52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de" – Aufgabenblatt für den 13. November 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Nina Mitrovic zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 10. November 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Nina Mitrovic bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 13. November 2020 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Finde das Minimum des Ausdrucks

$$a^2 + 5b^2 + 8c^2 - 4ab - 4bc - 8c + 24$$

wobei a, b und c reelle Zahlen sind. Bestimme auch jene Zahlen, für die das Minimum angenommen wird.

Aufgabe 2. Der Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks ist 18 und seine Fläche ist 9. Wie lang ist die Hypotenuse dieses Dreiecks?

Aufgabe 3. Seien x und y reelle Zahlen mit $sin(x) + sin(y) = \frac{1}{3}$.
Beweise, dass

$$sin(3x) + sin(3y) \leq \frac{26}{27}$$

gilt.

Aufgabe 4. Finde alle natürlichen Zahlen a und b, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$a^3 - 3b = 15$$
$$b^2 - a = 13$$

Aufgabe 5. Seien a_0, $a_1, \ldots, a_{n-1}$ und a_n reelle Zahlen, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$a_0 + a_1x + ... + a_nx^n = (x+1)^3 \cdot (x+2)^3 \cdots (x+672)^3.$$

Bestimme den Wert der Summe

$$a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2016}.$$

Aufgabe 6. Seien x und y verschiedene reelle Zahlen mit $2xy + 1 \neq 0$. Seien die beiden Zahlen A und B definiert als

$$\begin{aligned} A &= \frac{6x^2y^2 + xy - 1}{2xy + 1} \qquad \text{und} \\ B &= \frac{x(x^2 - 1) - y(y^2 - 1)}{x - y}. \end{aligned}$$

Welche der beiden Zahlen ist grösser?

Aufgabe 7. Seien a, b und c reelle Zahlen mit $a \leq b \leq c$.
Beweise, dass die folgende Ungleichung gilt:

$$c^2 - b^2 + a^2 \geq (c - b + a)^2.$$

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Forme den Ausdruck um und schreibe ihn als Summe von Quadraten.

Aufgabe 2. Satz des Pythagoras

Aufgabe 3. Nutze die Formel der trigonometrische Funktion des dreifachen Winkels: $sin(3x) = 3sin(x) - 4sin(x)^3$

Aufgabe 4. Beweise, dass $a \leq 3$ gelten muss.

Aufgabe 5. Bezeichne den gegebenen Ausdruck mit $P(x)$ und betrachte $P(1)$, $P(0)$ und $P(-1)$.

Aufgabe 6. Faktorisiere die Ausdücke in den Zählern und betrachte $A - B$.

Aufgabe 7. Forme den Ausdruck um.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Wir können den Ausdruck wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} a^2+5b^2+8c^2-4ab-4bc-8c+24 &= (a^2-4ab+4b^2)+b^2+8c^2-4bc-8c+24 \\ &= (a-2b)^2+b^2+8c^2-4bc-8c+24 \\ &= (a-2b)^2+(b-2c)^2+(2c-2)^2+20 \end{aligned}$$

Da Quadrate immer ≥ 0 sind, wird das Minimum genau dann angenommen, wenn alle Quadrate gleichzeitig 0 sind. Um das Minimum zu erhalten muss also folgendes gelten: $a-2b=b-2c=2c-2=0$. Man sieht einfach, dass das für $a=4$, $b=2$ und $c=1$ eintritt. Daraus folgt, dass das Minimum 20 ist.

Aufgabe 2.

Seien a, b und c die Längen der Seiten des Dreiecks, dabei sei c sei die Länge der Hypotenuse.
Da $a+b+c=18$ ist, gilt $(a+b)^2=(18-c)^2=18^2-36c+c^2$.
Der Satz des Pythagoras besagt, dass $a^2+b^2=c^2$ gilt. Daraus folgt, dass $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=c^2+2ab$ ist. Wenn wir jetzt die beiden Gleichungen für $(a+b)^2$ zusammensetzen, bekommen wir $2ab=18^2-36c$. Da die Fläche des Dreiecks $9=\frac{ab}{2}$ ist, gilt: $18^2-36c=2ab=36$. Wir schließen, dass $c=8$ ist.

Aufgabe 3.

Wir benutzen die Formel für die Sinus-Funktion eines dreifachen Winkels: $sin(3x)=3sin(x)-4sin(x)^3$. Demnach gilt auch

$$sin(3x)+sin(3y)=3(sin(x)+sin(y))-4(sin(x)^3+sin(y)^3). \tag{1}$$

Wir bezeichnen nun $sin(x)$ mit a und $sin(y)$ mit b. Wenn wir die Identität $a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ nutzen und das zusammen mit $b=\frac{1}{3}-a$ für die rechte Seite der Gleichung (1) einsetzen, erhalten wir:
$3(a+b)-4(a^3+b^3)=1-4(a^2-\frac{1}{3}\cdot a+\frac{1}{27})$.
Wir müssen nun nur noch die folgende Ungleichung beweisen:

$$1-4(a^2-\frac{1}{3}a+\frac{1}{27}\leq\frac{26}{27}.$$

Diese ist äquivalent zu $36a^2-12a+1\geq 0$.
Aus $36a^2-12a+1=(6a-1)^2\geq 0$ folgt die Behauptung.

Aufgabe 4.

Addieren wir die beiden Gleichungen, so erhalten wir
$a^3-a+b^2-3b=28$.

Für $a \geq 4$ gilt $a^3 - a \geq 64$. Da aber $b^2 - 3b \geq -2$ für alle natürlichen Zahlen b erfüllt ist, folgt daraus, dass $a \leq 3$ gelten muss.
Wir setzen nun der Reihe nach die verbleibenden Möglichkeiten für die Zahl a ein.
Für $a = 1$, erhalten wir die quadratische Gleichung $b^2 - 3b = 28$, die keine natürliche Lösung hat.
Für $a = 2$ erhalten wir die quadratische Gleichung $b^2 - 3b = 22$, die keine natürliche Lösung hat.
Für $a = 3$ erhalten wir die quadratische Gleichung $b^2 - 3b = 4$, deren einzige natürliche Lösung $b = 4$ ist.
Man kann leicht überprufen, dass das Paar (3, 4) eine Lösung des Systems ist.

Aufgabe 5.

Wir bezeichnen den gegebenen Ausdruck $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ mit P(x). Werten wir dieses Polynom $P(x)$ an den Stellen $x = 1$ und $x = -1$ aus, so erhalten wir die beiden Gleichungen
$P(1) = a_0 + a_1 + ... + a_{2015} + a_{2016}$ und
$P(-1) = a_0 - a_1 + ... - a_{2015} + a_{2016}$.
Summieren wir die beiden Gleichungen, so bleiben nur die Folgenglieder mit geraden Indizes übrig:
$P(1) + P(-1) = 2a_0 + 2a_2 + ... + 2a_{2016}$
Da $a_0 = P(0)$ ist, gilt

$$a_2 + a_4 + .. + a_{2016} = \frac{1}{2}(P(1) + P(-1)) - P(0).$$

Aus der gegebenen Gleichung für $P(x)$ können wir die Werte an den drei Stellen berechnen:
$P(0) = 1^3 \cdot 2^3 \cdots 672^3 = (672!)^3$,
$P(1) = 2^3 \cdot 3^3 \cdots 673^3 = (673!)^3$ und
$P(-1) = 0$.
Daraus folgt, dass der gesuchte Wert

$$a_2 + a_4 + ... + a_{2016} = \frac{1}{2}(P(1) + P(-1)) - P(0) = \frac{1}{2}(673!)^3 - (672!)^3$$

ist.
Aufgabe 6.

Wir vereinfachen die beiden Ausdrücke:

$$A = \frac{6x^2y^2 + 3xy - 2xy - 1}{2xy + 1} = \frac{3xy(2xy + 1) - (2xy + 1)}{2xy + 1} = 3xy - 1B = \frac{x(x^2 - 1) - y(y^2 - 1)}{x - y} = \frac{(x^3 - y^3) - (x - y)}{x - y} =$$

Wir betrachten die Differenz $B - A$:

$$B - A = (x^2 + xy + y^2 - 1) - (3xy - 1) = (x - y)^2 \geq 0.$$

Daraus folgt, dass $A < B$ ist.
Aufgabe 7.

Durch Äquivalenzumformungen wird die Ungleichung wie folgt übergeführt:

$$\begin{aligned} &c^2 - (c - b + a)^2 + a^2 - b^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow &(b - a)(2c - b + a) + (a - b)(a + b) \geq 0 \\ \Leftrightarrow &(b - a)(2c - b + a - a - a) \geq 0 \\ \Leftrightarrow &2(b - a)(c - b) \geq 0. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung gilt, weil nach Voraussetzung $a \leq b$ und $b \leq c$ sind.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 6.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Literatur

[1] Kroatischer Regionalwettbewerb Natjecanja iz matematike u RH. `http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm`. (aufgerufen am 16.11.2020).