Parameterdarstellung von Geraden (Teil 2)

Dmytro Rzhemovskyi, Mariia Mykhalova
Projekt MmF

February 20, 2024

SCHNITTPUNKTE

Aufgabe 1. (Schnittpunkt zweier Geraden)

Gegeben sind zwei Geraden in Parameterform. Ermittle den Schnittpunkt dieser Geraden (wenn dieser existiert).

a) $a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ und $b : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

b) $a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ und $b : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

c) $a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ und $b : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$

d) $a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ und $b : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$

e) $a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ und $b : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$

Aufgabe 2. (Lagebeziehung von zwei Geraden)

Untersuche die Lagebeziehung (identisch, parallel, sich schneidend, windschief) von zwei Geraden (in $\mathbb{R}^2$ und in $\mathbb{R}^3$) zueinander.

a) $a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ und $b : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$

b) $a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ und $b : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

c) $a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ und $b : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

d) $a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ und $b : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

e) $a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ und $b: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

f) $a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ und $b: \vec{X} = \begin{pmatrix} -19 \\ 2 \\ 16 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

g) $a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ und $b: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ -9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

h) $a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ und $b: \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -15 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. (Schnittpunkt einer Geraden und einer Kurve)

Ermittle die Schnittpunkte der Geraden mit der Kurve.

a) $a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ und $y = x^2 - 4$.

b) $a: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ und $y = 2\sqrt{x} + 1$.

c) $a: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ und $y = \frac{4}{x}$.

d) $a: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ und $x^2 + y^2 = 4$.

Aufgabe 4. (Linien im Dreieck)

Gegeben ist ein Dreieck ABC.

a) $A(-4 \mid 0)$, $B(0 \mid 6)$, $C(2 \mid 0)$

b) $A(-5 \mid 1)$, $B(-3 \mid 5)$, $C(7 \mid 3)$

1. Ermittle die Parameterdarstellung der Geraden, auf denen die Höhen des Dreiecks liegen. Zeige, dass alle drei Geraden sich in einem Punkt schneiden.
2. Ermittle die Parameterdarstellung der Geraden, auf denen die Mittelsenkrechten liegen. Zeige, dass alle drei Geraden sich in einem Punkt schneiden und bestimme den Radius des Umkreises.
3. Ermittle die Parameterdarstellung der Geraden, auf denen die Schwerlinien liegen. Zeige, dass alle drei Geraden sich in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 5. (Orthogonale Projektion)

Ermittle die Koordinaten der orthogonalen Projektion des Punktes A auf die Gerade a.

Hinweis: Für den Punkt A muss man einen Punkt A' auf der Geraden a finden, sodass $\overrightarrow{AA'} \perp a$.

a) $A(4 \mid 0)$, $a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

b) $A(-2 \mid -2)$, $a: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

c) $A(0 \mid 0 \mid 3), \quad a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$ d) $A(1 \mid -2 \mid 3), \quad a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\1\\5\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$

Aufgabe 6. (Abstand zu einer Geraden)

Ermittle den Abstand des Punktes A zu der Geraden a.

Hinweis: Finde eine orthogonale Projektion A' des Punktes A auf die Gerade a und ermittle die Länge $|AA'|$.

a) $A(3 \mid 0), \quad a: \overrightarrow{X} = t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$ b) $A(2 \mid 3), \quad a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$

c) $A(1 \mid 2 \mid 3), \quad a: \overrightarrow{X} = t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$ d) $A(5 \mid 0 \mid 0), \quad a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$

Aufgabe 7. (Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden)

Gegeben sind zwei windschiefe Geraden $a \subset \mathbb{R}^3$ und $b \subset \mathbb{R}^3$ in Parameterform. Ermittle den Abstand zwischen a und b.

Hinweis: Finde den Vektor $\overrightarrow{AB}$ mit $A \in a$ und $B \in b$, sodass $\overrightarrow{AB} \perp a$ und $\overrightarrow{AB} \perp b$.

a) $a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$ und $b: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}.$

b) $a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$ und $b: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}.$