52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen I-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 4. Dezember 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Jakob Steininger zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 2. Dezember 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Jakob Steininger bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 4. Dezember 2020 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Man zeige, dass es keine ganzen Zahlen x, y gibt, mit

$$x^3 + 6y^3 = 2020.$$

Aufgabe 2. Beweise, dass für jedes ungerade natürlich n

$$24 | n^n - n$$

gilt.

Aufgabe 3. Zeige, dass die Gleichung

$$4a(a+1) = b(b+3)$$

keine Lösung in den positiven ganzen Zahlen besitzt.

Aufgabe 4. Zeige, dass die Zahl $(a_n\ a_{n-1}\ \dots\ a_0)_{10}$ geschrieben im Dezimalsystem genau dann durch 7 teilbar ist, wenn

$$7 | (a_n\ a_{n-1}\ \dots\ a_1)_{10} + 5 \cdot a_0$$

gilt. (Beispielsweise gilt $7|364$, da $7|36 + 5 \cdot 4 = 56$.)

Aufgabe 5. Man bestimmt die letzten beiden Ziffern von 2019^{2021}.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Finde eine geeignete Primzahl p und betrachte die Gleichung modulo dieser Primzahl.

Aufgabe 2: Benutze $n^n - n = n(n^{n-1} - 1)$ und zeige, dass der Ausdruck sowohl durch 3 als auch durch 8 teilbar ist.

Aufgabe 3: Addiere 1 auf beiden Seiten und schreibe die linke Seite anschließend als vollständiges Quadrat...

Aufgabe 4: Schreibe die Zahl $(a_n\ a_{n-1}\ \ldots\ a_0)_{10}$ als $(a_n\ a_{n-1}\ \ldots\ a_1)_{10} \cdot 10 + a_0$ und multipliziere mit 5.

Aufgabe 5: Wir wollen also $2019^{2021} \pmod{100}$ bestimmen. Teile die Aufgabe in modulo 4 und modulo 25 auf. Finde anschließend (mit möglichst geringem Rechenaufwand) eine kleine Zahl a, sodass $2019^a \equiv 1 \pmod{25}$ gilt...

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Jakob Steininger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Modulo 7 lässt sich die Angabe schreiben als

$$x^3 - y^3 \equiv 4 \pmod 7.$$

Diese Gleichung hat keine Lösungen, da x^3, $y^3 \in \{0,\ 1,\ -1\}$ modulo 7 gilt.

Aufgabe 2.

Wir zeigen zuerst die Teilbarkeit durch 3 und anschließend durch 8, wodurch die Behauptung folgt.

- Teilbarkeit durch 3: Zunächst, wenn $3|n$ dann folgt bereits $3|n^n - n$. Andererseits, wenn $3 \nmid n$ dann ist n^{n-1} eine nicht durch 3 teilbare Quadratzahl (da der Exponent gerade ist) und damit kongruent 1 modulo 3. Somit gilt

$$3|n^{n-1} - 1 \Rightarrow 3|n^n - n = n(n^{n-1} - 1).$$

- Teilbarkeit durch 8: n^{n-1} ist eine ungerade Quadratzahl und dadurch kongruent 1 modulo 8. Deshalb gilt

$$8|n^{n-1} - 1 \Rightarrow 8|n^n - n = n(n^{n-1} - 1).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 3.

Addiert man 1 auf beiden Seiten erhält man

$$4a^2 + 4a + 1 = b^2 + 3b + 1.$$

Die linke Seite lässt sich nun schreiben als $(2a+1)^2$, womit b^2+3b+1 eine Quadratzahl sein muss. Es gilt jedoch

$$\begin{aligned} b^2 + 3b + 1 &> b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2 \\ b^2 + 3b + 1 &< b^2 + 4b + 4 = (b+2)^2 \end{aligned}$$

wodurch b^2+3b+1 zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen liegt und damit selbst keine Quadratzahl sein kann. Somit kann es keine Lösung der Gleichung geben.

Aufgabe 4.

Es gilt

$$
\begin{aligned}
& 7|(a_n\, a_{n-1}\, \ldots\, a_0)_{10} \\
\Leftrightarrow\ & 7|(a_n\, a_{n-1}\, \ldots\, a_1)_{10} \cdot 10 + a_0 \\
\Leftrightarrow\ & 7|(a_n\, a_{n-1}\, \ldots\, a_1)_{10} \cdot 50 + 5a_0 \\
\Leftrightarrow\ & 7|(a_n\, a_{n-1}\, \ldots\, a_1)_{10} \cdot (49+1) + 5a_0 \\
\Leftrightarrow\ & 7|(a_n\, a_{n-1}\, \ldots\, a_1)_{10} + 5a_0.
\end{aligned}
$$

Damit ist diese Teibarkeitsregel durch 7 gezeigt.

Aufgabe 5.

Wir wollen also $2019^{2021} \equiv 19^{2021} \pmod{100}$ bestimmen. Wir betrachten getrennt voneinander die Zahl modulo 4 und 25.

- Modulo 4: Es gilt
$$2019^{2021} \equiv (-1)^{2021} \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4}.$$
Somit lässt die gesuchte Zahl den Rest 3 bei Division durch 4. Es kommen also nur noch die Zahlen 3, 7, 11, $15, \ldots, 95$ und 99 in Frage.

- Modulo 25: Es gilt $2019 \equiv 19 \equiv -6 \pmod{25}$ wodurch wir $(-6)^{2021}$ modulo 25 bestimmen wollen. Wir werden zunächst damit starten, eine möglichst kleine Zahl a zu finden, sodass $6^a \equiv \pm 1$ modulo 25 ist, welche uns für die restliche Lösung helfen wird:
$$
\begin{aligned}
6^1 &\equiv 6 && \pmod{25} \\
6^2 &\equiv 6 \cdot 6 \equiv 36 \equiv 11 && \pmod{25} \\
6^3 &\equiv 6 \cdot 6^2 \equiv 6 \cdot 11 \equiv 66 \equiv 16 && \pmod{25} \\
6^4 &\equiv 6 \cdot 6^3 \equiv 6 \cdot 16 \equiv 96 \equiv 21 && \pmod{25} \\
6^5 &\equiv 6 \cdot 6^4 \equiv 6 \cdot 21 \equiv 126 \equiv 1 && \pmod{25}
\end{aligned}
$$
Somit ist
$$19^5 \equiv (-6)^5 \equiv (-1)^5 \cdot 6^5 \equiv -1 \pmod{25}$$
und damit
$$19^{10} \equiv (19^5)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{25}.$$
Deshalb ist
$$19^{2021} \equiv 19^{2020} \cdot 19 \equiv (19^{10})^{202} \cdot 19 \equiv 1^{202} \cdot 19 \equiv 19 \pmod{25}.$$
Somit können die letzten beiden Ziffern nur 19, 44, 69 oder 94 sein.

Die einzige Zahl, die sowohl bei Betrachtung modulo 4 als auch 25 erlaubt ist, ist 19. Somit endet die Zahl 2019^{2021} auf 19.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

von Jakob Steiniger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.

aus [1, LWA 2001, Problem 1], bearbeitet von Jakob Steininger und vom MmF-Team

Aufgabe 3.

aus [1, LWA 2005, Problem 1], bearbeitet von Jakob Steininger und vom MmF-Team

Aufgabe 4.

Folklore

Aufgabe 5.

von Jakob Steiniger, bearbeitet vom MmF-Team

Literatur

[1] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2000–2008: Aufgaben und Lösungen.* Nova MD, 2018. Auflage 1.3.