52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen I-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 2. Oktober 2020

1.)	Löse in den natürlichen Zahlen $x^2 + xy = 2021$	Ballik : Mathematik-Olympiade
2.)	Schreibt man die Zahlen von 1 bis 1000 000 an und bildet man die Summe aller Ziffernsummen der angeschriebenen Zahlen, so erhält man welchen Wert?	
3.)	Zeige, dass das Gleichungssystem $\begin{Bmatrix} x^2 + 6y^2 = z^2 \\ 6x^2 + y^2 = t^2 \end{Bmatrix}$ keine Lösung in den positiven, ganzen Zahlen hat.	Andreescu: Treasures S 90
4.)	Löse in den natürlichen Zahlen $\left\lfloor \frac{x+2}{45-x} \right\rfloor = 4$	
5.)	Löse in den ganzen Zahlen $k^2 - 2016 = 3^n$ *Beachte, dass* $2016 = 2^5.3^2.7$	GW 2016
6.)	Man bestimme alle Tripel reeller Zahlen (x; y; z), die folgendes Gleichungssystem erfüllen: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$	
7.)	Wähle 5 Gitterpunkte A, B, C, D, E. Bestimme jeweils alle Mittelpunkte. Zeige, dass mindestens ein Mittelpunkt wieder Gitterpunkt ist. *Hinweis: Ein Gitterpunkt ist ein Punkt mit ganzzahligen Koordinaten.*	N. Grinberg: Lösungsstrategien 37/2.12
8.)	Der Satz von Fermat für Primzahlen p lautet: $a^p \equiv a \pmod p$ Wenn ggT(a, p) = 1 gilt, dann gilt: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ Zeige: $323 \mid 3^{34} - 3^{18} - 3^{16} + 1$	Ballik: Mathematik-Olympiade Z 3.53