52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Denksport Unterstufe - Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 9. Oktober 2020

Schubfachschluss

Wir beginnen zunächst mit einem kleinen Theorieabschnitt, bevor Aufgaben zum Schubfachschluss folgen.

Satz 1 (Schubfachprinzip)**.** Falls man n Objekte auf m Mengen (n, $m > 0$) verteilt und n größer als m ist, dann gibt es mindestens eine Menge, in der mehr als ein Objekt ist.

Satz 2 (Schubfachprinzip (bildhafte Vorstellung dieses Vorgangs))**.** Gegeben seien m „Schubfächer“ und n „Gegenstände“, die auf diese Fächer verteilt werden sollen mit $n > m > 0$. Dann gibt es ein Fach, in dem mindestens zwei Gegenstände liegen.

Beweis: Der Beweis dieses Prinzips kann indirekt geführt werden: Falls das Prinzip nicht stimmt, dann liegt in jedem der m Schubfächer höchstens ein Gegenstand. Damit gibt es höchstens m Gegenstände. Das steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung $n > m$.

$\square$

Satz 3 (Schubfachprinzip (allgemeine Form))**.** Falls man $m \cdot k + 1$ Objekte auf m Mengen (m, $k > 0$) verteilt, dann gibt es eine Menge, in der mindestens $k+1$ Objekte sind.

Aufgaben

1. Es gibt 37 Kartoffelsäcke auf Lager, mit Kartoffeln, die zu einer von vier Sorten gehören. Alle Kartoffeln aus dem gleichen Sack sind auch von der gleichen Sorte. Ein Restaurant hat neun Säcke einer Sorte bestellt.

   Ist es sicher möglich, diesen Auftrag zu erfüllen?

   Bemerkung: Um welche Sorte es sich handelt ist dem Restaurant nicht wichtig.

2. Auf einem Blatt Papier sind sechs Punkte gegeben, die so platziert sind, dass keiner der Punkte auf einer Geraden mit zwei anderen Punkten liegt. Man verbindet diese Punkte mit einem grünen oder einem roten Stift. Zwei Spieler A und B machen das nacheinander und dürfen beide Farben benutzen. A will, dass auf der Ebene ein rotes oder ein grünes Dreieck erscheint. B will das vermeiden.

   Beweise, dass B immer verliert.

3. Beweise folgende Aussagen:

   a) Unter 10 beliebigen ganzen Zahlen existieren zwei, deren Differenz durch neun teilbar ist.

   b) Unter n beliebigen ganzen Zahlen existieren einige (oder vielleicht eine), deren Summe durch n teilbar ist.

   c) Man wirft 51 Punkte in ein Einheitsquadrat (ein Quadrat mit Seitenlängen eins). Es gibt einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{7}$, der drei dieser Punkte enthält.

4. Beweise, dass es eine Zahl gibt, die die Form

$$20192019\ldots201900\ldots0,$$

   hat und durch 2020 teilbar ist.

   Bemerkung: Die Zahl soll aus einigen Wiederholungen der Ziffernfolge 2, 0, 1 und 9 bestehen, gefolgt von einigen Nullen.

5. Kann man

   a) zwei Primzahlen finden, bei denen die letzten drei Ziffern übereinstimmen?

   b) mehrere Primzahlen finden, bei denen die letzten drei Ziffern übereinstimmen?

Hinweise und Lösungen zu allen Aufgaben dieses Arbeitsblatts kannst du bei [1] nachlesen.

Literatur

[1] Mathematik macht Freu(n)de, Unterstufen-Kurs 2020. https://mmf.univie.ac.at/fileadmin/user_upload/p_mathematikmachtfreunde/Olympiade/Unt_1920/U-20200515.pdf. 15. Mai 2020, (aufgerufen am 9. Oktober 2020).