Integrationsmethoden (Teil 1)

Dmytro Rzhemovskyi, Mariia Mykhalova
Projekt MmF

January 16, 2024

EINFACHE INTEGRALE

Aufgabe 1. Ermittle das unbestimmte Integral.

a) $\int 2\,dx$ b) $\int 3x\,dx$ c) $\int (-4x+1)\,dx$

d) $\int 5x^2\,dx$ e) $\int \left(x^2-3\right)dx$ f) $\int \left(2x^2+4x-2\right)dx$

g) $\int (-2x^3+7x^2-1)\,dx$ h) $\int \left(5x^4-\frac{1}{2}x^2\right)dx$ i) $\int \left(2x^9+\frac{1}{3}x^8\right)dx$

j) $\int \left(\frac{3}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)dx$ k) $\int \frac{2}{x^3}+\frac{5}{x^7}\,dx$ l) $\int \frac{5}{x^5}-\frac{e}{x}\,dx$

m) $\int 4\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\,dx$ n) $\int \frac{2}{5\sqrt{x^5}}\,dx$ o) $\int 2\sqrt[5]{x^3}+\frac{5}{7\sqrt[3]{x^7}}\,dx$

p) $\int 3\sin(x)+\cos(x)\,dx$ q) $\int 2\cos(x)+\frac{3}{\cos^2(x)}\,dx$ r) $\int 5\sin(x)-\frac{1}{3\sin^2(x)}\,dx$

s) $\int -3e^x+x\,dx$ t) $\int 3^x+3e^x-x^2\,dx$ u) $\int \pi^x-4e^x\,dx$

SUBSTITUTION

Proposition 1. *Gegeben ist eine stetig differenzierbare Funktion $f(x)$. Dann gilt für das Differential $df(x)$ der folgende Zusammenhang.*

$$df(x)=f'(x)\,dx$$

Beispiel. Ermittle das unbestimmte Integral

$$\int \sqrt{2x-7}\,dx$$

Lösung. Laut der Proposition gilt $d(2x-7)=2dx$. Daraus folgt, dass

$$\int \sqrt{2x-7}\,dx=\int \sqrt{2x-7}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\,dx=\int \frac{1}{2}\sqrt{2x-7}\,d(2x-7)$$

Substitution $t=2x-7$.

$$\int \frac{1}{2}\sqrt{2x-7}\,d(2x-7)=\int \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\frac{2\sqrt{t^3}}{3}+C=\frac{\sqrt{(2x-7)^3}}{3}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Aufgabe 2. Ermittle das unbestimmte Integral. Benutze dabei eine lineare Substitution.

a) $\int (2x+1)^2 dx$ b) $\int (7x-4)^{10} dx$

c) $\int \sqrt{-3x-2} dx$ d) $\int \sqrt[3]{0.5x+1} dx$

e) $\int \frac{2}{3x-1} dx$ f) $\int \frac{-3}{0.2x+4} dx$

g) $\int \sin(x+\pi) dx$ h) $\int \cos(-\pi x+2) dx$

i) $\int e^{-2x-2} dx$ j) $\int 3^{\pi x+4} dx$

Beispiel. Ermittle das unbestimmte Integral

$$\int x \sin(3x^2+1)\, dx$$

Lösung. Laut der Proposition gilt $d(3x^2+1) = 6x\, dx$. Daraus folgt, dass

$$\int x \sin(3x^2+1)\, dx = \int \sin(3x^2+1) \cdot \frac{1}{6} \cdot 6x\, dx = \int \frac{1}{6} \sin(3x^2+1)\, d(3x^2+1)$$

Substitution $t = 3x^2+1$.

$$\int \frac{1}{6} \sin(3x^2+1)\, d(3x^2+1) = \int \frac{1}{6} \sin(t)\, dt = \frac{1}{6}(-\cos(t)) + C = -\frac{1}{6} \cos(3x^2+1) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3. Ermittle das unbestimmte Integral. Benutze dabei eine nichtlineare Substitution.

a) $\int x\sqrt{x^2+1} dx$ b) $\int \frac{xe^{2x^2}}{3} dx$ c) $\int \sin x \cos x dx$

d) $\int \frac{\ln^2(x)}{x} dx$ e) $\int 6x^2 \cos x^3 dx$ f) $\int \sin x \sqrt{\cos x} dx$

g) $\int x^2\, 2^{2x^3+1} dx$ h) $\int e^{\cos x - 1} \sin x\, dx$ i) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$