



52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenenkurs-I „Mathematik macht Freu(n)de“

16. Oktober 2020

1.)	Heuer ist der 24. Dezember ein Donnerstag. Dann ist der 24. Dezember im Jahr (i) 2021 (ii) 2022 (iii) 2023 (iv) 2024 welcher Wochentag?	
2.)	Zeige, dass die Zahl $x = 21^{999} + 19^{777}$ durch 20 teilbar ist.	Ballik: Mathematik-Olympiade Z3.17
3.)	Bestimme die Einerstelle von 2013^{123} .	Ballik: Mathematik-Olympiade Z3.26
4.)	Zeige, dass für beliebige ganze Zahlen a, b der Ausdruck $a^2 + b^2 + 1$ nicht durch 28 teilbar ist.	Ballik: Mathematik-Olympiade Z3.30
5.)	Zeige, dass $5^{93} - 1$ (a) keine Primzahl (b) keine Quadratzahl ist.	
6.)	Sei n eine positive, gerade Zahl. Bestimme alle zueinander relativ primen ganzen Zahlen a, b so, dass $a + b \mid a^n + b^n$	Andreescu: Number Theory 1.3.4
7.)	Löse das Gleichungssystem in den reellen Zahlen $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ y + z + x = 5 \\ z + x + y = 6 \end{cases}$	D-Mathematik-Olympiade 581 041
8.)	Bestimme alle Primzahlen p , sodass $n = p^2 + 11$ genau 6 Teiler (inkl. 1 und die Zahl selbst) hat.	Andreescu: Number Theory
9.)	Sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck und k sein Umkreis. S („Südpol“) sei der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale des Winkels $\gamma = \angle ACB$ mit k und I der Inkreismittelpunkt. Zeige, dass das Dreieck AIS gleichschenkelig ist.	
10.)	a) Bestimme alle positiven ganzen Zahlen n , für die $2^n - 1$ durch 7 teilbar ist. b) Zeige, dass es keine positive ganze Zahl n gibt, für die $2^n + 1$ durch 7 teilbar ist.	IMO 1964 Andreescu: Number Theory 7.1.7