt MmF

January 16, 2024

Newtonverfahren ist eine Methode die Gleichungen $f(x) = 0$ ungefähr zu lösen. Dabei erstellt man eine Folge mithilfe von der rekurrenten Formel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

wo x_0 ist ein Startwert. Es ist bekannt, dass die Folge immer zu einer der Lösungen strebt. Dabei entstehen aber folgende Fragen

1. Wie viele Lösungen hat die Gleichung $f(x) = 0$?
2. Wie sollte man einen Startwert auswählen?

Aufgabe 1. Bestimme für jede Gleichung $f(x) = 0$ die Anzahl der Lösungen durch Skizzieren vom Graph der Funktion f (du musst die Lösungen nicht berechnen).

a) $x^3 + 4x + 2 = 0$ b) $x^3 + 4x^2 - 3 = 0$
c) $x^3 + 5x^2 + 1 = 0$ d) $x^4 - 4x + 3 = 0$
e) $x^4 + x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ f) $x^4 - 2x^3 - 1 = 0$

Zwischenwertsatz. Sei $f(x)$ eine stetige Funktion. Wenn es für zwei Zahlen a und b gilt, dass $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen haben, dann gibt es zwischen a und b eine Nullstelle der Funktion f.

Aufgabe 2. Für jede Lösung einer Gleichung finde zwei aufeinander folgende ganze Zahlen, die die Lösung in einem Interval einschließen.

Hinweis: benutze den Zwischenwertsatz.

a) $0.5x^3 - 4x - 2 = 0$ (3 Lösungen)
b) $0.1x^3 - x^2 + 3x - 5 = 0$ (1 Lösung)
c) $0.2x^4 - 6x^2 + 4 = 0$ (4 Lösungen)

Aufgabe 3. Finde mithilfe des Newtonverfahrens alle Lösungen der Gleichung (auf 2 Nachkommastellen).

Hinweis: finde zunächst die Anzahl der Lösungen und bestimme dann für jede Lösung einen Startwert x_1 mithilfe des Zwischenwertsatzes.

a) $0.5x^3 + x - 5 = 0$ b) $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$

c) $x^4 - 4x^3 - 3 = 0$

d) $x^4 - 4x + 3 = 0$

e) $e^x - 2x - 4 = 0$

f) $e^{3x} - 3x - 7 = 0$

g) $(\star)$ $\sin x - 2x - 3 + x^2 = 0$

h) $(\star)$ $e^x - x^2 - 3x = 0$