

Flexibles Rechnen beim Zehnerübergang

Rechenstrategien zur Ablösung des zählenden Rechnens

Sabine Apfler

Zusammenfassung

Um die Ablösung vom zählenden Rechnen zu erreichen, stellt der neue Lehrplan der Primarstufe flexibles Rechnen in den Mittelpunkt. Dies wird durch das Verständnis von Zusammenhängen zwischen Rechenoperationen sowie durch das „Entdecken und Anwenden verschiedener Lösungsstrategien und Rechenregeln“ (BMBWF, 2023) erreicht. Der Zehnerübergang stellt in der ersten Schulstufe einerseits besondere Herausforderung dar, bietet jedoch andererseits die Möglichkeit, Strategien für flexibles Rechnen zu entwickeln. In diesem Beitrag werden Ansätze vorgestellt, wie flexibles Rechnen im Zahlenraum 10 angebahnt und für den Zehnerübergang genutzt werden kann.

1 Einleitung

Zählendes Rechnen ist ein natürlicher Zugang, mit dem viele Schüler:innen zu Beginn der Schulzeit Rechenaufgaben lösen. Bleiben sie im Laufe der Primarstufe jedoch in dieser Strategie verhaftet und lösen Rechenaufgaben zählend, ohne alternative Strategien zu nutzen, ist das für die weitere Entwicklung hinderlich. Deshalb ist es essenziell, alternative Rechenstrategien im Unterricht zu erarbeiten. Darauf nimmt auch der Lehrplan (BMBWF 2023, S. 86) Bezug: „Das zählende Rechnen schränkt grundlegende Einsichten in das Dezimalsystem ein und ist nachteilig für ein sicheres Operieren; die Ablösung vom zählenden Rechnen hat daher hohe Priorität.“

Eine erste Hürde in diesem Prozess stellt der Zehnerübergang dar. Lange Zeit war in Österreich die Strategie des Zehnerstopps üblich, bei der Zahlen so zerlegt werden, dass zunächst bis zum nächsten Zehner gerechnet wird und anschließend im zweiten Schritt der verbleibende Wert addiert oder subtrahiert wird. Durch die Kompetenzorientierung gewinnt nun die Erarbeitung vielfältiger Strategien an Bedeutung. Im neuen Lehrplan wird der Vielfalt an Lösungsstrategien und dem Erkennen von Zusammenhängen besondere Bedeutung beigemessen: „Das Entwickeln eines tragfähigen Verständnisses wird beispielsweise durch Tausch-, Nachbar-, Umkehr-, Analogie- und Probeaufgaben gefördert. Besondere Bedeutung kommt auch Verdoppelungsaufgaben und der „Kraft der 5“ zu. Verschiedene Lösungswege werden mit Blick auf Verständnis und Flexibilität erkundet, verglichen und genutzt.“ (BMBWF 2023, S. 86)

2 Flexibles Rechnen als Ablösung vom zählenden

Rechnen

Für die ersten drei Schulstufen nennt der neue Lehrplan das flexible bzw. halbschriftliche Durchführen von Rechenoperationen in den jeweiligen Zahlenräumen explizit als Lernziel. Flexibles Rechnen meint das planvolle Lösen von Aufgaben auf Basis von automatisierten Grundaufgaben, Ableitungsstrategien sowie eines gefestigten Verständnisses für die Zusammenhänge zwischen den Grundrechenoperationen. (Götze u.a. 2023)

Flexibles Rechnen wird bereits in der ersten Schulstufe in kleinen Zahlenräumen angebahnt. Beispielsweise können Aufgaben zum Verdoppeln und Halbieren sowie Tausch- und Umkehraufgaben im Zahlenraum 10 zur Erarbeitung von Strategien genutzt und mit Materialien veranschaulicht werden, wie Abbildung 1 zeigt. Beim Auflegen des Zahlentripels 3 – 4 – 7 können 4 Rechnungen entdeckt werden.

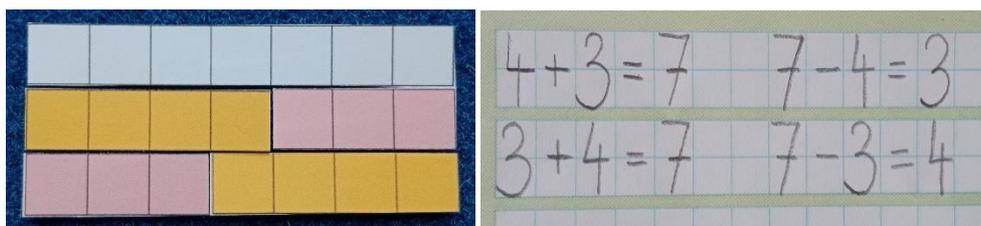


Abbildung 1: Erarbeitung von Tausch- und Umkehraufgaben mit bunten Zahlenstreifen

Damit Kinder ein gefestigtes Verständnis für die Zusammenhänge zwischen Rechenoperationen und Ableitungsstrategien entwickeln, sind Voraussetzungen erforderlich, die der Unterricht aufgreifen und behandeln muss. Zu diesen Voraussetzungen zählen:

- tragfähiges Zahlverständnis,
- tragfähiges Operationsverständnis,
- Automatisierung von Grundaufgaben,
- Rechenstrategien (Rathgeb-Schnierer u.a. 2023).

Das Ablösen vom zählenden Rechnen hin zur Nutzung flexibler Rechenstrategien ist ein komplexer Prozess, den nicht alle Schüler:innen im ersten Schuljahr abschließen (Häsel-Weide 2015). Auch in größeren Zahlenräumen ist es wichtig, Zahlzerlegungen, Zahlbeziehungen und Strategien immer wieder neu in den Fokus zu nehmen und besonders den Aufgabenblick, also die Nutzung für die Aufgabe besonders geeigneter Strategien, zu schulen. Die Automatisierung von Aufgaben darf nicht zu früh erfolgen.

3 Methodische Zugänge

Die Anwendung von Strategien zielt darauf ab, schwierige Rechnungen zu vereinfachen, indem auf Vorwissen zurückgegriffen wird und die Besonderheiten von Zahlen genutzt werden. Zahlen können dabei entweder zerlegt und neu zusammengesetzt oder vergrößert bzw. verkleinert werden. Die folgende Abbildung zeigt beispielhaft für die Rechenoperation $7 + 8$, wie die Zahl 7 in 5 plus 2 und die Zahl 8 in 5 plus 3 zerlegt werden, um die „Kraft der Fünf“ zu nutzen. Die beiden 5er können nun zu 10 zusammengefasst werden.

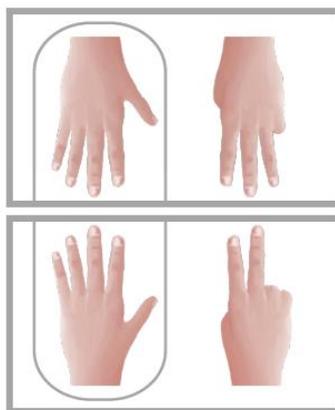


Abbildung 2: Zahlen zerlegen und neu zusammensetzen

Dahinter stehen Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz. Schüler:innen sollen diese Gesetzmäßigkeiten als schlaue Rechenwege begreifen und anwenden – die Fachbegriffe sind für sie nicht relevant. Während bei den schriftlichen Rechenverfahren Zahlen auf ihre Ziffern reduziert werden, nutzt das flexible und halbschriftliche Rechnen die besonderen Eigenschaften von Zahlen, indem diese in Teile zerlegt und neu zusammengesetzt werden. Erste Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten, wie etwa Tausch- und Umkehraufgaben, können bereits in kleinen Zahlenräumen erforscht und genutzt werden (Rathgeb-Schnierer u.a. 2023).

Der Zehnerübergang stellt in der ersten Schulstufe einerseits eine besondere Herausforderung dar, bietet andererseits jedoch die Gelegenheit, Rechenwege und -strategien zu entdecken. Für den Zehnerübergang können folgende Rechenstrategien genutzt werden (Götze u.a. 2023):

- Kraft der Fünf
- Nutzung von Nachbaraufgaben, z.B. Kraft der Zehn, Verdopplungsaufgaben ± 1
- Teilschrittverfahren / Zehnerstopp

Zur Erarbeitung dieser Strategien eignet sich der Einsatz strukturierter Materialien, wie zum Beispiel die Finger der eigenen Hände oder Fingerbilder, das Zwanzigerfeld mit roten und blauen Plättchen oder die bunten Zahlenstreifen. Damit können die Schüler:innen die Zusammenhänge zwischen den Rechenoperationen und die Zerlegungen von Zahlen selbst entdecken. Fehler sollen im

Erarbeitungsprozess nicht problematisiert, sondern „konstruktiv als Lernchancen aufgegriffen werden“ (BMBWF 2023, S. 86).

Einspluseins- und Einsminuseins-Tafeln sind geeignet, die additiven Rechenoperationen mit und ohne Zehnerübergang darzustellen. Rechenoperationen, die zur selben Strategie (Nachbaraufgaben, Kraft der Fünf, Verdopplungen, Rechnungen mit dem Ergebnis 10) gehören, sind gleich gefärbt. Diese Tafeln können mit den Schüler:innen erkundet und gemeinsam befüllt werden. Sie bieten Anlass für Gespräche über Strategien und Aufgabenbeziehungen (Wittmann & Müller, 2019).

1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1	10+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2	10+2
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3	10+3
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4	9+4	10+4
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5	8+5	9+5	10+5
1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6	10+6
1+7	2+7	3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7	10+7
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8	10+8
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9	10+9
1+10	2+10	3+10	4+10	5+10	6+10	7+10	8+10	9+10	10+10

Abbildung 3: Einspluseinstafel (in Anlehnung an Wittmann & Müller 2019, S. 51)

4 Impulse für die Praxis

Für die Erarbeitung von Rechenstrategien sieht der Lehrplan den Einsatz unterschiedlicher Materialien zum Entdecken der Rechenwege sowie zur Veranschaulichung vor: „Das wiederholte Wechseln der Darstellungsform – handelnd, bildhaft, verbal, symbolisch – unterstützt einerseits den Aufbau des Zahlverständnisses, die Einsicht in Operationsstrukturen, das Verständnis für mathematische Symbole und das Festigen fachsprachlicher Begriffe, andererseits das Finden von Lösungsstrategien. Der Einsatz geeigneter didaktischer Materialien und Veranschaulichungen fördert die Entwicklung tragfähiger Grundvorstellungen.“ (BMBWF 2023, S. 86) Viele Schulbücher nutzen beim Zehnerübergang Zwanzigerfelder mit roten und blauen Plättchen, die Schüler:innen zum Abzählen verleiten können.

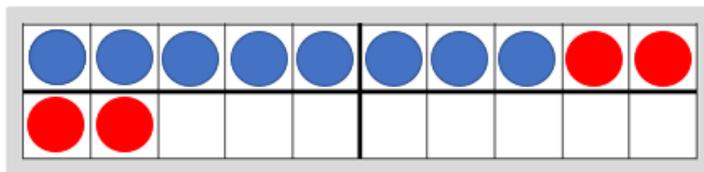


Abbildung 4: Rechnen mit roten und blauen Plättchen am Zwanzigerfeld

Der Einsatz bunter Zahlenstreifen wirkt dem Abzählen der einzelnen Plättchen entgegen. Die bunten Zahlenstreifen sind ein didaktisches Material, das auf die farbigen Perlenstäbchen von Maria Montessori zurückgeht. Es besteht aus Quadraten, die zu Streifen zusammengesetzt sind, um die Zahlen von 1 bis 10 darzustellen. Zur schnellen Identifikation der jeweiligen Zahlen im Arbeitsprozess haben die Streifen unterschiedliche Farben. Weil jeder Streifen die jeweilige Zahl als Ganzes repräsentiert, wird zählendes Rechnen reduziert.

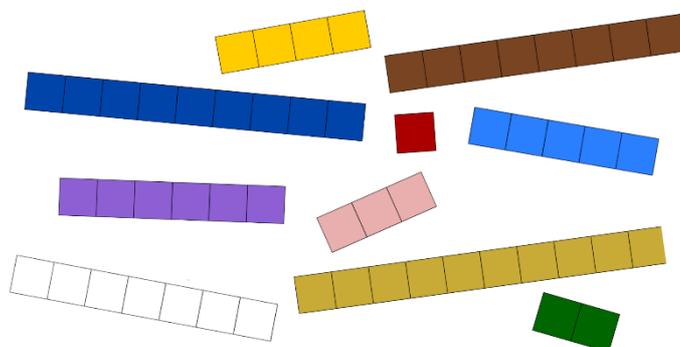


Abbildung 5: bunte Zahlenstreifen

Tausch- und Umkehraufgaben können bereits im Zahlenraum 10 mit Zehnerfeldern und bunten Zahlenstreifen gelegt und entdeckt werden. Ebenso kann die Kraft der Fünf mit Fingerbildern im Zahlenraum 10 erarbeitet und gefestigt werden. Diese Erkenntnisse dienen als Grundlage für die Erarbeitung der Strategien beim Zehnerübergang. Zwischenschritte oder Zwischenlösungen können notiert werden (halbschriftliches Rechnen). Schüler:innen sollen ihre Rechenwege verbalisieren und begründen.

Die Materialien mit Aufgabenkarten geben Impulse für Rechenaufgaben zur Nutzung der jeweiligen Strategie zum Zehnerübergang. Die Schüler:innen können und sollen weitere Aufgaben selbst entdecken und daraus Gesetzmäßigkeiten ableiten.

Aufgabenkarten „Geschicktes Rechnen“

Als Vorübung für den Zehnerübergang mit Zehnerstopp dienen Aufgaben, bei denen die Schüler:innen Überlegungen anstellen, wie sie Zahlen geschickt kombinieren können, um zuerst den Zehner aufzufüllen. Durch das Auflegen der Zahlenstreifen auf dem Zwanzigerfeld entdecken die Schüler:innen, dass die Summanden bei der Addition vertauscht werden dürfen, was dem geschickten Rechnen nützt. Bei der Subtraktion wird der Zehnerstreifen gegen kürzere Streifen

getauscht, wodurch das Entbündeln veranschaulicht und geübt wird. In der Abbildung 6 wird bei der Subtraktionsaufgabe das Wegnehmen des Dreier-Streifens durch die schräge Lage symbolisiert.

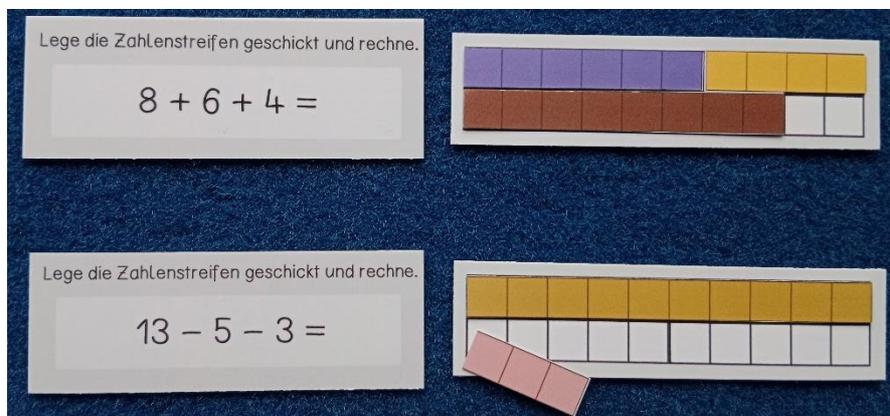


Abbildung 6: Aufgabenkarten „Geschicktes Rechnen“

Aufgabenkarten „Zehnerstopp“

Voraussetzung für die Nutzung der Rechenstrategie Zehnerstopp ist Wissen über Zahlzerlegungen im Zahlenraum 10 (siehe Beitrag „Zahlzerlegungen im Zahlenraum 10“). Die Aufgabenkarten „Zehnerstopp“ bieten Anregungen, wie Aufgaben mit den bunten Zahlenstreifen und dem Zwanzigerfeld handlungsorientiert gelegt und gelöst werden können. Die Entbündelung des Zehners erfolgt wieder durch einen Wechsel der entsprechenden Zahlenstreifen.

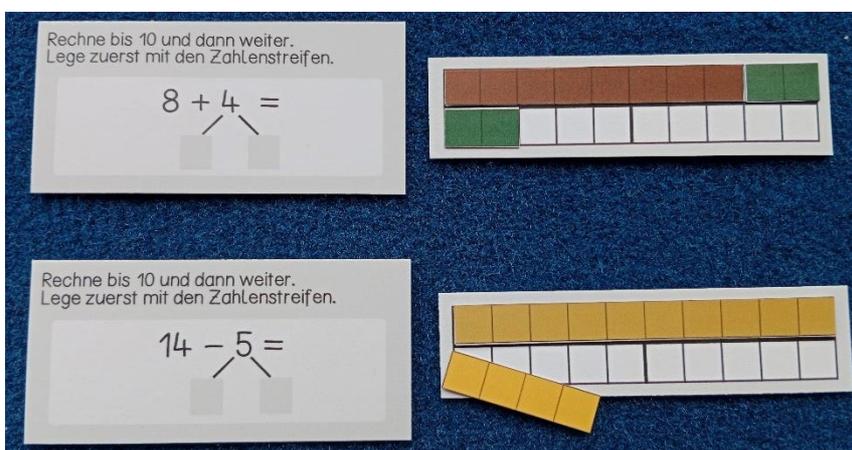


Abbildung 7: Aufgabenkarten „Zehnerstopp“

Legekarten „Die Kraft der 5“

Für die Rechenstrategie „Kraft der 5“ bietet sich Partnerarbeit und die Nutzung der Hände an. Als erste Übung werden Aufgaben verwendet, in denen ein Summand 5 ist. In weiterführenden Übungen erkennen die Schüler:innen, dass beide Summanden die Zerlegung mit der Zahl 5 beinhalten und diese für den Zehnerübergang genutzt werden kann. In der Arbeit mit den Legekarten finden die

Schüler:innen zu den Rechenkarten die passenden Karten mit Fingerbildern und umgekehrt zu den Bildern die jeweilige Darstellung in symbolischer Form als Rechnung.

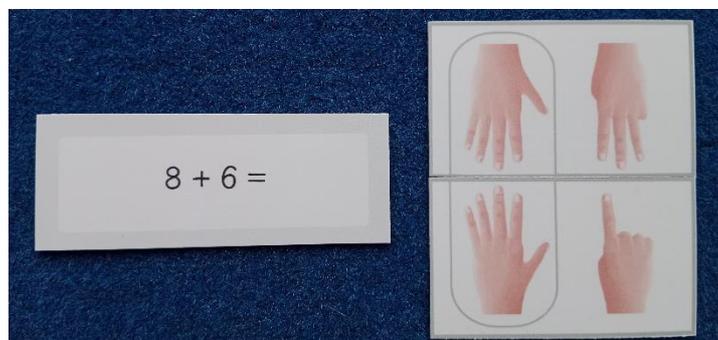


Abbildung 7: Aufgabenkarten „Kraft der Fünf“

Aufgabenkarten „Verdoppeln“

Verdopplungsaufgaben werden bereits im Zahlenraum 10 als besondere Aufgaben kennengelernt. Im Zahlenraum 20 bieten sie sich als weitere Strategie beim Zehnerübergang an. In einem ersten Schritt werden die Zahlen von 6 bis 10 verdoppelt. Ausgehend von diesen Aufgaben können schließlich die Nachbaraufgaben zum Weiterrechnen genutzt werden und jeweils ein Streifen durch einen um 1 Feld kürzeren bzw. längeren Streifen ersetzt werden.

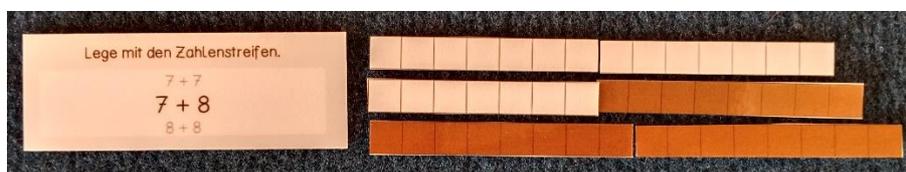


Abbildung 8: Aufgabenkarten „Verdoppeln“

Aufgabenkarten „Kraft der Zehn“

Ähnlich wie beim Verdoppeln plus/minus 1 stehen bei den Aufgabenkarten zur Nutzung der „Kraft der Zehn“ die Nachbaraufgaben im Fokus. Bei Aufgaben mit plus/minus 9 kann die Nachbaraufgabe mit plus/minus 10 als Hilfsaufgabe zum schnelleren Lösen der Aufgabe genutzt werden.

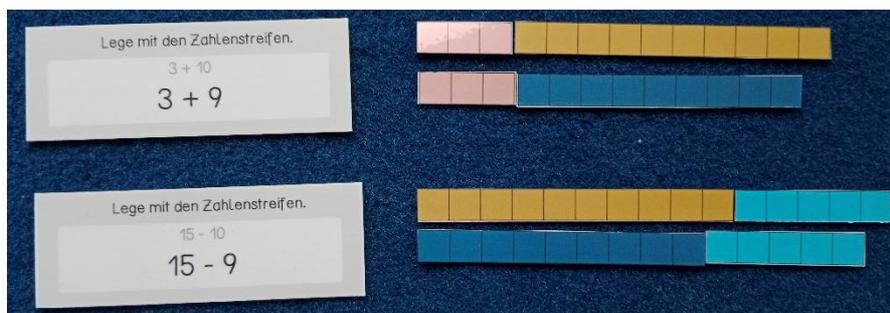


Abbildung 9: Aufgabenkarten „Kraft der Zehn“

Legekarten „Strategien-Überblick“

Nach der Erarbeitung der verschiedenen Strategien zum Zehnerübergang soll eine Reflexion darüber erfolgen, wie die Schüler:innen diese Strategien aufgabenbezogen nutzen. Das Material „Strategien-Überblick“ umfasst alle Additions- und Subtraktionsaufgaben mit Zehnerübergang sowie Kärtchen, die zur Diskussion und Reflexion über Strategien anregen. Die Schüler:innen begründen dabei, welche Rechnungen sie als einfach bzw. als schwierig empfinden, und erläutern, welche Strategien sie zur Lösung der jeweiligen Aufgabe wählen würden. Dieses Material schärft den Blick für Strategien und gibt Impulse für Gespräche darüber.

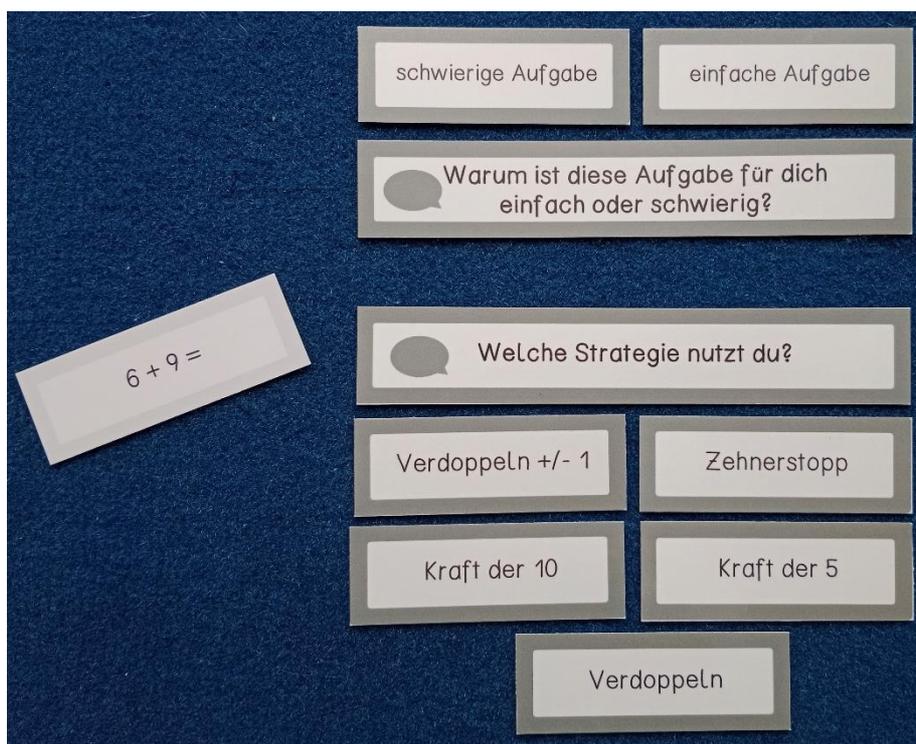


Abbildung 10: Legekarten „Strategien-Überblick“

Weitere Anregungen und Übungsmöglichkeiten zur Arbeit mit dem Material befinden sich in der zugehörigen Handreichung.

Literatur

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF) (2023). Lehrpläne der Volksschule und der Sonderschulen.

<https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung/Bundesnormen/10009275/Lehrpl%a4ne%20der%20Volksschule%20und%20der%20Sonderschulen%2c%20Fassung%20vom%202004.09.2024.pdf>

- Götze, D., Selter, C. & Zannetin, E. (2023). Das KIRA-Buch: Kinder rechnen anders. Verstehen und Fördern im Mathematikunterricht. Kallmeyer Seelze.
- Häsel-Weide, U. u.a. (2015). Ablösung vom zählenden Rechnen. Fördereinheiten für heterogene Lerngruppen. Seelze. Kallmeyer.
- Rathgeb-Schnierer, E., Schuler, S. & Schütte, S. (2023). Mathematikunterricht in der Grundschule. Lernangebote fachorientiert, kindorientiert und differenziert gestalten. Berlin. Springer-Spektrum.
- Wittmann, E. & Müller, G. (2019). Handbuch produktiver Rechenübungen. Band I: Vom Einspluseins zum Einmaleins. 2. Aufl. Stuttgart. Klett|Kallmeyer.