

Mathematische Vorläuferfähigkeiten

Fokus Klassifikation, Seriation und Serialität

Andrea Karner

Zusammenfassung

Mathematiklernen erfordert Vorläuferfähigkeiten, die bereits vor Schuleintritt angeregt und entwickelt werden sollen. Sie umfassen ein breites Spektrum, das vom einfachen Zählen bis zum Erfassen von und Arbeiten mit Formen, Größen und Mengen reicht. Der erfolgreiche Erwerb dieser Fähigkeiten wurde als Gelingensbedingung für die Entwicklung komplexerer mathematischer Kompetenzen vielfach bestätigt (u.a. Krajewski, 2008). Dieser Artikel fokussiert auf die Fähigkeiten zur Klassifikation, Seriation und Serialität, die grundlegend für die Entwicklung des Zahlbegriffs sind.

1 Mathematische Vorläuferfähigkeiten

Im Mittelpunkt der mathematischen Vorläuferfähigkeiten steht der Aufbau von Zahl- und Mengenvorstellungen sowie von Zahlbeziehungen. Grundlegende Erkenntnisse dazu wurden vom Schweizer Entwicklungspsychologen Jean Piaget (1970) erbracht. Nach seinen Ideen wird die Entwicklung mathematischer Vorläuferfähigkeiten durch die Auseinandersetzung mit der eigenen Lebenswelt angeregt. Kinder nehmen ihre Umgebung mit allen Sinnen wahr, erkunden Objekte und experimentieren mit ihnen. Dabei sammeln sie Erfahrungen mit unterschiedlichen Merkmalen wie groß-klein, hoch-niedrig oder dick-dünn und lernen Objekte, aber auch Gruppen von Objekten auf Basis solcher Merkmale zu vergleichen und voneinander zu unterscheiden.

Piaget (1970, S. 57ff.) geht in seinem später als *Logical-Foundations-Modell* bezeichneten Ansatz davon aus, dass die vollständige Entwicklung des Zahlbegriffs erst dann erfolgen kann, wenn zuvor sogenannte logische Fähigkeiten wie Klassifikation und Seriation erworben wurden. Clements (1984, S. 766) stellt diesem Stufenkonzept sein *Skills Integration Model* gegenüber. Demzufolge ist die Zahlbegriffsentwicklung ein Zusammenspiel aus Zählen, Simultanerfassung (*Subitizing*) und dem Vergleichen von Mengen. Er belegt in einer Interventionsstudie, dass sich die Fähigkeit zur Klassifikation oder zur Seriation auch aus dem Umgang mit Zahlen entwickeln kann. Benz et al. (2015, S. 125) kommen zum Schluss: „Die logischen Kompetenzen sind wichtige Kompetenzen, aber eben keine notwendigen *Voraussetzungen*, und können durch Zählaktivitäten gefördert werden.“

Allgemein gilt: „Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern“ (Devlin, 1998). In der Phase der Zahlbegriffsentwicklung ist es wichtig, die Fähigkeit zur Klassifikation und zur Seriation im Blick zu haben und Angebote zu schaffen, die diese logischen Fähigkeiten fördern.

1.1 Klassifikation

Klassifizieren bedeutet, Objekte aufgrund gemeinsamer Merkmale zu einer Gesamtheit zusammenzufassen. Um Gemeinsamkeiten zu erkennen, müssen die Objekte auf ihre Eigenschaften hin untersucht werden. Nach einer Phase des Vergleichens und Ordnen erfolgt die Zuordnung zu einer Klasse. Abbildungen von bunten Schienenfahrzeugen können beispielsweise nach Farben klassifiziert werden (Abbildung 1). Sind Lokomotiven, Personen- und Güterwagons abgebildet, kann die Klassenzuordnung auch über die Art der Schienenfahrzeuge erfolgen (Abbildung 2).

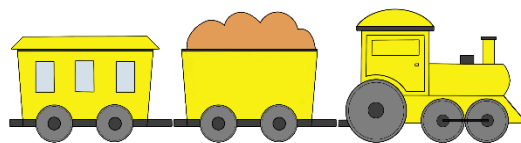


Abbildung 1: Klassifikation nach Farbe - Gelb



Abbildung 2: Klassifikation nach Art der Schienenfahrzeuge – Personenwagen

Nachdem einfache Klassifikationen anhand eines Merkmals vorgenommen werden können, wird die Fähigkeit zu sogenannten multiplen Klassifikationen erworben, bei denen mindestens zwei Merkmale zugleich berücksichtigt werden (Piaget & Inhelder, 1973a, 1973b). Ein Kind ist dann beispielsweise in der Lage, alle roten Güterwagons (Farbe und Art des Schienenfahrzeuges) auszumachen und diese als Gesamtheit zu denken (Abbildung 3).

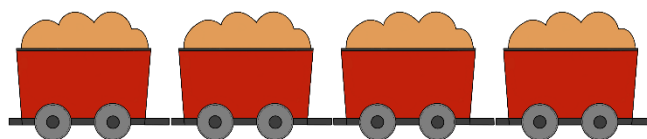


Abbildung 3: Klassifikation nach Farbe und Art der Schienenfahrzeuge – Rot & Güterwagen

Aus der Fähigkeit zur multiplen Klassifikation geht parallel das Verständnis für die Klasseninklusion hervor. Dabei werden Beziehungen zwischen ober- und untergeordneten Klassen hergestellt (Oeveste, 1987, S. 130). Personenwagons können zum Beispiel als Untergruppe von Schienenfahrzeugen identifiziert werden (Abbildung 4).

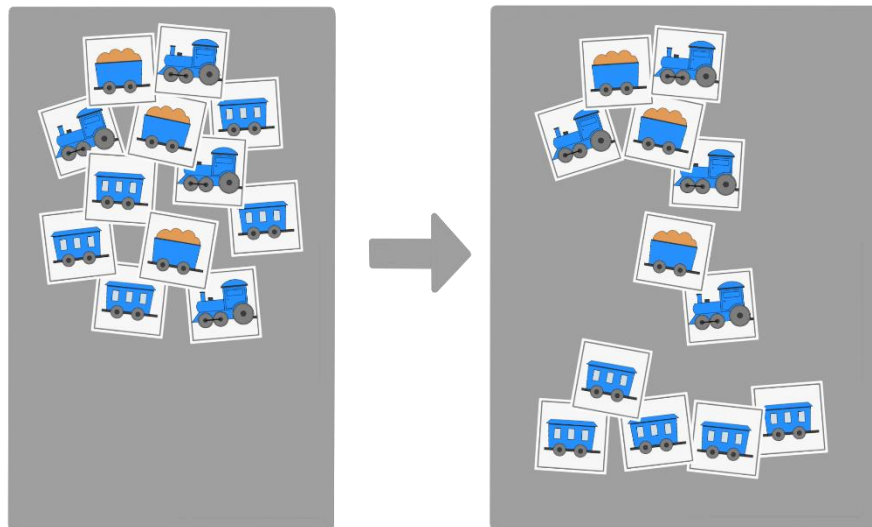


Abbildung 4: Personenwagens als Untergruppe von Schienenfahrzeugen

Die Klasseninklusion kann aber auch innerhalb einer Klasse erfolgen: Zwei Personenwagens gehören zu einer übergeordneten Menge von fünf Personenwagens (Abbildung 5). Dieser Aspekt ist für den Aufbau des Zahlbegriffs entscheidend (Fuson, 1988, S. 413f.).

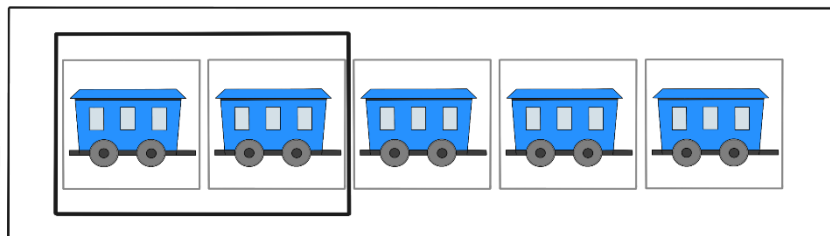


Abbildung 5: Klasse von zwei Personenwagens innerhalb der Klasse von 5 Personenwagens

1.2 Seriation und Serialität

Die Fähigkeit, Elemente nach bestimmten Kriterien zu ordnen, wird als *Seriation* bezeichnet (Piaget, 1970, S. 60). Der Begriff leitet sich vom lateinischen Wort *series* ab, das „Reihe“ bedeutet. Reihenfolgen können durch das Vergleichen und Unterscheiden von Eigenschaften von Objekten wie z.B. Größe, Länge oder Gewicht gebildet werden (Abbildung 6).

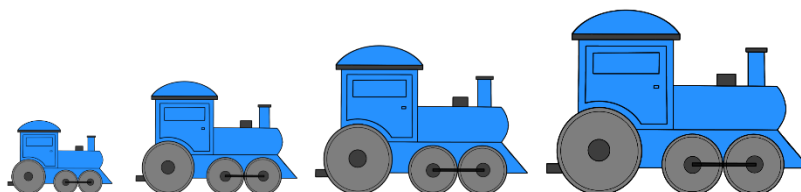


Abbildung 6: Seriation nach Größe – aufsteigend

Beim Zählen (in Form von *Rational Counting*) werden die Objekte durch die sprachliche Begleitung „eins, zwei, drei, ...“ in eine Reihenfolge (das Erste, das Zweite, ...) gebracht (Gerster & Schultz, 2004, S. 332).

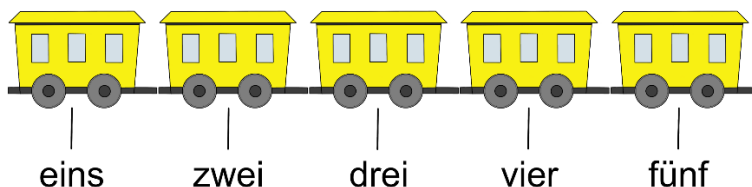


Abbildung 7: Seriation im Zählprozess

Dieser Aspekt des Zählvorgangs entspricht dem Konzept der Seriation, also des In-eine-Reihenfolge-Bringens, wobei es entscheidend ist, dass die Zuordnung des Zahlnamens in einer stabilen Ordnung erfolgt (Gerster & Schultz, 2004, S. 332). Im Zählprozess muss ein geordnetes Vorgehen eingehalten werden, sodass kein Objekt doppelt gezählt oder übersehen wird (Piaget, 1970, S. 60).

Neben der Seriation beschreibt die *Serialität* die Fähigkeit, „Muster zu erkennen und fortzusetzen“ (Lenart et al., 2013, S. 17). Diese Fähigkeit geht über das Bilden von Reihenfolgen hinaus und umfasst das Erkennen sowie das Verstehen von Mustern und Beziehungen zwischen verschiedenen Elementen.



Abbildung 8: Serialität – Gelb und Blau

Wenn ein Kind in einer Reihe von Personenwagons bemerkt, dass diese abwechselnd in den Farben Blau und Gelb erscheinen, erkennt es nicht nur die Reihenfolge, sondern versteht auch das Muster dahinter. Dieses Verständnis ermöglicht dem Kind vorherzusagen, dass auf einen blauen Wagon wieder ein gelber Wagon folgen wird. Es geht also nicht nur darum, eine Abfolge von Objekten zu erkennen, sondern auch darum, die zugrunde liegenden Regeln oder Muster zu verstehen, die diese Abfolge bestimmen.

Lüken (2012, S. 263) spricht in diesem Zusammenhang von einem Struktursinn, der für die Entwicklung mathematischer Kompetenzen von zentraler Bedeutung ist. Auf dessen Grundlage können Kinder Größenverhältnisse und Beziehungen zwischen Zahlen erfassen sowie Zahlenreihen logisch fortsetzen. Das Erkennen von Reihenfolgen bildet auch die Basis für komplexere Konzepte wie Transitivität. Wenn Kinder ableiten können, dass Fünf kleiner als Sechs und Sechs kleiner als Sieben ist, dann sind sie auch in der Lage zu folgern, dass Fünf kleiner als Sieben ist (Werner, 2007, S. 580). Die Fähigkeit zur Serialität bezieht sich somit auch auf das Verständnis von Vorgänger- und Nachfolgerbeziehungen sowie auf die Orientierung im Zahlenraum.

1.3 Anzahlbestimmung als Seriations- und Klassifikationsleistung

Sowohl Seriation als auch Klassifikation werden bei der Anzahlbestimmung genutzt und sind deshalb wichtige Voraussetzungen für die Entwicklung des Zahlbegriffs (Piaget, 1970, S. 57ff.). Um die Anzahl von Objekten mit einem bestimmten Merkmal zu ermitteln, müssen diese oft erst von anderen Objekten abgegrenzt und zu einer Klasse zusammengefasst werden (Abbildung 9).

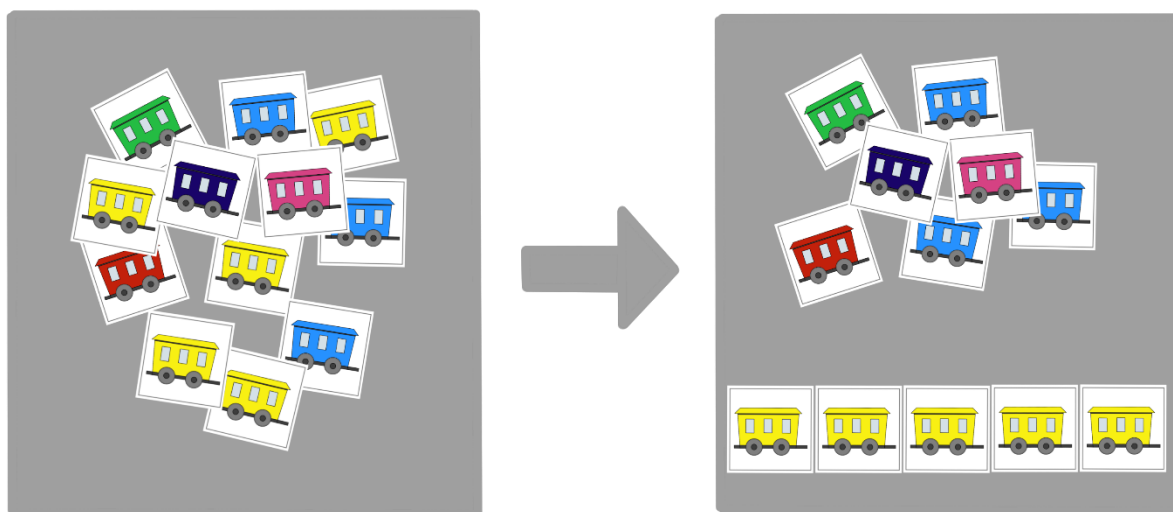


Abbildung 9: verschiedenfarbige Personenwagons; Klassifikation – gelbe Personenwagons

Damit ein Kind die Anzahl einer bestimmten Menge (z. B. die Menge der gelben Personenwagons) mit dem entsprechenden Zahlwort (Fünf) verbinden kann, sind drei Schritte erforderlich:

- Das Kind bildet zunächst die Klasse der gelben Wagons und legt damit die zu zählende Menge fest.
- Anschließend ordnet das Kind jedem Objekt der Menge schrittweise ein Zahlwort zu (Seriationsleistung) und nimmt dadurch eine Eins-zu-Eins-Zuordnung vor.
- Schließlich muss das Kind verstehen, dass das zuletzt genannte Zahlwort für die Gesamtheit aller bis dahin gezählten Objekte steht.

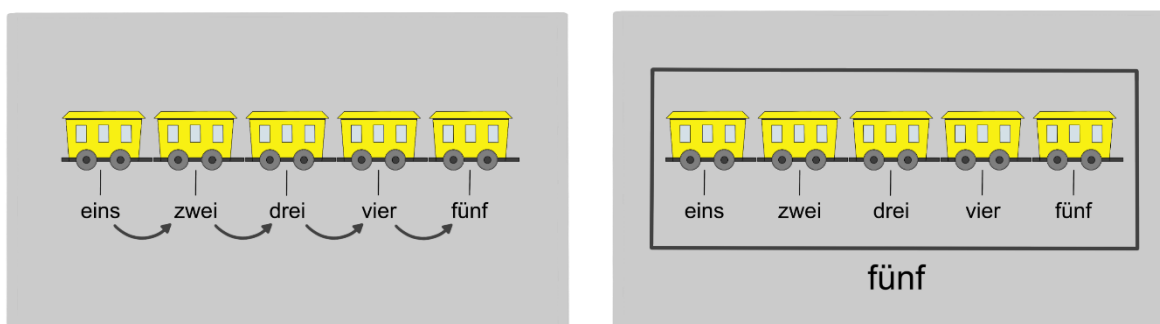


Abbildung 10: Anzahlbestimmung als Seriations- und Klassifikationsleistung

1.4 Zusammenfassung

Bei der Entwicklung des Zahlverständnisses spielen die Fähigkeiten der Klassifikation, Seriation und Serialität eine wesentliche Rolle. In der Arbeit mit den Kindern ist darauf zu achten, dass sich das Zahlenbewusstsein durch vielfältige Anregungen entwickelt. Dabei geht es nicht nur darum, die Kinder mit Zahlen und Ziffern vertraut zu machen, sondern auch darum, Impulse zum Auffinden und Gruppieren von Objekten mit gemeinsamen Merkmalen, zum Ordnen von Objekten, zum Bilden von Reihenfolgen und zum Erkennen von Mustern zu geben.

2 Impulse für die Praxis

Im Folgenden werden Materialien vorgestellt, die Kinder zu Seriations-, Serialitäts- und Klassifikationsleistungen anregen. Die Angebote sind nicht als klassisches Training der Vorläuferfertigkeiten nach Piaget zu verstehen, bei denen kein Bezug zu Zahlen vorgesehen ist. Die Materialien können ergänzend eingesetzt werden, parallel zu Angeboten, die vielfältige Aspekte des Zahlverständnisses fördern.

Legekarten „Vorläuferfähigkeiten“ - Klassifikation

Die Legekarten bestehen aus verschiedenen Darstellungen von Schienenfahrzeugen: Lokomotiven, Personenwagons und Güterwagons in verschiedenen Farben und Ausrichtungen.

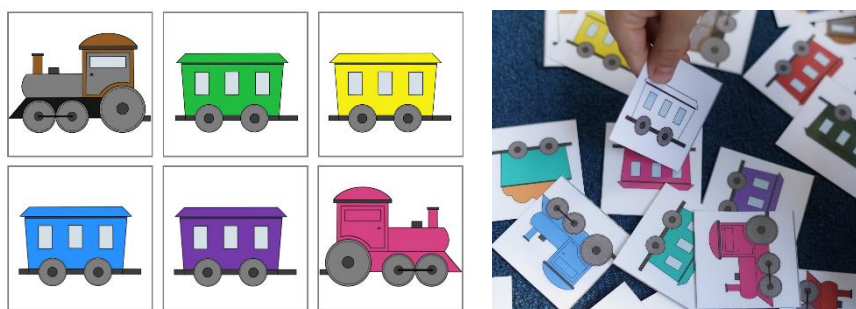


Abbildung 11: Legekarten „Vorläuferfähigkeiten“ - Klassifikation

In einem ersten Schritt können die Legekarten nach Farbe oder Art der Schienenfahrzeuge sortiert werden. Hier können die Kategorien frei gewählt werden oder durch Farbkarten bzw. Karten, die den Schienenfahrzeugtyp vorgeben, angeleitet werden. Zudem gibt es das Angebot, die Klassifikationen anhand von Legevorlagen vorzunehmen.



Abbildung 12: Legekarten „Vorläuferfähigkeiten“ – Klassifikation Legevorlage

Klammerkarten „Vorläuferfähigkeiten“ - Serialität

Bei den Klammerkarten zum Bereich Serialität werden die Kinder dazu angeleitet, Muster zu erkennen und diese fortzusetzen.

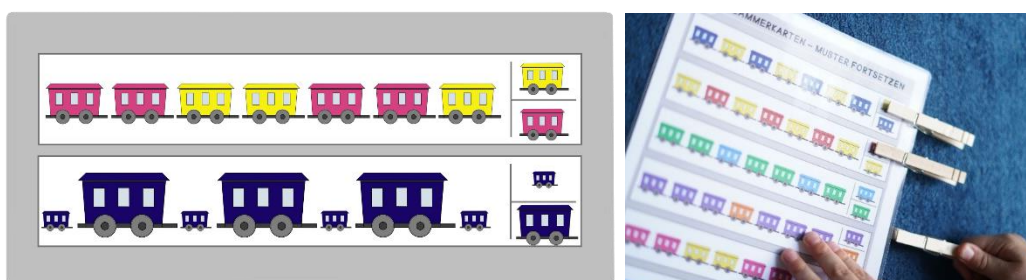


Abbildung 13: Klammerkarten „Vorläuferfähigkeiten“ – Serialität

Auch Übungen zur Serialität lassen sich mit den Legekarten zum Thema Klassifikation durchführen. Dabei können die ersten Schienenfahrzeuge nach einem bestimmten Muster aufgelegt werden, das vom Kind fortgesetzt wird. Zudem kann das Kind eigene Muster legen.

Weitere Anregungen zum Einsatz des Materials befinden sich in der zugehörigen Handreichung.

Literatur

- Benz, C., Peter-Koop, A., & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung: Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen*. Springer Berlin Heidelberg.
- Clements, D. (1984). Training Effects on the Development and Generalization of Piagetian Logical Operations and Counting Strategies. *Journal of Educational Psychology*, 76(5), 766–776.
- Devlin, K. (1998). *Muster der Mathematik: Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur*. Spektrum.
- Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. Springer.
- Gerster, H.-D., & Schultz, R. (2004). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche, Erkennen, Beheben, Vorbeugen*. Pädagogische Hochschule Freiburg.
- Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2020). *Anfangsunterricht Mathematik (4.)*. Springer.
- Krajewski, K. (2008). *Verhersage von Rechenschwäche in der Grundschule (2., korrigierte Auflage)*. Kovac.
- Lenart, F., Schaupp, H., & Holzer, N. (2013). *Eggenberger Rechentest 0+ Diagnostikum für Dyskalkulie-Disposition für das Ende des Kindergartenalters bis Mitte der 1. Schulstufe*. Huber.
- Lüken, M. (2012). Young Children's Structure Sense. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 33(2).
- Oeveste, H. (1987). *Kognitive Entwicklung im Vor- und Grundschulalter*. Verlag für Psychologie.
- Piaget, J. (1970). Die Genese der Zahl beim Kind. In J. Piaget (Hrsg.), *Rechenunterricht und Zahlbegriff. Die Entwicklung des kindlichen Zahlbegriffs und ihre Bedeutung für den Rechenunterricht (4. Aufl., S. 50–72)*. Westermann.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1973a). *Die Entwicklung der elementaren Strukturen. 1 (2. Aufl.)*.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1973b). *Die Entwicklung der elementaren Strukturen. 2 (2. Aufl.)*.
- Werner, B. (2007). Diagnose und Förderung im Bereich der Zahlbegriffsentwicklung. In J. Walter & F. Wember (Hrsg.), *Sonderpädagogik des Lernens (Bd. 2, S. 571–590)*. Hogrefe.