

Folgen und Reihen

Dmytro Rzhemovskyi, Mariia Mykhalova
Projekt MmF

21. Februar 2024

1 Arithmetische Folgen

Proposition 1. Gegeben ist eine arithmetische Folge a_n mit dem Differenz d . Dann kann die explizite Formel von a_n wie folgt berechnet werden.

$$a_n = a_1 + d(n - 1), \quad n = 1, 2, \dots$$

Aufgabe 1.1. Ermittle eine explizite Formel für a_n in den folgenden arithmetischen Folgen.

a) $5, 7, 9, \dots$

b) $10, 9, 8, \dots$

c) $-7, -2, 3, \dots$

d) $13, 9, 5, \dots$

Aufgabe 1.2. Gegeben ist eine arithmetische Folge a_n . Ermittle die explizite Formel für a_n , wenn

a) $a_1 = 3$ und $a_3 = 7$

b) $a_{10} = -4$ und $d = -3$

c) $a_7 = 20$ und $a_{11} = 44$

d) $a_5 = 19$ und $a_7 + a_9 = 62$

Proposition 2. Gegeben ist eine arithmetische Folge a_n . Die Summe S_n der ersten n Glieder der Folge kann wie folgt berechnet werden.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Aufgabe 1.3. Ermittle die Anzahl der Terme einer arithmetischen Folge und berechne die Summe.

a) $3 + 7 + 11 + \dots + 51$

b) $12 + 9 + 6 + \dots - 33$

c) $-3 + 2 + 7 + \dots + 62$

d) $121 + 110 + 99 + \dots - 66$

Aufgabe 1.4. Berechne die folgenden Summen.

Hinweis: $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \dots + a_n$

a) $\sum_{i=1}^{10} (1 + 2i)$

b) $\sum_{i=0}^{15} (-5 + 4i)$

c) $\sum_{i=3}^{12} (13 - 2i)$

d) $\sum_{i=10}^{40} (63 - 4i)$

Aufgabe 1.5. Ermittle a_1 und d der arithmetischen Folge a_n , wenn

a) $S_5 = 15$ und $a_5 = 16$

b) $S_7 = 46$ und $S_8 = 50$

c) $S_9 = 54$ und $a_4 = 16$

d) $S_8 = -44$ und $S_{40} = 100$

Aufgabe 1.6. Berechne die folgenden Summen.

a) $\sum_{i=1}^{10} (-1)^i (2i + 1)$

b) $\sum_{i=1}^{17} (-1)^i (3i - 2)$

c) $\sum_{i=4}^{23} (-1)^i (49 - 5i)$

d) $\sum_{i=7}^{37} (-1)^{i-1} (18 - 2i)$

a) $\sum_{i=2}^{40} (-1)^{i-1} (4i - 7)$

a) $\sum_{i=0}^{50} (-1)^i (5 - 3i)$

2 Geometrische Folgen

Proposition 3. Gegeben ist eine geometrische Folge b_n mit dem Differenz q . Dann kann die explizite Formel von b_n wie folgt berechnet werden.

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Aufgabe 2.1. Ermittle eine explizite Formel für b_n in den folgenden geometrischen Folgen.

a) $2, 4, 8, \dots$

b) $5, 9, 13, \dots$

c) $11, 4, -3, \dots$

d) $-1, -\frac{3}{2}, -2, \dots$

Aufgabe 2.2. Gegeben ist eine geometrische Folge b_n . Ermittle die explizite Formel für b_n , wenn

a) $b_1 = 2$ und $b_4 = 36$

b) $b_3 = 81$ und $q = \frac{1}{3}$

c) $b_4 = -1$ und $b_7 = \frac{1}{8}$

d) $b_5 = 24$ und $b_9 = 6$

Proposition 4. Gegeben ist eine geometrische Folge b_n . Die Summe S_n der ersten n Glieder der Folge kann wie folgt berechnet werden.

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Aufgabe 2.3. Ermittle die Anzahl der Terme einer geometrischen Folge und berechne die Summe.

a) $1 + 2 + 4 + \dots + 2048$

b) $486 + 162 + 54 + \dots + \frac{2}{9}$

c) $162 - 108 + 72 - \dots - \frac{256}{27}$

d) $1 + \sqrt{3} + 3 + \dots + 243$

Aufgabe 2.4. Berechne die folgenden Summen. (endliche geometrische Folge)

Hinweis: $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \dots + a_n$

a) $\sum_{i=1}^{10} 2^i$

b) $\sum_{i=0}^{15} \frac{3^i}{2^i}$

c) $\sum_{i=4}^{11} (-3)^i$

d) $\sum_{i=2}^9 \frac{2^{4i}}{5^i}$

Aufgabe 2.5. Ermittle b_1 und q der geometrischen Folge b_n , wenn

a) $S_7 = 2186$ und $b_6 = 6$

b) $S_6 = 728$ und $b_3 = 54$

c) $S_{10} = 217 \cdot (1 - \sqrt{2})$ und $b_5 = 28$

Proposition 5. Gegeben ist eine geometrische Folge b_n mit $|q| < 1$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \frac{b_1}{1 - q}$$

Proposition 6. (Eigenschaften von Reihen)

1. Für zwei Folgen a_n und b_n mit $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a \in \mathbb{R}$ und $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{i=1}^{\infty} a_n + \sum_{i=1}^{\infty} b_n = a + b$$

2. Für eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ und eine Folge a_n mit $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} (ca_n) = c \sum_{i=1}^{\infty} a_n = ca$$

Aufgabe 2.6. Berechne die folgenden Summen.

a) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$

b) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^i}}$

c) $\sum_{i=0}^{\infty} 5 \cdot 3^{-i}$

d) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{5^i}{3^{2i}}$

e) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{4i}}{5^{2i}}$

f) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{3^i}$

Aufgabe 2.7. Berechne die folgenden Summen.

a) $\sum_{i=1}^{10} (1 + 2^i)$

b) $\sum_{i=1}^{12} (3^i - i)$

c) $\sum_{i=0}^8 (4i + 3 - \frac{1}{2^i})$