52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen I-II-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 18. Dezember 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Nina Mitrovic zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 15. Dezember 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Nina Mitrovic bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 18. Dezember 2020 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Genau eine der beiden Zahlen x^2 und $(1-x)^2$ ist kleiner als 1.
Beweise, dass $0 \leq x^2 - x \leq 2$ gilt.

Aufgabe 2. Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$(a+1)(1+x+x^2) = (a+1)(1+x^2+x^4)$$

in Abhängigkeit vom reellen Parameter a.

Aufgabe 3. Beweise, dass es keine rationale Zahl x gibt, mit

$$\{x^2\} + \{x\} = 1.$$

Finde mindestens eine solche Zahl.
Anmerkung: $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$, wobei mit $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x bezeichnet wird.

Aufgabe 4. Bestimme die Summe:

$$\sum_{n=1}^{2012} \tan(n) \cdot \tan(n+1).$$

Aufgabe 5. Seien p und q reelle Zahlen. Der Graph der Funktion $f(x) = x^2 + px + q$ schneidet die Achsen in 3 verschiedenen Punkten A, B und C.
Beweise, dass der Umkreis des Dreiecks ABC die y-Achse in einem Punkt der Form $(a, 1)$ schneidet.

Aufgabe 6. Seien a, b und c die Längen der Seiten eines Dreiecks mit Fläche P. Beweise:

$$P < \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Aufgabe 7. Bestimme alle reellen Lösungen des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 2a^2 - 2ab + b^2 &= a \\ 4a^2 - 5ab + 2b^2 &= b \end{aligned}$$

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Fallunterscheidung

Aufgabe 2: Faktorisiere $x^4 + x^2 + 1$

Aufgabe 3: Benutze $\left\{\frac{p^2}{q^2}\right\} = \frac{m}{q^2}$ für ein $m < q^2$

Aufgabe 4: Nutze die trigonometrische Formel: $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$.

Aufgabe 5: Potenz vom Punkt (0, 0)

Aufgabe 6: Betrachte den Winkel gegenüber der Seite mit Länge a

Aufgabe 7: Gewöhnliche Methoden für Gleichungssysteme

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Es gilt entweder

$$x^2 \leq 1 \leq (1-x)^2$$

oder

$$(1-x)^2 \leq 1 \leq x^2.$$

Im ersten Fall gilt: $x^2 \leq 1$, d.h. $x \in [-1,\,1]$, und $(1-x)^2 \geq 1$, d.h. $x \in (-\infty,\,0] \cup [2,\,+\infty)$. Dann sind beide Voraussetzungen für $x \in [-1,\,0]$ erfüllt.
Im zweiten Fall gilt: $x^2 \geq 1$ dh $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, und $(1-x)^2 \leq 1$ d.h. $x \in [0, 2]$. Dann sind beide Voraussetzungen für $x \in [1,\,2]$ erfüllt.
Also ist die erste Voraussetzung äquivalent zu $x \in [-1,\,0] \cup [1,\,2]$.
Bestimmen wir, wann die Ungleichung $0 \leq x^2 - x \leq 2$ gilt.
Aus $x(x-1) > 0$ folgt $x \in (-\infty,\,0] \cup [1,\,\infty)$, und aus $(x-2)(x+1) < 0$ folgt $x \in [-1,\,2]$.
Es folgt, dass beide Ungleichungen für $x \in [-1,\,0] \cup [1,\,2]$ gelten.

Aufgabe 2.

Es gilt

$$\begin{aligned} 1 + x^2 + x^4 &= (1+x+x^2)^2 - (2x + 2x^2 + 2x^3) \\ &= (1+x+x^2)((1+x+x^2) - 2x). \end{aligned}$$

Wir formen unter Verwendung dieser Tatsache die gegebene Gleichung um:

$$\begin{aligned} (a-1)(1+x+x^2)^2 &= (a+1)(1+x+x^2)((1+x+x^2) - 2x) \\ (1+x+x^2)(-2(1+x+x^2) + 2x(a+1)) &= 0 \\ (1+x+x^2)(1 - ax + x^2) &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$ hat keine reellen Lösungen.
Die Diskriminante von $1 - ax + x^2 = 0$ ist $D = a^2 - 4$. Daraus folgt, dass sie nur dann reelle Lösungen hat, wenn $|a| \geq 2$ ist.
Wir schließen, dass die Gleichung für $a \in (-2,\,2)$ keine reelle Lösungen hat, für $a = 2$ die Lösung $x = 1$ und für $a = -1$ die Lösung $x = -1$. Für $a < -2$ und $a > 2$ hat sie zwei reelle Lösungen, nämlich $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}$.

Aufgabe 3.

Wir setzen $x = \frac{p}{q}$. Dann gilt: $\{x^2\} + \{x\} = \{\frac{p^2}{q^2}\} + \{\frac{p}{q}\}$. Wir sehen, dass $\{\frac{p^2}{q^2}\} = \frac{m}{q^2}$ für ein $m < q^2$ und $\{\frac{p}{q}\} = \frac{n}{q}$ für ein $n < q$ wobei m und n teilerfremd zu q sind.
Dann ist

$$\{x^2\} + \{x\} = \frac{m}{q^2} + \frac{n}{q} = \frac{m + nq}{q^2}$$

unkürzbar. Es könnte also nur $m + nq = q^2$ sein, aber dann wäre $\{x^2\} + \{x\} = 0$, ein Widerspruch.

Finden wir jetzt ein $x < 1$ für das gilt: $x^2 + x = 1$. Die (irrationale) Lösung dieser Gleichung ist $x = \frac{1}{2}(\sqrt{(}5) - 1)$.

Aufgabe 4.

Wir benutzen die Formel

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}.$$

Setzen wir $x = n + 1$ und $y = n$, so gilt:

$$\tan(n + 1)\tan(n) = \frac{\tan(n + 1) - \tan(n)}{\tan 1} - 1$$

Beim Summieren kürzen sich alle Terme außer dem ersten und letzten:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2012} \tan(n)\tan(n + 1) &= \frac{\tan 2 - \tan 1}{\tan 1} - 1 + \ldots + \frac{\tan 2013 - \tan 2012}{\tan 1} - 1 \\ &= \frac{\tan 2013 - \tan 1}{\tan 1} - 2012 = \frac{\tan 2013}{\tan 1} - 2013.\end{aligned}$$

Aufgabe 5.

Seien $A(a,\, 0)$, $B(b,\, 0)$ und $C(0,\, c)$ die Schnittpunkte der Funktion mit den Achsen. Dann sind a und b die Nullstellen der quadratischen Gleichung und es gilt einerseits $c = f(0) = q$ und andererseits nach Satz von Vieta $ab = q$.
Sei $D(0,\, d)$ der andere Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC mit der $y-$Achse.
Da einander AB und CD im Punkt $(0,\, 0)$ schneiden, folgt wegen der Potenz des Punktes bezüglich eines Kreises, dass

$$|OA| \cdot |OB| = |OC| \cdot |OD|.$$

Daraus folgt, dass $|ab| = |cd|$ (für $|OA| = |a|, |OB| = |b|, |OC| = |c|$ bzw. $|OD| = |d|$.)
Wir sehen, dass die Zahlen ab und cd immer das gleiche Vorzeichen haben, sie sind negativ wenn $(0,\, 0)$ innerhalb des Kreises ist, und positiv andernfalls.
Nun folgt aus $ab = cd$ und $ab = q = c$, dass $d = 1$ ist, was wir zeigen wollten.

Aufgabe 6.

Sei α der Winkel gegenüber der Seite mit Länge a.
Aus der trigonometrischen Flächenformel $P = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha)$ folgt:

$$P = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) \leq \frac{1}{2}bc,$$

d.h. $2P \leq bc$, und analog $2P \leq ca$ und $2P \leq ab$.
Summieren der Ungleichungen ergibt

$$6P \leq bc + ca + ab.$$

Wir sehen, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn $\alpha = 90°$, daher kann nicht gleichzeitig $P = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}ca = \frac{1}{2}ab$ gelten.

Es gilt also: $6P < ab + bc + ab < a^2 + b^2 + c^2$.
Aufgabe 7.

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit 2 und subtrahieren sie von der zweiten:

$$ab = 2a - b.$$

Da $a = -1$ nicht gelten kann, schreiben wir $b = \frac{2a}{a+1}$.
Wir setzen diesen Ausdruck in die erste Gleichung ein und erhalten:

$$\begin{aligned} 2a^2 - 2a \cdot \frac{2a}{a+1} + \frac{4a^2}{(a+1)^2} &= a \\ 2a^4 - a^3 - a &= 0 \\ a(a-1)(2a^2 + a + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt nach Produkt-Null-Satz, dass entweder $a = 0$ oder $a = 1$ oder $2a^2 + a + 1 = 0$ gelten muss. Für $a = 0$ erhalten wir $b = 0$, und für $a = 1$ erhalten wir $b = 1$. Das ergibt die beiden Lösungspaare $(0, 0)$ und $(1, 1)$.
Die Gleichung $2a^2 + a + 1 = 0$ hat Diskriminante -7 und daher gibt es keine weitere reelle Lösung.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team
Aufgabe 6.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team
Aufgabe 7.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Literatur

[1] Kroatischer Regionalwettbewerb Natjecanja iz matematike u RH. `http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm`. (aufgerufen am 21.12.2020).