52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen I-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 27. Oktober 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Jakob Steininger zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 25. Oktober 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Jakob Steininger bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 27. Oktober 2020 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Man zeige: Ist $2^m - 1$ eine Primzahl und $m > 1$, dann ist m auch eine Primzahl.

Aufgabe 2. Man zeige: Ist $2^m + 1$ eine Primzahl, so ist m eine Zweierpotenz.

Aufgabe 3. Welche positive ganzen Zahlen lassen sich als Differenz zweier Quadratzahlen schreiben?

Aufgabe 4. Finde die größte ganze Zahl a, sodass $a|p^4 - 1$ für jede Primzahl $p > 5$.

Aufgabe 5. Zeige, dass

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \cdot k^2}{k+1} = -\frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{3} - \frac{3^2}{4} \pm \cdots + \frac{(2n)^2}{2n+1}$$

für kein n eine ganze Zahl ist.

Aufgabe 6. Man zeige: Es gibt unendlich viele Vielfache von 2005, die (ohne führende Nullen) alle 10 Ziffern 0, 1, 2, ..., 8 und 9 gleich oft enthalten.

Aufgabe 7. Finde alle ganzzahligen Lösungen (a, b) von

$$3a - 5b = 7 + 9ab.$$

Aufgabe 8. Finde alle positiven ganzen Zahlen a, b, c mit

$$\mathrm{kgV}(a, b, c) = a + b + c.$$

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Benutze die Regel $a-1|a^n-1$, die man beispielsweise mit der geometrischen Summenformel beweisen kann.

Aufgabe 2: Benutze die Regel $a+1|a^n+1$ für ungerade n, die man beispielsweise mit der geometrischen Summenformel beweisen kann.

Aufgabe 3: Experimentiere zuerst mit der Differenz aufeinander folgender Quadratzahlen, dann mit Quadratzahlen die 2 „Schritte“ voneinander entfernt sind. Beweise schließlich, dass man so alle möglichen Differenzen gefunden hat.

Aufgabe 4: Stelle zuerst mit Hilfe der ersten beiden relevanten Primzahlen $p=7$ und $p=11$ eine Vermutung auf.

Aufgabe 5: Schreibe die Brüche zuerst als Summe von ganzen Zahlen und vereinfachten Brüchen.

Aufgabe 6: Betrachte

$$A_n := \underbrace{1234567890\ldots1234567890}_{n\text{ - mal}} = 1234567890 \cdot (1+10^{10}+10^{20}+\ldots+10^{10(n-1)})$$

und anschließend die Differenzen $A_n - A_m$.

Aufgabe 7: Forme nach b um und zeige, dass der entstehende Bruch zu nahe an $1/3$ liegt um eine ganze Zahl zu sein, wenn $|a|$ groß ist.

Aufgabe 8: Zeige zunächst, dass es genügt den Fall $\mathrm{ggT}(a,b,c)=1$ zu betrachten. Nachdem man o.B.d.A $a \leq b \leq c$ einführt erhält man schnell $\mathrm{kgV}(a,b,c)=2c$. Wieso?

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Jakob Steininger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Die geometrische Summenformel besagt

$$1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1},$$

also durch Umformen

$$(1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{n-1}) \cdot (a - 1) = a^n - 1.$$

Deshalb gilt für alle $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

$$a - 1 | a^n - 1.$$

Sei nun m keine Primzahl, also $m = k \cdot l$ mit $k, l \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Setzt man $a = 2^k$ und $n = l$ erhält man

$$2^k - 1 | (2^k)^l - 1 = 2^m - 1.$$

Da $m > k \geq 2$ ist $2^k - 1$ ein echter Teiler von $2^m - 1$ und damit $2^m - 1$ keine Primzahl. Also kann $2^m - 1$ nur dann eine Primzahl sein, wenn m selbst eine Primzahl ist.

Aufgabe 2.

Wie in der vorigen Lösung zeigen wir

$$a - 1 | a^n - 1$$

für alle ganzen Zahlen a und $n \in \mathbb{N}$. Ersetzt man a mit $-a$ ergibt sich

$$\begin{aligned} & - a - 1 | a^n \cdot (-1)^n - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & a + 1 | (-a)^n - 1. \end{aligned}$$

Deshalb gilt für **ungerade** n

$$\begin{aligned} & a + 1 | a^n \cdot (-1) - 1 = -a^n - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & a + 1 | a^n + 1. \end{aligned}$$

Sei nun m keine Zweierpotenz. Deshalb enthält m einen ungeraden Faktor l, also $m = k \cdot l$ mit $l \in \mathbb{N}^u$. Durch die vorige Formel mit $a = 2^k$ gilt deshalb

$$2^k + 1 | (2^k)^l + 1 = 2^m + 1.$$

Somit ist $2^m + 1$ keine Primzahl und kann nur eine Primzahl sein, wenn m eine Zweierpotenz ist.

Aufgabe 3.

Wir suchen also positive ganze Zahlen n für die es $a, b \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$n = a^2 - b^2.$$

Probieren wir zunächst $b = a - 1$. Man erhält

$$n = a^2 - (a-1)^2 = a^2 - (a^2 - 2a + 1) = 2a - 1.$$

Somit lässt sich jede ungerade Zahl als Differenz darstellen. Weiters probieren wir $b = a - 2$:

$$n = a^2 - (a-2)^2 = a^2 - (a^2 - 4a + 4) = 4a - 4.$$

Dadurch ist es möglich jedes Vielfaches von 4 als Differenz von zwei Quadratzahlen zu schreiben. Wir beweisen nun, dass keine weiteren Zahlen n in dieser Form geschrieben werden können. Somit gilt es zu zeigen, dass

$$n = a^2 - b^2$$

keine Lösung besitzt, wenn $n \equiv 2 \pmod 4$ ist. Tatsächlich gilt $a^2, b^2 \in \{0, 1\} \pmod 4$, wodurch sich die Restklasse $2 \pmod 4$ tatsächlich nicht als Differenz schreiben lässt.
Die Lösungsmenge ist demnach $\{n \in \mathbb{N} \colon 4 \nmid n\}$.

Aufgabe 4.

Zunächst erhält man für $p = 7$ und $p = 11$

$$a | 7^4 - 1 = 2400 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2$$

und

$$a | 11^4 - 1 = 14640 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 61,$$

zusammen also $a | 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$. Wir wollen nun zeigen, dass tatsächlich $a = 240$ gilt. Faktorisieren ergibt

$$p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1).$$

- Aus $2 \nmid p$ folgt $p^2 \equiv 1 \pmod 8$, damit $8 | p^2 - 1$ und ebenfalls $2 | p^2 + 1$, somit $2^4 | p^4 - 1$.
- Wegen $3 \nmid p$ gilt $p^2 \equiv 1 \pmod 3$ und damit $3 | p^2 - 1$.
- Da $5 \nmid p$ gilt $5 | p^4 - 1$ wie man in einer modulo 5 Tabelle nachrechnen kann.

Zusammen gilt $2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240 | p^4 - 1$ wie gewünscht.

Aufgabe 5.

Die Summe lässt sich vereinfachen zu

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \cdot k^2}{k+1} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \cdot (k^2 - 1)}{k+1} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \cdot (k-1) + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1}.
\end{aligned}$$

Somit ist der Ausdruck genau dann ganzzahlig, wenn

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots + \frac{1}{2n+1}$$

eine ganze Zahl ist. Wir wollen im nächsten Schritt zeigen, dass dieser Ausdruck für jedes n zwischen -1 und 0 liegt und somit nicht ganzzahlig sein kann. Durch geeignetes Zusammenfassen erhält man

$$\underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{<0} \underbrace{-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}}_{<0} - \ldots \underbrace{-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}}_{<0} < 0.$$

Andererseits gilt

$$-\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}_{>0} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}}_{>0} + \frac{1}{2n+1} > -\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1} > -1.$$

Damit folgt die Behauptung.

Aufgabe 6.

Wir betrachten Zahlen der Gestalt

$$A_n := \underbrace{1234567890\ldots1234567890}_{n\text{ - mal}} = 1234567890 \cdot (1 + 10^{10} + 10^{20} + \cdots + 10^{10(n-1)}).$$

Es gilt $2005 = 5 \cdot 401$ und offensichtlich ist jedes A_n bereits durch 5 teilbar. Es bleibt daher zu zeigen, dass es unendlich viele n gibt, sodass A_n durch 401 teilbar ist.
Da die Folge $(A_0, A_1, A_2, ...)$ unendlich lang ist, gibt es unendlich viele A_i die in der selben Restklasse modulo 401 liegen. Wir betrachten ab jetzt nur noch solche A_i, die in dieser Restklasse liegen.
Sei A_m die kleinste solche Zahl und A_j eine weitere. Da die beiden in der selben Restklasse mod 401 liegen, ist $A_j - A_m$ durch 401 teilbar. Des weiteren ist $A_j - A_m$ von der Gestalt

$$1234567890\ldots1234567890000\ldots0.$$

Lässt man alle bis auf den letzten Nuller weg, erhält man eine Zahl, die immer noch durch 401 teilbar ist, ebenso durch 5 da sie auf eine Null endet und jede Ziffer gleich oft benutzt. Da solche Zahlen für unendlich viele A_j in der Restklasse von A_m finden kann, erhält man unendlich viele Zahlen mit der gewünschten Eigenschaft.

Aufgabe 7.

Umformen nach b ergibt

$$b = \frac{3a-7}{9a+5}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass der Bruch „nahe“ an $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ liegt wenn $|a|$ „groß“ ist und somit nicht ganzzahlig ist. Es gilt

$$\begin{aligned} b = \frac{3a-7}{9a+5} &= \frac{3a+\frac{5}{3}}{9a+5} + \frac{-\frac{5}{3}-7}{9a+5} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{5+21}{27a+15} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{26}{27a+15}. \end{aligned}$$

Für $|a| \geq 4$ gilt nach der umgekehrten Dreiecksungleichung $|27a+15| \geq 27|a|-15 \geq 27\cdot 4-15 = 93$ womit $|\frac{26}{27a+15}| = \frac{26}{|27a+15|} \leq \frac{26}{93} < \frac{1}{3}$ gilt und b keine ganze Zahl sein kann.
Sei deshalb nun $a \in \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$. Dies liefert für b die 7 Zahlen

$$\frac{8}{11},\ 1,\ \frac{5}{2},\ \frac{-7}{5},\ \frac{-2}{7},\ \frac{-1}{23},\ \frac{1}{16}.$$

Somit liefert nur $a = -2$ eine ganze Zahl für b, wodurch man das einzige Lösungspaar $(a, b) = (-2,\ 1)$ erhält.

Aufgabe 8.

Zunächst, sei (a, b, c) und d eine positive ganze Zahl. Dann gilt

$$\begin{aligned} &a + b + c = \text{kgV}(a, b, c) \\ \Leftrightarrow\ &ad + bd + cd = d \cdot \text{kgV}(a, b, c) = \text{kgV}(ad, bd, cd). \end{aligned}$$

Somit ist (ad, bd, cd) genau dann eine Lösung, wenn (a, b, c) eine Lösung ist. Sei deshalb o.B.d.A. $\text{ggT}(a, b, c) = 1$.
Es gilt weiter, dass a, b, c paarweise teilerfremd sind, also

$$\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a, c) = \text{ggT}(b, c) = 1.$$

(Sei k ein Teiler von 2 der Zahlen a, b, c, dann teilt k auch $\text{kgV}(a, b, c)$ und wegen $a + b + c = \text{kgV}(a, b, c)$ auch die dritte Zahl. Ein Widerspruch zu $\text{ggT}(a, b, c) = 1$.) Somit gilt ebenfalls

$$\text{kgV}(a, b, c) = abc$$

Sei weiters o.B.d.A. $a \leq b \leq c$. Es können nicht alle Zahlen gleich groß sein (also $a = b = c$), da sonst

$$3a = a + a + a \neq \text{kgV}(a, a, a) = a.$$

Deshalb gilt $a + b + c < 3c$. Da $a + b + c =\text{kgV}(a, b, c)$ gleichzeitig ein Vielfaches von c ist, muss gelten

$$\text{kgV}(a, b, c) = 2c$$

($\text{kgV}(a, b, c) = c$ ist nicht möglich, da sonst $a + b = 0$ gilt.) Aus $\text{kgV}(a, b, c) = 2c$ folgt weiter

$$abc = \text{kgV}(a, b, c) = 2c \Rightarrow ab = 2$$

und da $a \leq b$ gilt $a = 1$ und $b = 2$. Letztendlich folgt aus

$$a + b + c = \text{kgV}(a, b, c) = 2c \Rightarrow a + b = c$$

dass $c = 3$ gilt. Wir erhalten somit die Lösungsmenge

$$\{(d, 2d, 3d), (d, 3d, 2d), (2d, d, 3d), (2d, 3d, d), (3d, d, 2d), (3d, 2d, d) \mid d \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

Folklore, siehe den Wikipedia Eintrag zu Mersenne-Zahlen. Formuliert von Jakob Steininger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.

Folklore, siehe z.B. den Wikipedia Eintrag zu Fermat-Zahlen. Formuliert von Jakob Steininger, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 3.

bekanntes Resultat, formuliert von Jakob Steiniger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.

bekanntes Resultat, formuliert von Jakob Steiniger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.

bekanntes Resultat, formuliert von Jakob Steiniger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 6.

aus [1, BWFZ 2005, Aufgabe 1], bearbeitet von Jakob Steininger und vom MmF-Team

Aufgabe 7.

von Jakob Steiniger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 8.

aus [1, BWF 2005, Aufgabe 1], bearbeitet von Jakob Steininger und vom MmF-Team

Literatur

[1] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2000–2008: Aufgaben und Lösungen.* Nova MD, 2018. Auflage 1.3.