Vektorkoordinaten

Dmytro Rzhemovskyi, Mariia Mykhalova
Projekt MmF

February 20, 2024

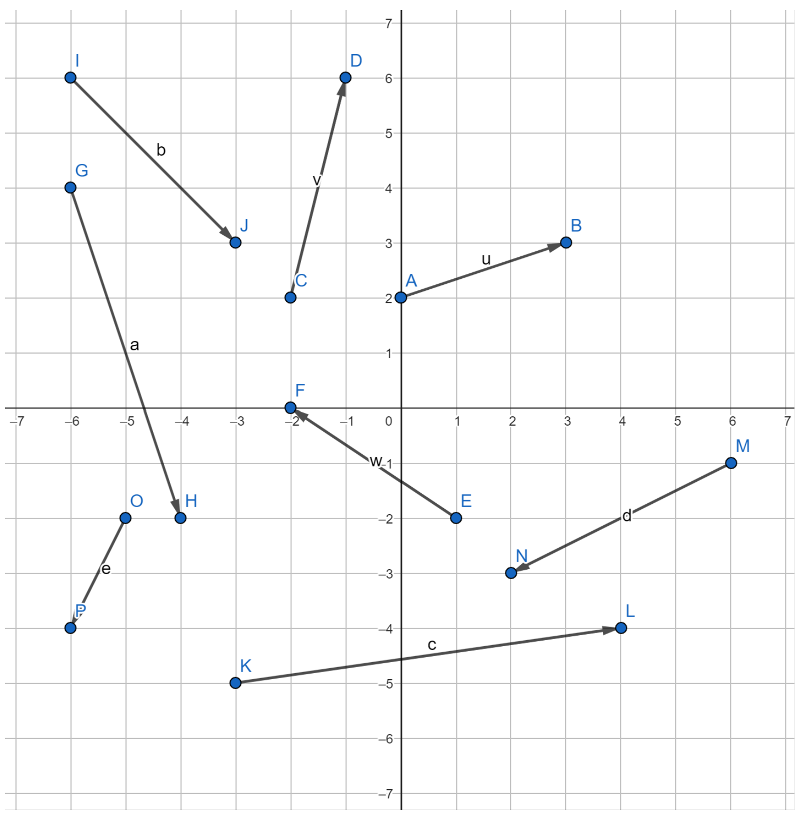
VEKTORKOORDINATEN. GLEICHE VEKTOREN

Definition 1. (Vektorkoordinaten)

Gegeben ist ein Vektor $\vec{a}$ im kartesischen Koordinatensystem. Betrachte den Vektor $\overrightarrow{OP}$, sodass $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$ und der Punkt O der Koordinatenursprung ist. Die Koordinaten des Punktes P nennt man die Vektorkoordinaten des Vektors $\vec{a}$.

Proposition 1. *Gegeben sind zwei Punkte $A = (x_A, y_A)$ und $B(x_B, y_B)$ im kartesischen Koordinatensystem. Dann sind die Vektorkoordinaten von $\overrightarrow{AB}$ gleich* $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1. Ermittle die Koordinaten der eingezeichneten Vektoren.



Quelle: Projekt MmF.

Aufgabe 2. Untersuche, ob das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

Hinweis: Es genügt zu überprüfen, ob zwei gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang sind.

a) $A(1 \mid 5), B(10 \mid 9), C(15 \mid 6), D(6 \mid 2)$

b) $A(-7 \mid 1), B(-4 \mid 6), C(9 \mid 4), D(5 \mid -2)$

c) $A(2 \mid 3 \mid -2), B(-2 \mid 5 \mid 6), C(0 \mid 3 \mid 5), D(4 \mid 1 \mid -3)$

d) $A(-2 \mid 2 \mid 0), B(-3 \mid 4 \mid 5), C(0 \mid 3 \mid -2), D(-2 \mid 7 \mid 8)$

Quelle: Projekt MmF.

Aufgabe 3. Gegeben sind der Punkt A und der Vektor $\vec{a}$.

1. Zeichne den Vektor $\overrightarrow{AB}$, sodass $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, und ermittle die Koordinaten des Punktes B.
2. Zeichne den Vektor $\overrightarrow{BA}$, sodass $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, und ermittle die Koordinaten des Punktes B.

a) $A(1 \mid 2), \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $A(-2 \mid 3), \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $A(0 \mid 3 \mid 4), \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $A(-5 \mid 1 \mid 0), \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Quelle: Projekt MmF.

Aufgabe 4. Gegeben sind die Eckpunkte A, B, C eines Parallelogramms $ABCD$. Ermittle die Koordinaten des Eckpunkts D.

a) $A(-4 \mid 0)$, $B(-2 \mid 4)$, $C(5 \mid 6)$

b) $A(-6 \mid 2)$, $B(3 \mid 8)$, $C(11 \mid 4)$

c) $A(1 \mid 2 \mid 1)$, $B(1 \mid 2 \mid 5)$, $C(6 \mid 4 \mid 3)$

d) $A(-3 \mid 5 \mid -1)$, $B(2 \mid 1 \mid 0)$, $C(5 \mid 0 \mid -6)$

Quelle: Projekt MmF.

OPERATIONEN MIT VEKTOREN UND VEKTORKOORDINATEN

Proposition 2. *Gegeben sind zwei Vektoren* $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$ *im kartesischen Koordinatensystem. Dann können die Vektorkoordinaten der Summe* $\vec{a} + \vec{b}$ *durch* $\begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \end{pmatrix}$ *berechnet werden. Die Vektorkoordinaten des Vektors* $\lambda\vec{a}$ *mit* $\lambda \in \mathbb{R}$ *kann man durch* $\begin{pmatrix} \lambda x_a \\ \lambda y_a \end{pmatrix}$ *berechnen.*

Aufgabe 5. Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Skizziere die Vektoren

a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $3\vec{b} - \vec{a}$ c) $2\vec{a} + 3\vec{b}$ d) $4\vec{a} - 5\vec{b}$

2. Vergleiche die Koordinaten der skizzierten Vektoren mit den Koordinaten, die man rechnerisch mithilfe der Rechenregeln aus Proposition 2 erhält.

Quelle: Projekt MmF.

Aufgabe 6. (Parameterdarstellung einer Geraden)

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{r}$.

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Berechne für $t = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$ die Koordinaten des Vektors $\vec{v} + t\vec{r}$ und skizziere die berechneten Vektoren.
2. Erkläre die Rolle der Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{r}$ für die Parameterdarstellung der Geraden.

Quelle: Projekt MmF.

KOLLINEARE VEKTOREN

Definition 2. (Kollineare Vektoren)

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ heißen kollinear, wenn sie auf parallelen Geraden liegen.

Proposition 3. *Gegeben sind zwei Vektoren* $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$ *im kartesischen Koordinatensystem. Die Vektoren* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *sind genau dann kollinear, wenn eine Zahl* $\lambda \in \mathbb{R}$ *existiert, sodass* $x_a = \lambda x_b$ *und* $y_a = \lambda y_b$ *gilt.*

Aufgabe 7. (Parallele Strecken)

1. Gegeben sind die Punkte A, B, C, D. Ermittle, ob die Strecken AB und CD parallel liegen.

   a) $A(2 \mid 3),\ B(-1 \mid -2),\ C(-3 \mid 4),\ D(-9 \mid -6)$

   b) $A(-4 \mid 3),\ B(0 \mid 7),\ C(-3 \mid -3),\ D(1 \mid 2)$

   c) $A(-1 \mid 2 \mid 3),\ B(-3 \mid 0 \mid 5),\ C(6 \mid -3 \mid 5),\ D(2 \mid -7 \mid 10)$

   d) $A(-7 \mid 3 \mid 2),\ B(0 \mid 7 \mid -1),\ C(-3 \mid -3 \mid 0),\ D(3 \mid 2 \mid 2)$

2. Ermittle, ob das Viereck $ABCD$ ein Trapez ist.

   a) $A(-1 \mid 4),\ B(5 \mid 1),\ C(6 \mid 0),\ D(0 \mid 3)$

   b) $A(6 \mid 4 \mid -1),\ B(2 \mid 2 \mid -3),\ C(5 \mid 0 \mid -1),\ D(-3 \mid -4 \mid -5)$

Quelle: Projekt MmF.

Aufgabe 8. (Drei Punkte auf derselben Geraden)

Gegeben sind drei Punkte A, B, C. Untersuche, ob alle drei Punkte auf derselben Geraden liegen.

a) $A(2 \mid -4)$, $B(5 \mid -1)$, $C(-4 \mid -10)$
b) $A(6 \mid 5)$, $B(-2 \mid 1)$, $C(2 \mid 4)$
c) $A(4 \mid -2 \mid 0)$, $B(4 \mid -3 \mid 1)$, $C(4 \mid 1 \mid -3)$
d) $A(5 \mid -2 \mid 0)$, $B(-1 \mid 0 \mid 4)$, $C(2 \mid 1 \mid -3)$

Quelle: Projekt MmF.

ABSTAND ZWISCHEN PUNKTEN

Proposition 4. *Gegeben sind zwei Punkte $A(x_A, y_A)$ und $B(x_B, y_B)$. Der Abstand zwischen A und B kann mithilfe der folgenden Formel berechnet werden.*

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Aufgabe 9. Ermittle, ob das Dreieck ABC gleichschenkelig ist.

a) $A(3 \mid -1)$, $B(3 \mid -5)$, $C(0 \mid -3)$
b) $A(5 \mid -3)$, $B(6 \mid -1)$, $C(2 \mid -2)$
c) $A(3 \mid -1 \mid 4)$, $B(3 \mid -5 \mid 2)$, $C(1 \mid -3 \mid -2)$
d) $A(5 \mid -3 \mid 0)$, $B(6 \mid -1 \mid -1)$, $C(4 \mid -2 \mid 2)$

Quelle: Projekt MmF.

Aufgabe 10. Gegeben sind zwei Punkte A und B. Ermittle die Koordinaten aller Punkte C, die den Abstand d von beiden Punkten A und B haben.

a) $A(-5 \mid 1)$, $B(3 \mid 5)$, $d = 5$
b) $A(-1 \mid 0)$, $B(1 \mid 4)$, $d = \sqrt{3}$

Wie viele Lösungen kann das Problem abhängig vom Wert d haben?

Quelle: Projekt MmF.

Aufgabe 11. (Umkreismittelpunkt)

Gegeben sind die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks ABC. Ermittle die Koordinaten des Umkreismittelpunktes.

Hinweis: Der Umkreismittelpunkt ist der Punkt, der sich im gleichen Abstand von allen Eckpunkten eines Dreiecks befindet.

a) $A(0 \mid 0)$, $B(3 \mid 7)$, $C(10 \mid 0)$
b) $A(-1 \mid -3)$, $B(6 \mid 4)$, $C(11 \mid -1)$
c) $A(0 \mid 5)$, $B(2 \mid 3)$, $C(2 \mid -1)$

Quelle: Projekt MmF.

Definition 3. Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ im Raum heißen komplanar, wenn die Vektoren $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ (der Punkt O ist der Koordinatenursprung) auf derselben Ebene liegen.

Aufgabe 12. ($\star$)

1. Ermittle, ob die Vektoren $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC}$ auf derselben Ebene liegen.
   a) $A(1 \mid -2 \mid 4)$, $B(0 \mid 0 \mid 1)$, $C(2 \mid -4 \mid 9)$
   b) $A(-3 \mid 1 \mid -4)$, $B(2 \mid 4 \mid -1)$, $C(13 \mid 5 \mid -10)$
2. Untersuche, ob die Punkte A, B, C, D auf derselben Ebene liegen.
   a) $A(3 \mid -1 \mid 0), B(4 \mid -3 \mid 2), C(0 \mid 3 \mid -1), D(5 \mid -3 \mid 2)$
   b) $A(6 \mid 2 \mid -2), B(-5 \mid -3 \mid 1), C(4 \mid 0 \mid -3), D(8 \mid 0 \mid 8)$
   c) $A(-2 \mid 0 \mid 1), B(7 \mid 2 \mid -6), C(2 \mid -2 \mid -3), D(-3 \mid 7 \mid 4)$

Quelle: Projekt MmF.