52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen-I-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 23. Oktober 2020

1. Es sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck und E und F die Fußpunkte der Höhen h_b und h_c. M sei der Mittelpunkt der Seite BC. [3]

   (a) Zeige, dass ME und MF Tangenten an den Umkreis von AFE sind.

   (b) Zeige, dass die zu BC parallele Gerade durch den Punkt A ebenfalls eine Tangente des Umkreises von AFE ist.

2. Gegeben sei ein regelmäßiges Neuneck mit dem Umkreismittelpunkt M. Die Punkte A, B, C und D seien vier aufeinanderfolgende Eckpunkte und k der Umkreis des Dreiecks MBC.
   Beweise, dass die Seiten AB und CD des Neunecks Tangenten an k sind. [3]

3. Gegeben sei ein gleichschenkeliges Dreieck ABC mit $AC = BC$ und P sei ein beliebiger Punkt auf AB. Dr Lotfußpunkt von P auf BC sei D und der Lotfußpunkt von P auf AC sei E.
   Beweise, dass die Summe der Strecken EP und DP konstant ist. [3]

4. Das Dreieck ABC sei spitzwinklig und nicht gleichschenklig. Der Umkreis dieses Dreiecks werde mit k bezeichnet. Der Höhenschnittpunkt soll H heißen. Der von C verschiedene Schnittpunkt der Geraden durch C mit dem Umkreismittelpunkt U von k mit dem Kreis k soll G heißen.
   Zeige: Das Viereck $ABGH$ ist ein Parallelogramm. [3]

5. Es sei ABC ein Dreieck mit $AC > AB$ und dem Umkreismittelpunkt U. Die Tangenten an den Umkreis in den Punkten A und B schneiden einander im Punkt T. Die Symmetrale der Seite BC schneidet die Seite AC im Punkt S.
   Man zeige:

   (a) Die Punkte A, B, S, T und U liegen auf einem Kreis.

   (b) Die Gerade ST ist parallel zur Seite BC.

   [2, RWF 2016, Aufgabe 4 (Karl Czakler)]

6. Es sei ABC ein gleichschenkeliges Dreieck mit $AC = BC$ und $\angle ACB < 60°$. Wir bezeichnen den Inkreismittelpunkt und den Umkreismittelpunkt mit I bzw. U. Der Umkreis des Dreiecks BIU schneidet den Schenkel BC ein zweites Mal im Punkt D.

   (a) Man beweise, dass die Geraden AC und DI parallel sind.

   (b) Man beweise, dass die Geraden UD und IB aufeinander normal stehen.

   [1, RWF 2015, Aufgabe 4 (Walther Janous)]

Literatur

[1] Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene 2015. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/92`. (aufgerufen am 20. Oktober 2020).

[2] Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene 2016. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/149`. (aufgerufen am 20. Oktober 2020).

[3] Tom Ballik. *Mathematik-Olympiade (für Anfänger)*. ikon VerlagsGesmbH, 2012.