Zahlzerlegungen im Zahlenraum 10

Andrea Karner

Zusammenfassung

Der Lehrplan für die Primarstufe empfiehlt das Fördern der Entwicklung eines nachhaltigen Zahlverständnisses durch vielfältige Zerlegungen und Darstellungen von Zahlen. Kinder der ersten Klasse sollen Zahlen bis mindestens 20 mit strukturiertem Material darstellen, lesen, schreiben und zerlegen (BMBWF, 2023). Dabei erkennen sie, wie Zahlen aus anderen Zahlen zusammengesetzt sind. Die Fähigkeit, solche Zahlzusammensetzungen zu erkennen und zu nutzen, bildet die Basis für ein umfassendes Zahlverständnis sowie für flexible Rechenstrategien bei Addition und Subtraktion. Im vorliegenden Beitrag werden Wege aufgezeigt, die es Kindern ermöglichen, einerseits Beziehungen zwischen Zahlen zu erkennen sowie andererseits Zahlen als mentale Denkobjekte zu speichern, zu denen alle möglichen Zerlegungen gehören.

1 Voraussetzungen für Zahlzerlegungen

Um Zahlen zerlegen zu können, müssen Mengen auf unterschiedliche Weise gedeutet werden: Zum einen kann die Menge in ihrer Gesamtheit als *Ganzes* und zum anderen als *Zusammensetzung aus Teilmengen* wahrgenommen werden. Diese Dualität im Zahlverständnis wird auch als *Teil-Ganzes-Konzept* (Resnick, 1983, S. 124) bezeichnet. Die Erkenntnis, dass ein Ganzes, das in Teile zerlegt wurde, nicht mehr oder weniger wird, sondern eben ganz bleibt, spielt in der Zahlverständnisentwicklung eine wichtige Rolle und wird in der Literatur *proto-quantitatives Teil-Ganzes-Schema* (Resnick, 1992, S. 408) genannt.

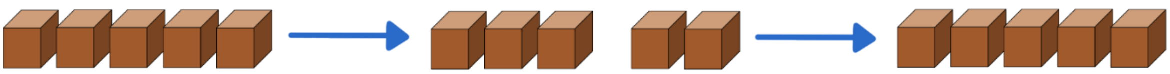

Abbildung 1: Teil-Ganzes-Schema – Darstellung mit Dienes-Würfel

Wird die Zahl 5 mit Würfeln dargestellt, kann diese Würfelmenge in zwei Teilmengen mit drei beziehungsweise zwei Elementen zerlegt werden; umgekehrt kann die Ausgangsmenge aus den beiden Teilmengen wieder zusammengesetzt werden.

Zahlzerlegungen werden zunächst durch Teil-Ganzes-Beziehungen auf der Mengenebene erschlossen. Die Arbeit mit Material gibt den Kindern die Möglichkeit, eine Menge einerseits in ihrer Gesamtheit und andererseits als Zusammenlegung von Teilmengen handelnd zu begreifen. Die Frage „Wie viele?“ läuft auf die Anzahlbestimmung hinaus, also das Feststellen der Mächtigkeit oder Kardinalität der Menge.

Für die weitere Zahlbegriffsentwicklung ist entscheidend, dass Zahlen nicht nur als Mengen (*mathematics of quantities*), sondern auch als Zahlen mit zugehörigen Eigenschaften (*mathematics of numbers*) verstanden werden (Resnick, 1992, S. 404).

Aus diesem Grund ist es notwendig, die Zahlen von der Mengenvorstellung in Denkobjekte überzuführen, in denen die Beziehungen zwischen den Zahlen mental gespeichert werden. Zu diesen Denkobjekten gehören auch die Zahlzerlegungen. Bei denen sieht ein Kind z. B. die Zahl 5 und kann gleichzeitig Zerlegungen wie 4 + 1, 3 + 2 oder auch 1 + 2 + 2 gedanklich abrufen.

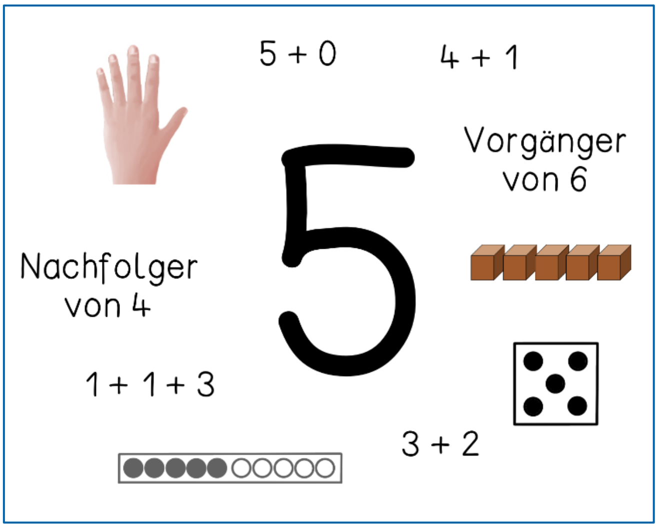

Abbildung 2: die Zahl Fünf als Denkobjekt

Zahlzerlegungen bilden die Grundlage für das Verständnis von Addition und Subtraktion und für die Entwicklung von Rechenstrategien (Moser Opitz, 2013, S. 95). Ohne dieses Verständnis haben die Kinder Nachteile beim mündlichen und schriftlichen Rechnen (Cowan, 2003, S. 43).

2 Die Bedeutung von Zahlentripel

Zahlentripel entstehen, wenn eine Zahl in zwei Teile zerlegt wird. Zum Beispiel kann die Zahl 5 in die Teile 3 und 2 zerlegt werden. Dies wird als Zahlentripel 5–3–2 dargestellt. Diese Zerlegungen sind deshalb von Bedeutung, weil sie in weiterer Folge bei Additionsaufgaben (z.B. 3 + 2 = 5) und Subtraktionsaufgaben (z.B. 5 - 3 = 2) angewendet werden können. Sie kommen auch zum Einsatz, wenn Rechnungen mit Zehnerüberschreitung gelöst werden.

Eine Studie von Gerve und Gasteiger (2021, S. 341) zeigt, dass ein signifikanter Zusammenhang zwischen dem richtigen Lösen von Additionsaufgaben mit Zehnerübergang im Zahlenraum 20 einerseits und andererseits der Bearbeitungsgeschwindigkeit sowie dem richtigen Lösen von Zahlzerlegungen im Zahlenraum 10 besteht. Dies bestätigen auch die Studienergebnisse von Fischer und Heinze (2024, S. 11f.), die die Bedeutung der Teil-Ganzes-Beziehung und Zahlzerlegung sowie das Verständnis der operativen Beziehungen zwischen Addition und Subtraktion für den Erwerb der Kopfrechenfertigkeiten zur Addition und Subtraktion mit Zehnerübergang am Ende des ersten Schuljahres belegen.

Reindl (2016, S. 5) zeigte mit ihrer Untersuchung auf, dass Kinder mit hohem Faktenwissen im Sinne der oben beschriebenen mit Zahlen assoziierten Denkobjekten auch über eine größere Auswahl an nutzbaren Rechenstrategien verfügen.

3 Vom Verstehen zur Automatisierung

Die aktuelle Fachliteratur empfiehlt, dass Zahlzerlegungen bis 10 und später bis 20 automatisiert werden, damit sie als Faktenwissen abrufbar sind und nicht jedes Mal neu erdacht werden müssen (u.a. Hasemann & Gasteiger, 2020; Padberg & Benz, 2020; Schulz & Wartha, 2021). Einerseits wird durch die Automatisierung von Zahlzerlegungen das volle Potenzial von Rechenstrategien freigesetzt. Andererseits werden damit eine Überlastung des Arbeitsgedächtnisses der Kinder, Rechenfehler oder auch zählendes Rechnen vermieden (Wartha et al., 2023, S. 156).

Für einen erfolgreichen Lernprozess ist nicht nur die Automatisierung der Zahlzerlegungen erforderlich, sondern auch ein verständnisorientierter Erarbeitungsprozess, der die Beziehungen zwischen den Zahlen berücksichtigt. Im Idealfall lernen die Kinder, von einer Zahlzerlegung auf eine andere zu schließen und über den Zusammenhang von Rechnungen nachzudenken (Gaidoschik, 2010, S. 126). Automatisieren beinhaltet also das Verstehen spezifischer Beziehungen zwischen Zahlen und unterscheidet sich von auswendig gelernten Zahlenfakten ohne Bezug zu verschiedenen Darstellungsebenen.

4 Methodische Zugänge

Zahlzerlegungen können methodisch auf vielfältige Weise erarbeitet werden. Gaidoschik (2010, S. 212) weist darauf hin, dass bereits „früh auf ein gegliedertes (strukturiertes, Teilanzahlen erkennendes) Erfassen und Denken von ‚Zahlen als Zusammensetzungen aus Zahlen'" hingearbeitet werden soll. Er empfiehlt für den Anfangsunterricht vor allem strukturierte Materialien, insbesondere solche, die die *Kraft der Fünf* hervorheben (ebd.).

Die Schulbücher der Primarstufe bieten ein breites Repertoire an Zugängen zu Zahlzerlegungen. Dabei werden zum Beispiel Fingerbilder, Würfelbilder, Wendeplättchen, Zahlenstreifen, Punktestreifen oder Zahlenhäuser eingesetzt.

Fingerbilder

Die Fingerbilder nehmen eine wesentliche Rolle bei der Erarbeitung der Zahlzerlegungen ein. Der Einsatz beider Hände stellt eine natürliche Teilung des Zahlenraums 10 dar. Die Kraft der Fünf tritt von Beginn an hervor. Die Kinder erkennen, dass sich die 7 zum Beispiel aus den 5 Fingern der einen Hand und 2 Fingern der anderen Hand zusammensetzt.

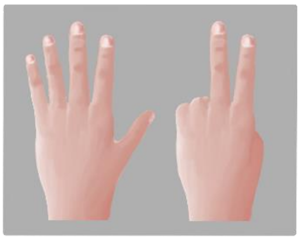

Abbildung 3: Fingerbild – Zahl 7

Punktestreifen und -felder

Auch Punktestreifen und -felder sind ein vielseitiges Instrument, um Mengen im Zahlenraum 10 strukturiert darzustellen. Die bildlichen Darstellungen gibt es in den unterschiedlichsten Formen, wobei die angegebenen Punkte und Farben je nach Buch und Material unterscheiden.

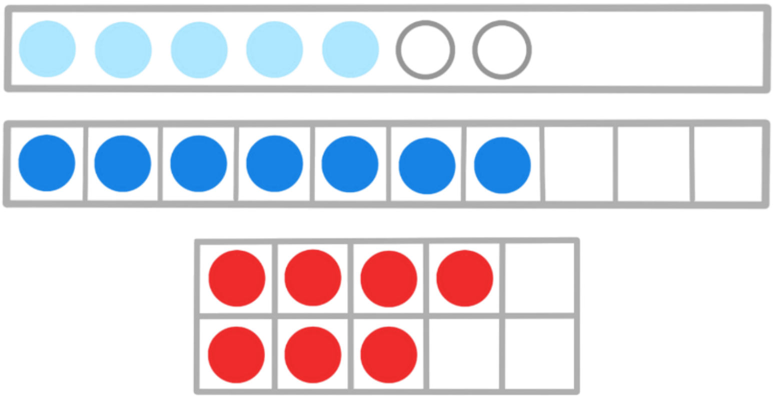

Abbildung 4: Punktestreifen und -felder in unterschiedlichen Formaten

Die Zerlegungen der Zahlen können durch Teilstriche visualisiert werden (Abbildung 5).

Abbildung 5: Zahlzerlegungen mit dem Punktestreifen und Teilstrich

Die grafische Darstellung von Zahlenstreifen bzw. Punktestreifen und -feldern lässt sich gut mit den Wendeplättchen kombinieren, da die Wendeplättchen direkt auf die Vorlage gelegt werden können.

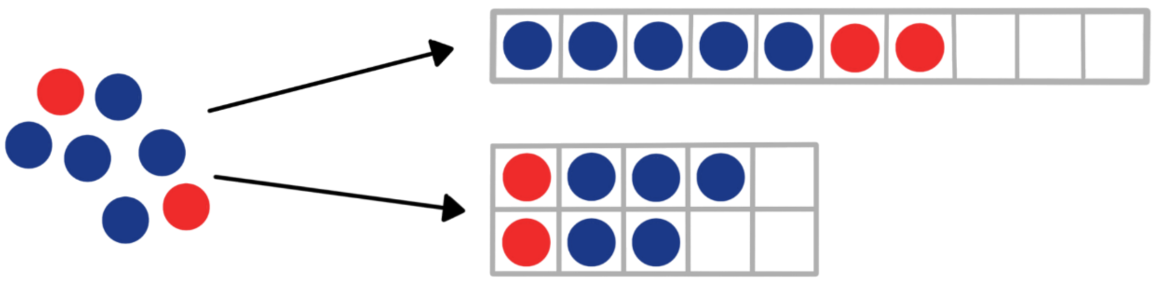

Abbildung 6: Wendeplättchen auf den Zahlenstreifen bzw. dem Punktefeld

Würfelbilder

Für die Zahlzerlegungen im Zahlenraum 6 können Würfelbilder verwendet werden. Hier kommt der Aspekt der simultanen bzw. quasisimultanen Mengenerfassung zur Geltung, da die Punkte in ihrer individuellen Zusammensetzung auf einen Blick erfasst werden können. Darüber hinaus kann auch das Zusammensetzen von zwei 5er-Würfelbildern zu einem 10er-Feld angeboten werden.

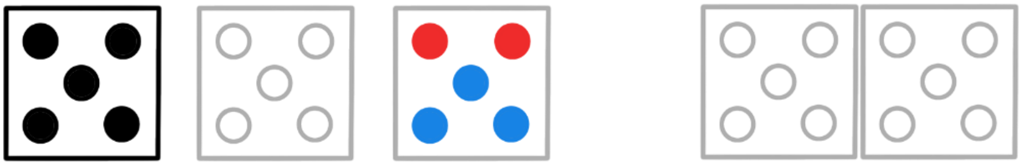

Abbildung 7: Würfelbilder

Hütchenschreibweise/Zahlenhäuser

Im Idealfall werden die Zahlzerlegungen handelnd erarbeitet und anschließend in die *Hütchenschreibweise* (Gaidoschik, 2021, S. 72) oder Zahlenhausdarstellung übertragen.

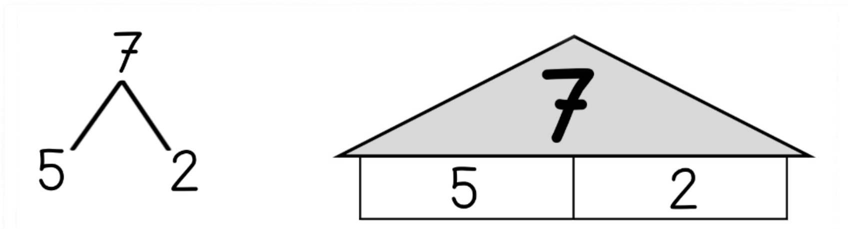

Abbildung 8: Zahlzerlegungen in Hütchenschreibweise und als Zahlenhaus

Bei der Auswahl und Anordnung der Aufgaben zur Zahlzerlegung empfiehlt es sich, die Reihenfolge der Aufgaben zunächst offen zu lassen. Hier bietet sich der Einsatz von Wendeplättchen und Schüttelboxen an: Durch den Wurf der Wendeplättchen ergeben sich unterschiedliche Zusammensetzungen und die Aufgaben können in individueller Reihenfolge bearbeitet werden. Gleiches gilt für Schüttelboxen. Hier stellt das Kind nach dem Schütteln fest, um welche Zerlegung es sich handelt.

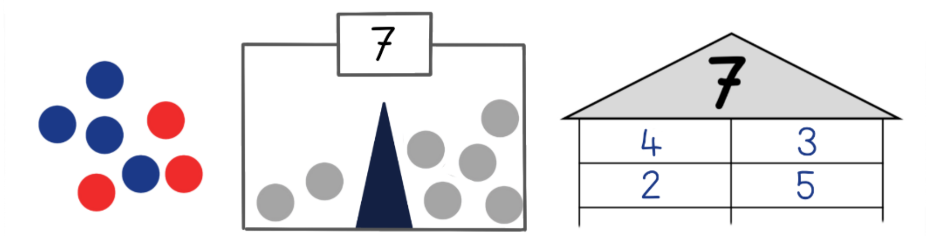

Abbildung 9: Unsystematische Anordnung der Aufgaben zur Zahlzerlegung

Nach einer Phase des unsystematischen Erkundens werden die Zahlzerlegungen auf Muster hin untersucht. Hier bietet sich der Einsatz von Zahlenhäusern an, wobei es immer zu prüfen gilt, wie diese ausgefüllt werden. So kann z. B. ein Siebener-Zahlenhaus sehr schnell mit den richtigen Zahlen bestückt werden, indem die linke Spalte und die rechte Spalte von 0 bis 7 einmal von oben und einmal von unten gefüllt werden.

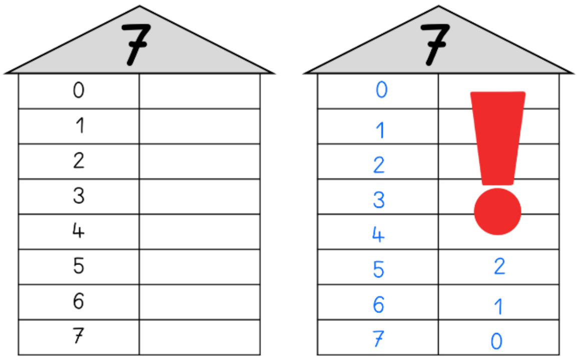

Abbildung 10: Systematische Anordnungen der Aufgaben zur Zahlzerlegung

Bei dieser Vorgehensweise werden die entsprechenden Zahlzerlegungen nur indirekt oder gar nicht in Beziehung gesetzt. Daher sollten die Zahlenhäuser immer in doppelter Form angeboten werden: Mit ungeordneten Aufgaben ohne Zusammenhang und mit geordneten Aufgaben, die zur Mustererkennung führen.

Zahlenstreifen/Rechenstäbchen

Die bunten Zahlenstreifen sind ein vielseitig einsetzbares Legematerial. Für jede Zahl gibt es einen eigenen Streifen mit Unterteilungen und festgelegten Farben. Hier wird Bezug genommen auf die *bunten Perlen* nach Maria Montessori, die auch als dreidimensionales Material in Form von Perlen- oder Rechenstäben erhältlich sind. Letztere lehnen sich an die Form des Dienes-Materials an. Wie die bunten Zahlenstreifen für die Zahlzerlegungen eingesetzt werden können, wird im folgenden Abschnitt erläutert.

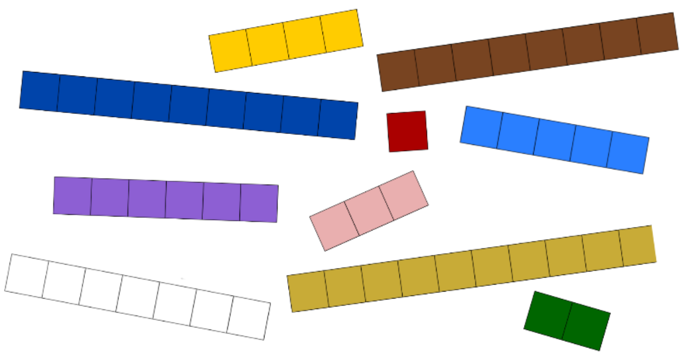

Abbildung 11: Bunte Zahlenstreifen

5 Impulse für die Praxis

Der Einsatz von bunten Zahlenstreifen basiert auf den didaktischen Grundsätzen der Veranschaulichung und wird dem handelnden Erarbeiten des Zahl- und Operationsverständnisses sowie dem Erkennen von Zusammenhängen gerecht (BMBWF, 2023).

Arbeiten die Schüler:innen zum ersten Mal mit den bunten Zahlenstreifen, wird empfohlen, Legekärtchen mit Mengendarstellungen einzusetzen. Dabei sollen die Kinder mit der Darstellungsform und der Wertigkeit des jeweiligen Streifens vertraut werden.

Abbildung 12: Zuordnung Zahl und Zahlenstreifen

Dazu können die Zahlenstreifen aufsteigend angeordnet werden, die Ziffernkarten den Zahlenstreifen zugeordnet oder im Sinne des Spieles Memory Paare gefunden werden.

Aufgabenkarten Zahlzerlegungen in 2 Teilmengen

Die Aufgabenkarten zu den Zahlzerlegungen in zwei Teilmengen leitet dazu an, dass die Schüler:innen die Zahlen 1 bis 10 jeweils mit zwei Zahlenstreifen darstellen. Auf der Rückseite der Karten befindet sich die Lösung, um das gelegte Ergebnis zu kontrollieren.

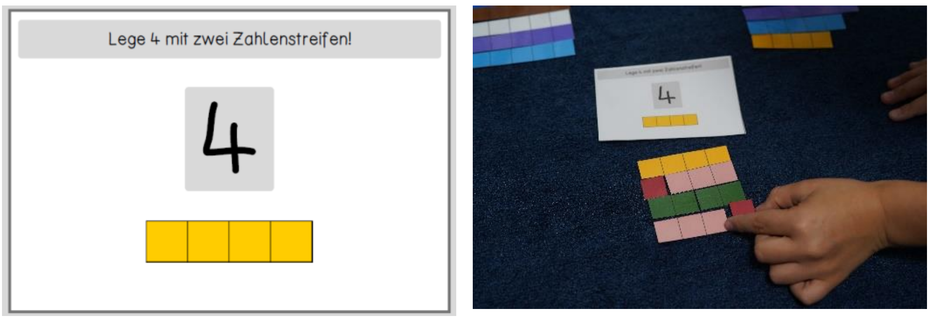

Abbildung 13: Aufgabenkarten Zahlzerlegung

Zudem gibt es Aufgabenkarten, bei denen die Zahlen in mehrere Teilmengen zerlegt werden. Die Kinder sollen mit mehreren Zahlenstreifen die entsprechende Zahl legen und verschiedene Lösungen finden.

Heft Zahlzerlegungen in 2 bzw. mehreren Teilmengen

Das Heft *Zahlzerlegungen in 2 Teilmengen* ermöglicht eine strukturierte Vorgehensweise. Dabei legen die Kinder die Zerlegungen mit den bunten Zahlenstreifen, malen die Zerlegungen in das Heft und notieren die Ergebnisse im Zahlenhaus. Eine Version bietet unterteilte Abbildungen von Zahlenstreifen an. Hier ist auch die erste Teilmenge im Haus eingetragen. Es gibt auch zusätzliche Vordrucke, bei denen die Reihenfolge selbst entschieden werden kann, welche Zerlegungen gemacht werden. In diesem Fall können auch Schüttelboxen eingesetzt werden.

Abbildung 14: Heft Zahlzerlegung in 2 Teilmengen

Es gibt noch ein zusätzliches Heft zu den Zahlenzerlegungen, bei denen die Schüler:innen die entsprechende Zahl in mehrere Teilmengen zerlegen sollen.

Weitere Anregungen zum Einsatz des Materials befinden sich in der zugehörigen Handreichung.

Literatur

BMBWF (2023). *Lehrpläne der Volksschule und der Sonderschulen*. https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10009275&FassungVom=2023-08-31

Cowan, R. (2003). Does it all add up? Changes in children's knowledge of addition combinations, strategies, and principles. In *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (S. 35–74). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Fischer, F., & Heinze, A. (2024). Den Zehnerübergang vorbereiten. Notwendiges Vorwissen sichern. *Mathematik differenziert*, *2*.

Gaidoschik, M. (2010). *Wie Kinder rechnen lernen - oder auch nicht: Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr*. Peter Lang.

Gaidoschik, M. (2021). *Rechenschwäche verstehen - Kinder gezielt fördern: Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis* (12. Auflage). Persen.

Gerve, M., & Gasteiger, H. (2021). Einflussfaktoren für die Verwendung von Strategien beim Lösen von Additionsaufgaben im Zahlenraum bis 20. In K. Hein, C. Heil, S. Ruwisch, & S. Prediger (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2021. Vom GDM-Monat 2021 der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (1.-25. März 2021)* (S. 4 S.). WTM.

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2020). *Anfangsunterricht Mathematik* (4.). Springer.

Moser Opitz, E. (2013). *Rechenschwäche/Dyskalkulie: Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern* (2. Auflage). Haupt Verlag.

Padberg, F., & Benz, C. (2020). *Didaktik der Arithmetik: Fundiert, vielseitig, praxisnah* (5., überarb. Auflage). Springer Spektrum.

Reindl, S. (2016). *Lösungsstrategien Addition und Subtraktion. Eine Studie zur Nutzung und Wirkung im Grundschulalter.* Waxmann Verlag.

Resnick, L. B. (1983). A Developmental Theory of Number Understanding. In H. P. Ginsburg (Hrsg.), *The development of mathematical thinking* (S. 110–151). Academic Press New York.

Resnick, L. B. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. In G. Leinhardt, R. Putman, & R. Hattrup (Hrsg.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (S. 373–429). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Schulz, A., & Wartha, S. (2021). *Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/ Sekundarstufe: Grundvorstellungen aufbauen, festigen, vernetzen*. Springer Spektrum.

Wartha, S., Schulz, A., & Benz, C. (2023). Zusammenhänge zwischen Zahlzerlegungen, Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 10. *Lernen und Lernstörungen*, *12*(3), 155–167.