52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 06. November 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Jakob Steininger zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 3. November 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Jakob Steininger bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 06. November 2020 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Sei n eine positive ganze Zahl. Wir betrachten $S(n)$, die Summe der 2001 Potenzen von n mit den Exponenten 0 bis 2000. Also

$$S(n) = \sum_{k=0}^{2000} n^k = n^0 + n^1 + n^2 + \ldots + n^{2000}.$$

Was ist die Einerziffer von $S(n)$ im Dezimalsystem?

Aufgabe 2. Man bestimme die kleinste positive ganze Zahl x, sodass alle folgenden Brüche gekürzt sind, das heißt Zähler und Nenner relativ prim sind.

$$\frac{3x+9}{8}, \frac{3x+10}{9}, \frac{3x+11}{10}, \ldots, \frac{3x+49}{48}$$

Aufgabe 3. Es sei $A_0 = \{1, 2\}$ und für $n > 0$ entsteht A_n aus A_{n-1} indem man zu A_{n-1} die natürlichen Zahlen hinzu nimmt, die sich als Summe von zwei verschiedenen Zahlen aus A_{n-1} darstellen lassen.
Es sei $a_n = |A_n|$ die Anzahl der Zahlen in A_n.
Man bestimme a_n als Funktion von n.

Aufgabe 4. Man bestimme alle Primzahlen p, für die $5^p + 4p^4$ eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 5. Man zeige: Für 42 paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_{42}$ kann die Summe

$$\sum_{j=1}^{42} \frac{1}{p_j^2 + 1}$$

kein Stammbruch $1/n^2$ mit $n \in \mathbb{Z}^+$ sein.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Zeige und benutze $n^k \equiv n^{k+4} \pmod{10}$

Aufgabe 2. $\frac{3x+(k+1)}{k}$ ist gekürzt, wenn $\frac{3x+1}{k} = \frac{3x+1+k}{k} - 1$ gekürzt ist.

Aufgabe 3. Berechne die ersten A_n und stelle eine Vermutung auf. Lässt sich diese mit Induktion zeigen?

Aufgabe 4. Die Gleichung $5^p + 4p^4 = x^2$ lässt sich nach kurzer Umformung faktorisieren.

Aufgabe 5. Ausmultiplizieren und modulo 3 betrachten.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Jakob Steininger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Es gilt $n^5 \equiv \pmod{10})$, wie man etwa durch eine Tabelle von Restklassen modulo 10 feststellen kann. Multiplikation mit n^{k-1} für $k \geq 1$ liefert

$$n^{k+4} \equiv n^k \pmod{10}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} n^1 &\equiv n^5 \equiv n^9 \equiv \ldots \equiv n^{1997} \pmod{10} \\ n^2 &\equiv n^6 \equiv n^{10} \equiv \ldots \equiv n^{1998} \pmod{10} \\ n^3 &\equiv n^7 \equiv n^{11} \equiv \ldots \equiv n^{1999} \pmod{10} \\ n^4 &\equiv n^8 \equiv n^{12} \equiv \ldots \equiv n^{2000} \pmod{10}. \end{aligned}$$

Deshalb erhält man

$$S(n) \equiv n^0 + 500 \cdot (n^1 + n^2 + n^3 + n^4) \equiv n^0 \equiv 1 \pmod{10}.$$

Aufgabe 2.

Zunächst ist $\frac{3x+(k+1)}{k}$ genau dann gekürzt, wenn $\frac{3x+1}{k}$ gekürzt ist, da

$$\frac{3x+(k+1)}{k} = \frac{3x+1}{k} + 1$$

gilt. Wir suchen als eine möglichst kleine positive ganze Zahl x sodass $3x + 1$ zu den Zahlen $8, 9, 10, \ldots, 47$ und 48 teilerfremd ist. Somit enthält $3x + 1$ keinen der Primteiler $2, 3, 5, \ldots, 43$ und 47. Demnach muss $3x + 1$ einer der nächsten Primzahlen sein, die gleichzeitig bei Division durch 3 einen Rest von 1 ergeben. Das führt zur Primzahl 61 und somit zur Lösung $x = 20$.

Aufgabe 3.

Man erhält

$$\begin{aligned} A_0 &= \{1, 2\} \\ A_1 &= \{1, 2, 3\} \\ A_2 &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ A_3 &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}. \end{aligned}$$

Dadurch stellt man die Vermutung auf: $A_n = \{1, 2, 3, \ldots, 2^n + 1\}$. Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsschritt: $n \to n+1$. Sei, nach Induktionsvoraussetzung, $A_n = \{1, 2, 3, \ldots, 2^n+1\}$. Dann enthält A_{n+1} die Zahlen $2^n + 2, 2^n + 3, \ldots, 2^{n+1} + 1$, da diese als Summe von 2 verschiedenen

Zahlen aus A_n geschrieben werden können:

$$\begin{aligned} 2^n + 2 &= (2^n + 1) + 1 \\ 2^n + 3 &= (2^n + 1) + 2 \\ &\dots \\ 2^{n+1} + 1 &= (2^n + 1) + 2^n. \end{aligned}$$

Weiters enthält A_{n+1} die Zahlen von A_n und kann keine Zahl größer als $2^{n+1} + 1$ beinhalten. Somit gilt tatsächlich $A_{n+1} = \{1, 2, \dots, 2^{n+1} + 1\}$ womit der Induktionsschritt gezeigt ist.
Letztendlich gilt $a_n = |A_n| = 2^n + 1$.

Aufgabe 4.

Zunächst erhält man

$$5^p + 4p^4 = x^2 \Rightarrow 5^p = x^2 - 4p^4 = (x - 2p^2)(x + 2p^2).$$

Da 5 eine Primzahl ist, muss sowohl $x - 2p^2$ als auch $x + 2p^2$ eine Potenz von 5 sein, also

$$\begin{aligned} x - 2p^2 &= 5^a \quad \text{und} \\ x + 2p^2 &= 5^b \end{aligned}$$

mit $a < b$.

- Fall 1: $a > 0$. Somit gilt $5 \mid x - 2p^2$ und $5 \mid x + 2p^2$, damit auch

  $$5 \mid [(x + 2p^2) - (x - 2p^2)] = 4p^4.$$

  Da p eine Primzahl ist, bleibt nur $p = 5$. Einsetzen in den ursprünglichen Ausdruck ergibt

  $$5^5 + 4 \cdot 5^4 = 5^4 \cdot (5 + 4) = 5^4 \cdot 9 = (5^2 \cdot 3)^2 = 75^2.$$

  Damit ist $p = 5$ tatsächlich eine Lösung mit der zugehörigen Quadratzahl 75^2.

- Fall 2: $a = 0$. Demnach gilt $x - 2p^2 = 1$, also $x = 2p^2 + 1$. Eingesetzt in die oben faktorisiert Gleichung erhält man

  $$5^p = \underbrace{(x - 2p^2)}_{=1}(x + 2p^2) = x + 2p^2 = 2p^2 + 1 + 2p^2 = 4p^2 + 1,$$

  also $5^p = 4p^2 + 1$. Generell gilt jedoch $5^k > 4k^2 + 1$ für $k \geq 2$.

  Beweis durch Induktion:

  Induktionsbasis: $k = 2$: $5^2 = 25 > 4 \cdot 2^2 + 1 = 17$

  Induktionsschritt $k \to k+1$*:* Angenommen die Behauptung stimmt für ein k, also $5^k > 4k^2 + 1$ (Induktionsannahme). Dann gilt weiters

  $$4(k+1)^2 + 1 \overset{k+1<2k}{<} 4(2k)^2 + 1 < 4 \cdot (4k^2 + 1) \overset{\text{I.A.}}{<} 4 \cdot 5^k < 5^{k+1}$$

  wodurch die Ungleichung gezeigt ist und es damit keine weiteren Lösungen geben kann.

Aufgabe 5.

Bezeichnen wir mit P das Produkt aller Teiler, also

$$P = \prod_{j=1}^{42} (p_j^2 + 1).$$

Multipliziert man die Gleichung mit $n^2 P$ erhält man

$$n^2 \cdot \sum_{j=1}^{42} \underbrace{\frac{P}{p_j^2 + 1}}_{\in \mathbb{Z}} = P.$$

Nun machen wir eine Fallunterscheidung ob einer der Primzahlen 3 ist:

- Keine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_{42}$ ist 3:

  Somit ist $p_j^2 + 1 \equiv -1 \pmod 3$ und damit $P \equiv (-1)^{42} = 1 \pmod 3$.

  Jeder der Summanden
  $$\frac{P}{p_i^2 + 1} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{42} (p_i^2 + 1)$$
  ist damit kongruent zu $(-1)^{41} = -1 \pmod 3$. Damit ist die Summe dieser 42 Summanden durch 3 teilbar, jedoch die rechte Seite nicht. Ein Widerspruch!

- Eine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_{42}$ ist 3:

  Sei deshalb o.E. $p_1 = 3$. Somit ist $p_1^2 + 1 \equiv 10 \equiv 1 \pmod 3$. Für die übrigen Primzahlen gilt $p_i^2 + 1 \equiv -1 \pmod 3$.

  Der erste Summand
  $$\frac{P}{p_1^2 + 1} = \prod_{j=2}^{42} (p_j^2 + 1)$$
  ist damit kongruent zu $(-1)^{41} = -1 \pmod 3$. Für übrigen Summanden sind kongruent zu $(-1)^{41} \cdot 1 = 1 \pmod 3$, wodurch die Summe kongruent zu $40 \equiv 1 \pmod 3$ ist. Da $n^2 = 0, 1 \pmod 3$, ist die linke Seite der Gleichung kongruent zu 0 oder 1, die rechte Seite jedoch kongruent zu -1 modulo 3. Wieder ein Widerspruch!

Damit kann es keine Lösungen geben.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

aus [1, GWF 2001, Problem 1], bearbeitet von Jakob Steininger und vom MmF-Team

Aufgabe 2.

aus [1, GWF 2002, Problem 1], bearbeitet von Jakob Steininger und vom MmF-Team

Aufgabe 3.

aus [1, GWF 2001, Problem 4], bearbeitet von Jakob Steininger und vom MmF-Team

Aufgabe 4.

aus [1, GWF 2003, Problem 2], bearbeitet von Jakob Steininger und vom MmF-Team

Aufgabe 5.

aus [2, GWF 2011, Problem 1], bearbeitet von Jakob Steininger und vom MmF-Team

Literatur

[1] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2000–2008: Aufgaben und Lösungen.* Nova MD, 2018. Auflage 1.3.

[2] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2009–2018: Aufgaben und Lösungen.* Nova MD, 2019.