52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 11. Dezember 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Nina Mitrovic zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 8. Dezember 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Nina Mitrovic bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 11. Dezember 2020 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Wenn man die ersten zwei Ziffern einer positiven ganzen Zahl löscht, erhält man eine Zahl, die 73 Mal kleiner ist als die ursprüngliche Zahl.
Bestimme die beiden kleinsten Zahlen mit dieser Eigenschaft.

Aufgabe 2. Beweise, dass die Gleichung

$$x^2 = 2y^2 - 75y + 5$$

keine ganzzahligen Lösungen hat.

Aufgabe 3. Sei n eine zusammengesetzte natürliche Zahl und d_1, d_2, $\ldots$, d_{m-1} und d_m ihre Teiler. Beweise, dass

$$\frac{2}{log(n^m)} \sum log(d_k) = 1$$

gilt.

Aufgabe 4. Beweise, dass

$$\cos\left(\frac{\pi}{2 \cdot 3^n}\right)$$

für alle natürlichen Zahlen n irrational ist

Aufgabe 5. Beweise, dass die Gleichung

$$3x^4 + 2013 = 25y^2 - 24x^2$$

keine ganzzahligen Lösungen hat.

Aufgabe 6. Finde alle natürlichen Zahlen n, für die gilt:

$$\lfloor 1^{1/4} \rfloor + \lfloor 2^{1/4} \rfloor + \ldots + \lfloor n^{1/4} \rfloor = \frac{3}{2}n + 1.$$

Aufgabe 7. Beweise, dass die Zahl bestehend aus 2187-Mal der Ziffer 1 durch 2187 teilbar ist.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Betrachte die Gleichung modulo 5 und 25

Aufgabe 2. Quadratische Reste modulo 5

Aufgabe 3. Gruppiere d_i in Paare, deren Produkt gleich n ist

Aufgabe 4. Beweis durch Widerspruch: Betrachte ein minimales n für das der Ausdruck rational ist.

Aufgabe 5. Finde einen geeigneten Modul, der zum Widerspruch führt.

Aufgabe 6. Beweise, dass $n \leq 81$ sein muss.

Aufgabe 7. Nutze die Primfaktorzerlegung, $2187 = 3^7$ und führe einen Beweis mit vollständiger Induktion.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Seien ab die ersten zwei Ziffern, und x der Rest der betrachteten Zahl, wenn die ersten beiden Ziffern gelöscht worden sind. Sei k die Anzahl der Ziffern von x.
Dann kann man die Voraussetzung so interpretieren:

$$n = 10^k \cdot ab + x = 73x$$

$$10^k \cdot ab = 72x$$

Versuchen wir zunächst, eine einstellige Lösung für x zu finden. Dann haben wir:

$$10 \cdot ab = 72x.$$

Da die linke Seite durch 5 teilbar ist, gilt $x = 5$.
Aus $10 \cdot ab = 360$ folgt $ab = 36$ und die gesuchte Zahl ist 365.
Sei x jetzt eine zweistellige Zahl, dann gilt

$$100 \cdot ab = 72x,$$

d.h. $25 \cdot ab = 18x$. Da x durch 25 teilbar sein muss, gilt $ab = 18$.
Die kleinste Lösung bekommen wir für $ab = 18$, dann ist $x = 25$ und die gesuchte Zahl ist 1825.

Aufgabe 2.

Betrachten wir die Gleichung modulo 5. Wir bemerken, dass eine Quadratzahl n^2 modulo 5 die drei Reste 0, 1 und 4 haben kann (diese nennt man quadratische Reste modulo 5).
Daraus folgt, dass die linke Seite der Gleichung einen von diesen Resten modulo 5 hat.
Die rechte Seite ergibt $2y^2$ modulo 5, da die restlichen Terme alle durch 5 teilbar sind. Wir benutzen wieder quadratische Reste modulo 5 um zu schließen, dass $2y^2$ nur die Reste 0, 2 oder 3 bei Division durch 5 haben kann.
Da die linke und rechte Seite einer Gleichung den gleichen Rest modulo 5 haben müssen, müssen sowohl x als auch y durch 5 teilbar sein.
In diesem Fall, ist die linke Seite durch 25 teilbar, die rechte jedoch nicht, und die Gleichung hat somit keine ganzzahligen Lösungen.

Aufgabe 3.

Wir gruppieren die Teiler von n in Paare, deren Produkte gleich n sind. O.b.d.A. gelte

$$1 = d_1 < d_2 < ... < d_m = n.$$

Wir erhalten folgende Gleichungen:

$$d_1 \cdot d_m = n, \quad d_2 \cdot d_{m-1} = n, \quad \dots \quad d_m \cdot d_1 = n$$

Multiplikation wir all diese Gleichungen miteinander, so erhalten wir:

$$d_1^2 \cdot d_2^2 \cdots d_m^2 = n^m$$

Daraus folgt

$$2\sum_{k=1}^{m} log(d_k) = 2log(d_1 \cdot d_2 \cdots d_m) = log(d_1^2 \cdot d_2^2 \cdots d_m^2) = log(n^m)$$

Aufgabe 4.

Es gilt die trigonometrische Formel:

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

Für $\frac{\pi}{2\cdot 3^n}$ gilt also:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 3^{n-1}}\right) = 4\cos^3\left(\frac{\pi}{2\cdot 3^n}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 3^n}\right).$$

Für $n = 1$ ist, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}/2$ irrational.
Sei n die kleinste natütrliche Zahl, für die $\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 3^n}\right)$ rational ist.
Dann gilt aber, dass $\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 3^{n-1}}\right)$ auch rational ist, was ein Widerspruch zur Minimalität von n ist.

Aufgabe 5.

Bringen wir alle Terme auf eine Seite, so erhalten wir die Gleichung

$$3x^4 + 24x^2 - 25y^2 + 2013 = 0.$$

Da alle Terme außer $25y^2$ durch 3 teilbar sind, muss y auch durch 3 teilbar sein. Sei $y = 3y_1$. Wir können beide Seiten durch 3 teilen und erhalten

$$x^4 + 8x^2 - 75y_1^2 + 671 = 0.$$

Wir sehen, dass x nicht durch 3 teilbar sein kann, da nur 671 nicht durch 3 teilbar ist. Wenn $x \equiv 1 \pmod 3$ oder $x \equiv 2 \pmod 3$ ist, dann gilt $x^2 \equiv x^4 \equiv 1 \pmod 3$. Daraus folgt, dass $x^4 + 8x^2$ durch 3 teilbar ist. Aber dann müsste auch 671 durch 3 teilbar sein. Wir schließen, dass die Gleichung keine ganzzahligen Lösungen hat.

Aufgabe 6.

Sei

$$a_n = \lfloor 1^{1/4} \rfloor + \lfloor 2^{1/4} \rfloor + \ldots + \lfloor n^{1/4} \rfloor.$$

Gesucht ist ein n mit $a_n = \frac{3}{2}n + 1$.
Wir sehen, dass $\lfloor k^{1/4} \rfloor = 1$ für $k < 16$. Deswegen gilt $a_n = n$ für $n \leq 15$, und keiner dieser Werte erfüllt somit die Gleichung.
Für $16 \leq n \leq 80$ gilt $a_n = 1 + 1 + \ldots + 1 + 2 + \ldots + 2 = 15 + 2 \cdot (n - 15) = 2n - 15$.
Damit die Gleichung für $16 \geq n \geq 80$ gilt, muss $2n - 15 = \frac{3}{2}n + 1$ gelten. Die einzige Lösung dieser Gleichung ist $n = 32$.
Größere Lösungen gibt es nicht: Wenn $n > 80$ um 1 steigt, steigt der Wert der linke Seite um mindestens 3, und der Wert der rechten Seite um $\frac{3}{2}$, d.h. die lenkte Seite bleibt größer als rechte.

Aufgabe 7.

Wir sehen, dass $2187 = 3^7$. Wir beweisen die folgende Behauptung mittels vollständiger Induktion:
Induktionsannahme: Die Zahl, die aus 3^n-Mal der Ziffer 1 besteht, ist durch 3^n teilbar.

Induktionsbasis: Für $n = 1$ gilt die Behauptung, da $111 = 3 \cdot 37$
Induktionsschluss: Wir nehmen an, dass die Behauptung gilt, d.h. $1111\ldots11$ bestehend aus 3^n Ziffern ist durch 3^n teilbar.
Wir wollen beweisen, dass die Aussage nun auch für $n+1$ gilt.
Es gilt:

$$111\ldots11 = \underbrace{111\ldots11}_{3^n \text{ mal } 1} \cdot 1000\ldots010\ldots01$$

Der erste Faktor ist wegen der Annahme durch 3^n teilbar, und die Ziffernsumme des zweiten Faktors ist gleich 3, d.h. der zweite Faktor ist auch durch 3 teilbar.
Nach vollständiger Induktion gilt die Behauptung demnach für jedes $n \geq 1$.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 6.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Literatur

[1] Kroatischer Regionalwettbewerb Natjecanja iz matematike u RH. `http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm`. (aufgerufen am 15.12.2020).