52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen-I-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 9. Oktober 2020

Kongruenzen:

Zwei ganze Zahlen a und b sind „kongruent modulo m“, wenn sie bei der Division durch die natürliche Zahl $m \neq 0$ denselben Rest lassen.
Es gilt: Zwei Zahlen a und b sind genau dann kongruent modulo m wenn m die Differenz $a - b$ teilt.
Man schreibt: $a \equiv b \pmod{m}$ oder kürzer: $a \equiv b\ (m)$. Es gilt also:

$$a \equiv b (\operatorname{mod} m) \Longleftrightarrow m|a-b \quad \text{oder} \quad a = b + km \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Rechenregeln für Kongruenzen:

1. Aus $a \equiv b \pmod{m}$ und $b \equiv c \pmod{m}$ folgt: $a \equiv c \pmod{m}$
2. Aus $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$ und $c \equiv d (\operatorname{mod} m)$ folgt: $a+c \equiv b+d (\operatorname{mod} m)$ und $a–c \equiv b–d (\operatorname{mod} m)$
3. Aus $a \equiv b \pmod{m}$ und $c \equiv d \pmod{m}$ folgt: $ac \equiv bd \pmod{m}$
4. Aus $a \equiv b \pmod{m}$ folgt: $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.
5. (**Kleiner Satz von Fermat**)
   Ist p eine Primzahl und a eine nicht durch p teilbare ganze Zahl, dann gilt
   $$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

1. Man zeige, dass $9^n + 8^n + 7^n + 6^n - 4^n - 3^n - 2^n - 1^n$ für alle positiven ganzen Zahlen n durch 10 teilbar ist. [8, JRW 2007 (Walther Janous)]

2. Man bestimme alle Lösungen der Gleichung
   $$a^2 = b \cdot (b + 7)$$
   mit ganzen Zahlen $a \geq 0$ und $b \geq 0$. [1, (Walther Janous)]

3. Für welche Primzahlen p ungleich 2 und 5 gibt es ein Vielfaches von p, dessen Ziffern alle 9 sind? Zum Beispiel $999999 = 13 \cdot 76923$ [9]

4. Zeige, dass die Gleichung
$$a^2 + b^2 - 8c = 6$$
keine Lösung in den ganzen Zahlen hat. [6]

5. Es seien a, b und c ganze Zahlen, für die die Summe $a^3 + b^3 + c^3$ durch 18 teilbar ist. Man beweise, dass das Produkt abc durch 6 teilbar ist. [2, (Karl Czakler)]

6. Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ für die
$$n = a^2 + b^2$$
gilt, wobei a der kleinste von 1 verschiedene Teiler von n und b ein beliebiger Teiler von n ist. [4, (Walther Janous)]

7. Man zeige, dass $n^4 + 98n$ für keine positive ganze Zahl n vierte Potenz einer natürlichen Zahl sein kann! [7, RWF 1999 (Gerd Baron)]

8. Es seien p und q Primzahlen. Für welche Werte von p und q ist $p^q + q^p$ ebenfalls eine Primzahl? [6]

9. Bestimmen alle Tripel (a, b, c) positiver ganzer Zahlen, für die gilt: [6]
$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 b^2.$$

10. Es seien x, y und z positive reelle Zahlen mit $x+y+z = 3$. Man beweise, dass mindestens eine der drei Zahlen
$$x(x + y - z); \quad y(y + z - x) \quad \text{oder} \quad z(z + x - y)$$
kleiner oder gleich 1 ist. [3, (Karl Czakler)]

11. Es seien a und b nicht-negative reelle Zahlen mit $a + b < 2$. Man beweise die folgende Ungleichung:
$$\frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + b^2} \leq \frac{2}{1 + ab}.$$
Für welche a, b gilt Gleichheit? [5, (Gottfried Perz)]

12. Es seien a und b reelle Zahlen mit $ab = 1$. Man bestimme die größte Zahl C, sodass
$$(a - 2)^2 + (b - 2)^2 \geq C$$
unabhängig von a und b erfüllt ist.

Literatur

[1] Junior-Regionalwettbewerb 2014. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/82`. (aufgerufen am 6. Oktober 2020).

[2] Junior-Regionalwettbewerb 2015. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/102`. (aufgerufen am 6. Oktober 2020).

[3] Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene 2015. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/92`. (aufgerufen am 6. Oktober 2020).

[4] Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene 2017. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/300`. (aufgerufen am 6. Oktober 2020).

[5] Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene 2018. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/409`. (aufgerufen am 6. Oktober 2020).

[6] Tom Ballik. *Mathematik-Olympiade (für Anfänger)*. ikon VerlagsGesmbH, 2012.

[7] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 1990–1999: Aufgaben und Lösungen*. öbv, 1999.

[8] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2000–2008: Aufgaben und Lösungen*. Nova MD, 2018. Auflage 1.3.

[9] Clemens Heuberger. Zahlentheorie. `https://www.math.aau.at/OeMO/Downloads/datei/18`. (aufgerufen am 6. Oktober 2020).