Wahrscheinlichkeitsräume

Dmytro Rzhemovskyi, Mariia Mykhalova
Projekt MmF

January 23, 2024

Definition 1. (Wahrscheinlichkeitsraum)

Eine **Ergebnismenge** (Ω) ist eine Menge aller möglichen Ergebnisse (ω) eines Zufallsexperiments.

Ein **Ereignis** ist eine Teilmenge der Ergebnismenge ($A \subset \Omega$).

Wahrscheinlichkeit ist eine Funktion von Ereignisse und mit Werten im Interval $[0, 1]$, für die die folgende Eigenschaften gelten.

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ und $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
2. Wenn $A \cap B = \varnothing$, dann $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Aufgabe 1. (Laplace-Wahrscheinlichkeit)

Gegeben ist eine endliche Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Wenn alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, dann kann die Wahrscheinlichkeit eines Ereignises wie folgt berechnet werden.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{n}$$

wobei $N(A)$ die Anzahl der Elementen in der Menge A ist. Dieses Modell heißt **Laplace-Wahrscheilichkeit**.

1. (**Würfel**) Gegeben ist ein symmetrischer Würfel. Man wirft den Würfel einmal und erhält eine Zahl von 1 bis 6.

   a) Bestimme die Ergebnismenge Ω für dieses Zufallsexperiment.

   b) Beschreibe die folgende Ereignisse als Teilmengen von Ω

      i. A - Man erhält eine gerade Zahl.

      ii. B - Man erhält eine Zahl, die nicht kleiner als 3.

      iii. C - Man erhält einen Teiler von 6.

   c) Führe die Mengenoperationen durch und beschreibe sprachlich dazugehörige Ereignisse

i. $A \cap B$	ii. $A \cap C$	iii. $B \cup C$	iv. $A \cup B$
v. C^c	vi. B^c	vii. $A^c \cap B$	viii. $A^c \cup C$

   d) Stelle mithilfe von Mengenoperationen an den Mengen A, B, C die folgenden Ereignisse dar.

      i. Man erhält eine ungerade Zahl.

ii. Man erhält eine gerade Zahl oder einen Teiler von 6.

iii. Man erhält einen Teiler von 6, der kleiner als 3 ist.

iv. Man erhält einen Teiler von 6, der größer als 3 ist.

e) Berechne die folgende Wahrscheinlichkeiten

i. $\mathbb{P}(A)$	ii. $\mathbb{P}(C)$	iii. $\mathbb{P}(B^c)$	iv. $\mathbb{P}(A \cap C)$
v. $\mathbb{P}(A \cup B)$	vi. $\mathbb{P}(B^c \cap C)$	vii. $\mathbb{P}(C^c \cup A)$	viii. $\mathbb{P}(A^c \cup C)$

2. (**Münze**) Gegeben ist eine symmetrische Münze. Man wirft die Münze dreimal und erhält eine Folge von Rückseiten (R) und Vorderseiten (A) der Münze.

a) Bestimme die Ergebnismenge Ω für dieses Zufallsexperiment.

b) Beschreibe die folgende Ereignisse als Teilmengen von Ω

i. A_i, $i = 1, 2, 3$ – Beim i-n Wurf erhält man R.

ii. B – Man erhält genau ein R.

iii. C – Man erhält mindestens zweimal A.

c) Führe die Mengenoperationen durch und beschreibe sprachlich dazugehörige Ereignisse

i. $A \cap B$	ii. $A \cap C$	iii. $B \cup C$	iv. $A \cup C$
v. A^c	vi. B^c	vii. $A^c \cap B$	viii. $A^c \cup C$

d) Stelle mithilfe von Mengenoperationen an den Mengen $A_i, i = 1, 2, 3$ sowie B und C die folgenden Ereignisse dar.

i. Man erhält die Folge RRR.

ii. Man erhält die Folge ARR.

iii. Man erhält die Folge AAA

iv. Man erhält keine oder einmal A.

e) Berechne die folgende Wahrscheinlichkeiten

i. $\mathbb{P}(A)$	ii. $\mathbb{P}(C)$	iii. $\mathbb{P}(B^c)$	iv. $\mathbb{P}(A \cap C)$
v. $\mathbb{P}(A \cup B)$	vi. $\mathbb{P}(B^c \cap C)$	vii. $\mathbb{P}(C^c \cup A)$	viii. $\mathbb{P}(A^c \cup C)$

Aufgabe 2. (Unsymmetrische Ergebnisse)

Die Ergebnisse in einer endlichen Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ sind nicht unbedingt gleich wahrscheinlich. Es muss aber gelten

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 1$$

1. (**Würfel**) Gegeben ist ein unsymmetrischer Würfel.

a) Ermittle die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, d.h. $\mathbb{P}(\{1\}), \ldots, \mathbb{P}(\{6\})$, wenn

i. die Zahl 6 ungefähr zweimal häufiger vorkommt als alle andere Zahlen. Die Zahlen 1, ..., 5 kommen ungefähr gleich häufig vor.

ii. die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl zu erhalten, proportional zur Zahl ist.

b) Berechne für die beiden oben beschriebenen Fälle die folgenden Wahrscheinlichkeiten

i. $\mathbb{P}$(Man erhält eine gerade Zahl).

ii. $\mathbb{P}$(Die Zahl ist kleiner als 4).

iii. $\mathbb{P}$(Man erhält einen Teiler von 6).

Aufgabe 3. (Geometrische Wahrscheinlichkeit auf einem Interval)

Gegeben ist die Ergebnismenge $\Omega = [\,-3, 3\,]$.

1. Stelle die folgende Ereignisse als Intervalle oder die Vereinigungsmenge mehrerer Intervallen dar.
   a) A – Zahl ist positiv
   b) B – Zahl ist nicht größer als -1
   c) C – Zahl ist kleiner als 2
   d) D – Zahl ist ganz
   e) F_n – Zahl ist größer als $\frac{1}{n}$ mit $n = 1, 2, 3, ...$
2. Führe die Mengenoperationen durch und stelle die Ereignisse als Intervalle oder die Vereinigungsmenge mehrerer Intervallen dar.

a) A^c	b) D^c	c) $A \cap C$	d) $A \setminus D$
e) $A \cap B$	f) $F_1 \cup F_2$	g) $\cup_{n\geq 1} F_n$	g) $\cap_{n\geq 1} F_n$

3. Stelle mithilfe von Mengenoperationen an den Mengen A, B, C und D die folgenden Ereignisse dar.
   a) Die Zahl ist kleiner gleich Null.
   b) Die Zahl ist positiv und kliener als 2.
   c) Die Zahl ist zwischen -1 und 2.
   d) Die Zahl ist 2 oder 3.
4. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A kann als das Verhältnis der Längen berechnet werden, d.h.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)}$$

wobei $L(A)$ ist die Länge des Intervals A (oder die Summe der Längen).

Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten der oben genannten Ereignisse.

Aufgabe 4. (Operationen mit Wahrscheinlichkeiten)

1. Gegeben sind zwei Ereignisse A und B mit $A \cap B = \varnothing$ und $\mathbb{P}(A) = 0.3$, $\mathbb{P}(B) = 0.5$.

   Stelle die Ereignisse A und B sowie die folgenden Ereignisse als Venn-Diagramme graphisch dar und berechne dazugehörige Wahrscheinlichkeiten.

   a) $A \cup B$ b) A^c c) $(A \cup B)^c$

2. Gegeben sind zwei Ereignisse A und B mit $\mathbb{P}(A) = 0.8$, $\mathbb{P}(B) = 0.5$ und $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.4$

   Stelle die Ereignisse A und B sowie die folgende Ereignisse als Venn-Diagramme graphisch dar und berechne dazugehörige Wahrscheinlichkeiten.

   a) $A \setminus B$ b) $B \setminus A$ c) $A \cup B$ d) $(A \cup B)^c$ e) $A^c \cup B$

3. Gegeben sind drei Ereignisse A, B und C mit (alle Bedingungen sind erfüllt)

   a) $A \cap C = \varnothing$

   b) $\mathbb{P}(A) = 0.4$, $\mathbb{P}(B) = 0.3$, $\mathbb{P}(C) = 0.2$

   c) $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.2$, $\mathbb{P}(B \cap C) = 0.1$

   Stelle die Ereignisse A, B und C sowie die folgenden Ereignisse als Venn-Diagramme graphisch dar und berechne dazugehörige Wahrscheinlichkeiten.

   a) $A \setminus B$ b) $B \setminus (A \cap C)$ c) $A \cup B \cup C$ d) $A \cup (B \cap C)$ e) $(A \cup B) \setminus C$

Aufgabe 5. Gegeben sind zwei Ereignisse A und B mit $\mathbb{P}(A) = 0.6$ und $\mathbb{P}(B) = 0.8$. Bestimme

a) den maximalen möglichen Wert für $\mathbb{P}(A \cap B)$

b) den minimalen möglichen Wert für $\mathbb{P}(A \cup B)$

Zeichne für jede Aufgabe die dazugehörige Venn-Diagrammen.