Parameterdarstellung der Ebene

Dmytro Rzhemovskyi, Mariia Mykhalova
Projekt MmF

March 6, 2024

Aufgabe 1. Gegeben ist eine Ebene $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ und ein Punkt $A \in \mathbb{R}^3$. Liegt der Punkt A auf der Ebene α?

a) $A(1 \mid 2 \mid 0), \quad \alpha : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \; t, s \in \mathbb{R}.$

b) $A(-6 \mid 14 \mid 10), \quad \alpha : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \; t, s \in \mathbb{R}.$

c) $A(-2 \mid 1 \mid -2), \quad \alpha : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \; t, s \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 2. Gegeben ist eine Gleichung der Ebene $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ im Parameterform, sowie ein Punkt $A \in \mathbb{R}^3$. Gib die fehlende Koordinate des Punktes A an, sodass A auf α liegt.

a) $A(x_A \mid 2 \mid 0), \quad \alpha : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \; t, s \in \mathbb{R}.$

b) $A(2 \mid -1 \mid z_A), \quad \alpha : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; t, s \in \mathbb{R}.$

c) $A(-4 \mid y_A \mid 3), \quad \alpha : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \; t, s \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 3. Gegeben ist eine Ebene $\alpha \in \mathbb{R}^3$ im Parameterform. Bestimme die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen x, y, z. Skizziere die Ebene im kartesischen Koordinatensystem.

a) $\alpha : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \; t, s \in \mathbb{R}.$

b) $\alpha : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t, s \in \mathbb{R}.$

c) $\alpha : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t, s \in \mathbb{R}$.

d) $\alpha : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4. (Parallele Ebene)

Ermittle die Parameterdarstellung der folgenden Ebenen.

Hinweis: Sei die Parameterdarstellung der Ebene α gegeben. Überlege, welche Richtungsvektoren die zu α parallele Ebene β haben kann.

a) Die zu $\alpha : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t, s \in \mathbb{R}$, parallele Ebene, auf welcher der Punkt $A(2 \mid 1 \mid -4)$ liegt.

b) Die zu $\alpha : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t, s \in \mathbb{R}$, parallele Ebene, auf welcher der Punkt $A(3 \mid 5 \mid 2)$ liegt.

c) Die zur xy-Koordinatenebene parallele Ebene, auf welcher der Punkt $A(5 \mid -1 \mid 7)$ liegt.

d) Die zur yz-Koordinatenebene parallele Ebene, auf welcher der Punkt $A(-1 \mid 3 \mid 5)$ liegt.

Aufgabe 5. (Drei Punkte)

Ermittle die Parameterdarstellung der folgenden Ebenen.

a) Jene Ebene, auf der die Punkte $A(1 \mid 3 \mid -1), B(0 \mid -1 \mid 4)$ und $C(5 \mid 0 \mid 2)$ liegen.

b) Jene Ebene, auf der die Gerade $\alpha : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, und der Punkt $A(0 \mid 1 \mid -2)$ liegen.

c) Jene Ebene, auf der die sich schneidenden Geraden $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, und $h : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$, liegen.

d) Jene Ebene, auf der die echt parallelen Geraden $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, und $h : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$, liegen.

Aufgabe 6. (Zwei Geraden und eine Ebene)

Gegeben sind zwei Geraden $a, b \subset \mathbb{R}^3$.

1. Ermittle die Lagebeziehung der beiden Geraden zueinander (sich schneidend, windschief, echt parallel, identisch).
2. Gib jeweils eine Gleichung jener Ebene in Parameterform an (wenn möglich), in der beide Geraden liegen.

a) $a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, \quad b: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R},$

b) $a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, \quad b: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R},$

c) sich schneidend

d) $a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, \quad b: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}.$

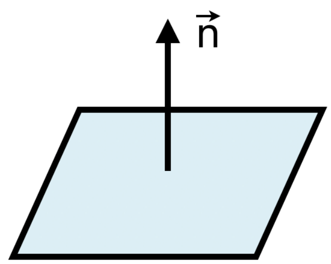
e) $a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, \quad b: \vec{X} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ -16 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 7. (Normalvektor der Ebene)

Gegeben ist ein Normalvektor $\vec{n}$ der Ebene α, d.h. ein Vektor, der orthogonal zur Ebene steht. Ermittle die Parameterdarstellung der Ebene α, wenn

a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ und der Punkt $A(5 \mid 0 \mid -1)$ auf der Ebene α liegt.

b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und der Punkt $A(2 \mid 4 \mid -7)$ auf der Ebene α liegt.



c) $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Ebene α die Gerade $\vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, enthält.

d) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Ebene α die Gerade $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, enthält.

Hinweis: Richtungsvektor einer Ebene steht zum Normalvektor der Ebene orthogonal.

Definition 1. (Kreuzprodukt)
$\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind zwei Vektoren im Raum. Dann ist das **Kreuzprodukt** von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ein Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$, sodass

1. $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ und $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$ gilt.
2. die Länge von $\vec{u} \times \vec{v}$ gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms ist, das $\vec{u}$ und $\vec{v}$ einschließen.
3. die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden (wie die Koordinatenachsen).

Proposition 1. *(Kreuzprodukt)*
Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$. *Dann können die Koordinaten des Kreuzproduktes wie folgt berechnet werden.*

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ -(x_1 z_2 - z_1 x_2) \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8. (Orthogonale Gerade)

Bestimme die Parameterdarstellung der Geraden, die durch den Punkt A geht und orthogonal zu der Ebene α steht.

Hinweis: Die Koordinaten des Vektors, der orthogonal zu den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$ steht, können als Koordinaten des Kreuzproduktes berechnet werden.

a) $A(1 \mid 0 \mid 1), \quad \alpha : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ t, s \in \mathbb{R},$

b) $A(1 \mid -1 \mid 2), \quad \alpha : \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t, s \in \mathbb{R},$

c) $A(2 \mid 4 \mid -2), \quad \alpha : \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \ t, s \in \mathbb{R}$