Integrationsmethoden (Teil 2)

Dmytro Rzhemovskyi, Mariia Mykhalova
Projekt MmF

January 16, 2024

PARTIALBRUCHZERLEGUNG

Aufgabe 1. Dividiere zwei Polynome. Bestimme $s(x)$ und den Rest $r(x)$. Schreibe das Polynom $p(x)$ in der Form $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$.

a) $p(x) = x$ und $q(x) = x - 1$

b) $p(x) = 8x + 5$ und $q(x) = 2x + 1$

c) $p(x) = x^2 + 2x$ und $q(x) = x + 2$

d) $p(x) = 2x^2 + 3x + 5$ und $q(x) = x$

e) $p(x) = 4x^2 + 8x - 7$ und $q(x) = 2x + 2$

f) $p(x) = -7x^2 - 2x + 10$ und $q(x) = 3 - x$

g) $p(x) = x^3 + 4x^2 - 7x + 1$ und $q(x) = x + 2$

h) $p(x) = 2x^3 - 4x + 3$ und $q(x) = -2x + 1$

Aufgabe 2. Ermittle das unbestimmte Integral.

a) $\displaystyle\int \frac{x}{x-1}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x+2}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{4x^2+2x-3}{2x-4}dx$ e) $\displaystyle\int \frac{-6x^3+6x^2+4x-7}{3x-1}dx$ f) $\displaystyle\int \frac{x^3-4x^2+6x+5}{x-2}dx$

PARTIELLE INTEGRATION

Proposition 1. *Für zwei differenzierbare Funktionen f und g gilt:*

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

Beispiel. Ermittle das unbestimmte Integral

$$\int xe^x\,dx$$

Lösung. Setzt man $f'(x) = e^x$ und $g(x) = x$, dann gilt $f(x) = e^x$ und $g'(x) = 1$. So erhalten wir, dass

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int e^x\,dx = e^x$$

Mit Porposition 1 ergibt sich

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung. Wir könnten auch $f'(x) = x$ und $g(x) = e^x$ probieren. Dann erhalten wir $f(x) = \frac{x^2}{2}$ und $g'(x) = e^x$. Das ergibt das Integral

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int \frac{x^2}{2}e^x\,dx,$$

das komlizierter ist als das Ausgangsintegral.

Aufgabe 3. Ermittle das unbestimmte Integral. Probiere für jedes Integral zwei verschiedene Fälle für $f'(x)$ und $g(x)$.

a) $\int x\cos(x)dx$ b) $\int x\ln(x)dx$

c) $\int (3x+1)e^{-2x+3}dx$ d) $\int (-4x+1)\sin(2x+\pi)dx$

e) $\int x^2e^xdx$ f) $\int x^2\sin(x)dx$

g) $\int x^3\ln(x)dx$ h) $\int (4x-1)^2\ln(2x+1)dx$