



49. Österreichische Mathematik-Olympiade

Kurswettbewerb für AnfängerInnen

25. Mai 2018

- 1) Anna und Berta interessieren sich für positive ganzzahlige Lösungen der Gleichung $20x^2 + 18y^2 = z$ und spielen folgendes Spiel:
Zu Beginn sagt Anna eine zweistellige Zahl z . Wenn Berta dazu Lösungen x und y der obigen Gleichung findet, hat sie gewonnen, wenn nicht, sagt sie eine andere Zahl z . Wenn Anna Lösungen findet, hat sie gewonnen, wenn nicht, sagt sie wieder eine neue Zahl z . Das geht solange weiter, bis eine der Spielerinnen eine Lösung (x, y) findet und damit gewinnt.
Wer gewinnt, wenn beide Spielerinnen fehlerlos spielen?
- 2) Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Der Punkt P liegt auf BC und Q auf CD und es gilt $\angle PAQ = 45^\circ$. Der Schnittpunkt von BD mit AP sei R .
Man beweise, dass QR auf AP normal steht.
- 3) Wir nennen eine Zahl „schön“, wenn sie genau vier positive Teiler hat. 2018 ist z.B. eine schöne Zahl, weil sie die Teiler 1, 2, 1009 und 2018 hat.
Wir nennen eine schöne Zahl „besonders schön“, wenn die Summe ihrer vier Teiler eine ungerade Zahl ist.
Man bestimme alle besonders schönen Zahlen.

Arbeitszeit: 3 Stunden

Bei jeder Aufgabe kann man 8 Punkte erreichen.