52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen I-II-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 8. Jänner 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Nina Mitrovic zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 5. Jänner 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Nina Mitrovic bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 8. Jänner 2021 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Die Seite BC sei die längste Seite des gleichschenkligen Dreiecks ABC. Sei M auf der Seite BC, sodass $|BM| = |AB|$. Der Lotfußpunkt von Punkt M auf die Seite BC sei N.
Beweise, dass das Dreieck BMN und das Viereck $ACMN$ die gleiche Fläche und denselben Umfang haben.

Aufgabe 2. Der Punkt P ist der Mittelpunkt der Seite AB mit Länge 2. Sei T der Berührpunkt der Tangente von A an den Kreis mit dem Durchmesser PB.
Bestimme die Länge $|PT|$.

Aufgabe 3. Im Dreieck ABC befindet sich einen Punkt T, sodass $|AT| = 56$, $|BT| = 40$ und $|CT| = 35$. Die Lotfußpunkte von T auf die Seiten des Dreiecks ABC bilden ein gleichseitiges Dreieck.
Bestimme den Winkel $\angle ABC$.

Aufgabe 4. Anna hat ein Rechteck mit zwei blauen Seiten der Länge 24 und zwei roten Seiten der Länge 36 gezeichnet. Jeden Punkt innerhalb des Rechtecks färbte sie mit der Farbe, der nächstliegenden Seite. Die Punkte, die genauso weit von roten und blauen Seiten sind, färbte sie schwarz.
Bestimme die Fläche des roten Teils des Rechtecks.

Aufgabe 5. Sei D der Lotfußpunkt vom Punkt C auf die Basis AB eines gleichschenkligen Dreiecks ABC. Der Punkt M sei der Mittelpunkt der Seite CD. Die Geraden BM und AC schneiden einander im Punkt E.
Bestimme das Verhältnis $|CE| : |AC|$

Aufgabe 6. Das Quadrat ABC hat die Seite der Länge 1. Sei X ein Punkt auf der Seite AB, und sei Y ein Punkt auf der Seite AD sodass der Winkel $\angle CHY = 90°$.
Bestimme den Punkt X für den die Fläche des Dreiecks CDY am kleinsten ist.

Aufgabe 7. Gegeben sind 2 Kreise mit Radien r_1 und r_2, die einander nicht schneiden. Ihre gemeinsame innere Tangente berührt die Kreise in den Punkten P und Q, und die äußere in den Punkten A und B.
Bestimme die Länge $r_1 \cdot r_2$ wenn $|AB| = 16$ und $|PQ| = 12$ sind.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Betrachte den Mittelpunkt der Seite BC.

Aufgabe 2: Betrachte den Mittelpunkt der Seite PB. Satz von Pythagoras.

Aufgabe 3: Trigonometrie. Sinussatz.

Aufgabe 4: Betrachte die Symmetralen der Winkeln BAD und ADC.

Aufgabe 5: Betrachte den Schwerpunkt des Dreiecks BCD

Aufgabe 6: Bestimme die Fläche in Abhänigkeit der Länge $|AX|$.

Aufgabe 7: Betrachte die Mittelpunkte der Kreise.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Sei P der Mittelpunk der Basis BC. Für die Dreiecke ABP und MBN gilt: $\angle BPA = 90 = \angle BNM$, $\angle ABP = \angle MBN$ und $|AM| = |MB|$, daraus folgt, dass sie kongruent sind. Insbesondere haben sie die gleichen Flächeninhalte: $F_{ABP} = F_{MBN} = \frac{1}{2}FABC$.
Es folgt:

$$F_{ACMN} = F_{ABC} - F_{MBN} = F_{ABC} - \frac{1}{2}F_{ABC} = F_{MBN}.$$

Weiter haben wir durch Kongruenz:

$$|NB| + |BM| = |PB| + |BA| = \frac{1}{2}U_{ABC}$$

Daraus folgt:

$$U_{ACMN} = U_{ABC} - |NB| - |BM| + |MN| = \frac{1}{2}U_{ABC} + |MN| = |NB| + |BM| + |MN| = U_{MBN}.$$

Aufgabe 2.

Sei O der Mittelpunkt der Seite PB. Da AT eine Tangente ist, gilt:

$$\angle ATP = 90 - \angle PTO = 90 - \angle TPO = 90 - \angle TPB = \angle TBP.$$

(Die erste Gleichung gilt, weil AT eine Tangente ist und PT der Durchmesser des Kreises ist. Die zweite Gleichung gilt weil OPT gleichschenklig ist, und die letzte gilt, weil BPT rechtwinklig ist.)
Die Dreiecke PAT und TAB sind ähnlich:

$$|\frac{PT}{BT}| = |\frac{AT}{AB}| = |\frac{AP}{AT}|$$

Daraus folgt, dass

$$|AT|^2 = |AB||AP| = 2$$

und $|AT| = \sqrt{2}$. Es folgt auch $|\frac{PT}{BT}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $|BT| = \sqrt{|PT|}$.
Mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck PTB erhalten wir $|PT| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Aufgabe 3.

Wir sehen, dass $AMTL$ ein Sehnenviereck ist, und AT ist der Durchmesser seines Kreises:

$$d = |LM| = |AT|sin(\alpha) = 56sin(\alpha).$$

Analog gilt: $d = 40sin(\alpha) = 35sin(\alpha)$ Aus dem Sinussatz folgt

$$\frac{a}{b} = \frac{sin(\alpha)}{sin(\beta)} = \frac{40}{56}.$$

Analog folgt $\frac{c}{b} = \frac{7}{8}$. Aus dem Kosinussatz folgt:

$$1 = \frac{c}{b}^2 + \frac{a}{b}^2 - 2\frac{c}{b} \cdot \frac{a}{b} cos(\beta).$$

Wir setzen die Werte ein und erhalten $cos(\beta) = \frac{1}{2}$, also muss $\beta = 60°$ sein.

Aufgabe 4.

Sei E der Schnittpunkt der Symmetralen der Winkeln BAD und ADC, und F der Schnittpunkt der Symmetralen der Winkeln ABC und BCD. Die Punkte auf der Seite AE sind genauso weit entfernt von AB und AD, deswegen sind sie genauso wie Punkte auf BF, CF und DE schwarz.
Ähnlich sehen wir, dass alle Punkte innerhalb der Dreiecke AED und BCF blau sind. Alle anderen Punkte sind rot, da ihre nächste Seite entweder AB oder CD ist.
Die gesuchte Fläche ist

$$F = F_{ABCD} - F_{AED} - F_{BFC}.$$

Sei $|AE| = a$, dann folgt aus dem Satz von Pythagoras in AED, dass $a\sqrt{2} = 24$.
Deswegen sind $F_{AED} = F_{BCF} = \frac{a^2}{2} = 144$, und die gesuchte Fläche ist 576.

Aufgabe 5.

Sei G der Mittelpunkt der Seite BC und T der Schnittpunkt von BM und DG.
Da M und T die Mittelpunkte der Seiten CD und BC sind, muss T der Schwerpunkt des Dreiecks BCD sein.
Daraus folgt $|GT| : |DG| = 1 : 3$. Da das Dreieck ABC gleichschenklig ist, ist D der Mittelpunkt der Seite AB.
Daraus folgt, dass die Geraden DG und AC parallel sind, und $|CE| : |AC| = |TG| : |DG| = 1 : 3$.

Aufgabe 6.

Sei $x = |AX|$ und $y = |AY|$. Die Dreiecke AXY und BCX sind ähnlich: beide sind rechtwinkelig und $\angle AXY = \angle BCX$. Es folgt:

$$\frac{|BC|}{|BX|} = \frac{|AX|}{|AY|}$$

und $\frac{1}{1-x} = \frac{x}{y}$. Wir können die Fläche als eine Funktion in x ausdrücken:

$$F(CDY) = \frac{1}{2}(x^2 - x + 1).$$

Da $F(x)$ eine konvexe quadratische Gleichung mit der Nullstelle $\frac{1}{2}$ ist, erreicht F das Minimum in dem Punkt $x = \frac{1}{2}$. In diesem Fall ist X der Mittelpunkt der Seite AB.

Aufgabe 7.

Sei S_1 der Mittelpunkt des Kreises mit Radius r_1 und S_2 der Mittelpunkt des Kreises mit Radius r_2 und X der Schnittpunkt der Geraden AB und PQ.
Die Dreiecke AXS_1 und PXS_1 sind kongruent, da die Winkel $\angle S_1AX = 90 = \angle S_1PX, |S_1A| = |S_1P|$ übereinstimmen und sie die Seite XS_1 gemeinsam haben. Aus dieser Kongruenz folgt: $|AX| = |PX| und \angle AXS_1 = \frac{1}{2}\angle AXP$.
Analog gilt $|BX| = |QX| und \angle BS_2X = \frac{1}{2}\angle QS_2B$.
Weiters gilt:

$$16 = |AB| = |PX| + |QX| = 12 + 2|QX|$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass $|QX| = 2, |XB| = 2$ und $AX = 14$.
Da $\angle S_1AX = 90 = \angle XBS_2$:

$$\angle AXS_1 = \frac{1}{2}\angle AXP = \frac{1}{2}(180 - (360 - \angle XQS_2 - \angle QS_2B - \angle S_2BX)) = \frac{1}{2}\angle QS_2B = \angle BS_2X.$$

Da AXS_1 und BS_2X ähnlich sind, folgt:

$$\frac{r_1}{|AX|} = \frac{|XB|}{r_2}$$

und schließlich $r_1 \cdot r_2 = 2 \cdot 14 = 28$.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team
Aufgabe 6.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team **Aufgabe 7.**

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Literatur

[1] Kroatischer Regionalwettbewerb Natjecanja iz matematike u RH. `http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm`. (aufgerufen am 28.01.2021).