51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 15. Jänner 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Greilhuber zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 12. Jänner 2021 wird das Aufgabenblatt um Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Greilhuber bespricht mit euch die Aufgaben im virtuellen Olympiade-Kurs am 15. Jänner 2021 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Dokument um ausgewählte Lösungsvorschläge und Quellenangaben.

Schreibe uns gerne, wenn du an unserem virtuellen Olympiade-Kurs teilnehmen möchtest. Du bist jederzeit herzlich willkommen.

Aufgaben

Aufgabe 1. Man beweise ohne Differentialrechnung, dass unter allen Dreiecken mit Flächeninhalt 1 das gleichseitige Dreieck den kleinsten Umfang hat.

Aufgabe 2. Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC. Man finde unter allen Dreiecken PQR, sodass P auf der Strecke BC, Q auf der Strecke AC und R auf der Strecke BC liegt, dasjenige mit dem kleinsten Umfang.

Aufgabe 3. Es sei ABC ein Dreieck, dessen Winkel alle kleiner als $120°$ sind. Man finde den Punkt F im Inneren des Dreiecks, sodass die Summe $|AF| + |BF| + |CF|$ minimal ist.

Aufgabe 4. Einem Kreis sind ein Quadrat und ein gleichseitiges Dreieck eingeschrieben. Die sieben Eckpunkte bilden ein dem Kreis eingeschriebenes konvexes Siebeneck S. (Als Sonderfall kann S ein Sechseck sein, wenn eine Dreiecksecke mit einer Quadratecke zusammenfällt.)
Für welche Lagen des Dreiecks relativ zum Quadrat hat S den größten bzw. kleinsten Flächeninhalt?

Aufgabe 5. Es sei ABC ein Dreieck mit Seitenlängen a, b und c, sowie Innenwinkeln α, β und γ. Man zeige den Sinussatz

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c},$$

und den Cosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma).$$

Aufgabe 6. Es sei AB eine Sehne im Kreis k. Auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege ein Punkt T. Eine Tangente durch T an k berühre den Kreis in C. Man zeige: $|BT| : |TC| = |BC| : |CA|$.

Aufgabe 7. Sei ABC ein Dreieck mit Umkreis k. Der Seitenmittelpunkt von BC sei M. Die Gerade AM schneide k ein zweites Mal in D. Die Winkelsymmetrale schneide BC in T, und die Spiegelung der Geraden AM schneide BC in E. Man beweise folgende Verhältnisse:

(1) $|BD| : |DC| = |CA| : |AB|$, (2) $|BT| : |TC| = |BA| : |AC|$ und (3) $|BE| : |TE| = |BA|^2 : |AC|^2$.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Wenn das Dreieck nicht gleichseitig ist, kann man den Umfang immer verringern - dies kann elementar bewiesen werden.

Aufgabe 2. Vorgangsweise ähnlich wie beim ersten Beispiel. Spiegeln der Figur an den Dreiecksseiten.

Aufgabe 3. Rotieren des Beispiels um $60°$ in einem Eckpunkt; Dreiecksungleichung.

Aufgabe 4. Die Lage des Dreiecks und des Quadrats sieht im Grunde genommen immer gleich aus - über je drei von vier Seiten des Quadrats liegt genau ein Eckpunkt des Dreiecks. Man zerlege den Flächeninhalt des Siebenecks entsprechend.

Aufgabe 5. Für den Sinussatz berechne man die Längen der Höhen auf jeweils zwei Arten. Für den Cosinussatz finde man zunächst ein rechtwinkliges Dreieck mit c als Hypotenuse und drücke dessen Kathetenlängen in den gewünschten Größen aus.

Aufgabe 6. Tangentenwinkelsatz und Sinussatz.

Aufgabe 7. Sinussatz.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Zuerst wollen wir uns davon überzeugen, dass es unter den Dreiecken mit Flächeninhalt 1 ein Dreieck mit dem kleinsten Umfang gibt. Es ist einfacher, zu zeigen, dass es unter den Dreiecken mit Umfang 1 eines mit größtem Flächeninhalt gibt. Der Grund liegt darin, dass der Flächeninhalt *stetig* von den drei Seitenlängen a, b, c des Dreiecks abhängt, und durch die Bedingungen $a, b, c > 0$, $a + b + c = 1$ und zusätzlich die Dreiecksungleichungen $a + b \geq c$, $a + c \geq b$ und $b + c \geq a$ die Menge der möglichen Seitenlängen *abgeschlossen* (durch Ungleichungen mit "$\geq$" festgelegten) und *beschränkt* ist. Ein Satz der Topologie besagt nun, dass es ein Tripel von Seitenlängen gibt, das den maximalen Flächeninhalt F_{max} realisiert. Dividiert man die Seitenlängen nun durch $\sqrt{F_{max}}$, so erhält man ein Dreieck mit Flächeninhalt 1, welches offensichtlich den kleinstmöglichen Umfang hat.
Nehmen wir nun an, das Dreieck mit dem kleinsten Umfang - welches nun zweifelsfrei existiert - wäre nicht gleichseitig. Dann gäbe es zwei Seiten, die nicht gleich lang sind, o.B.d.A gelte $a < b$. Der Höhenfußpunkt von C auf AB sei mit F bezeichnet, die Höhe CF mit h, und der Abstand zwischen F und dem Mittelpunkt von AB mit x. Dann gilt nach Pythagoras $a = \sqrt{(\frac{c}{2} - x)^2 + h^2}$, und $a = \sqrt{(\frac{c}{2} + x)^2 + h^2}$. Wir zeigen nun, dass $a + b > 2\sqrt{(\frac{c}{2})^2 + h^2}$ gilt, dass der Umfang also kürzer wird, wenn man C auf die Streckensymmetrale von AB setzt:

$$
\begin{aligned}
a + b =& \sqrt{\left(\frac{c}{2} - x\right)^2 + h^2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2} + x\right)^2 + h^2} > 2\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2} \\
\Leftrightarrow& \left(\frac{c}{2} - x\right)^2 + h^2 + \left(\frac{c}{2} + x\right)^2 + h^2 + 2\sqrt{\dots}\sqrt{\dots} > 4\left(\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2\right) \\
\Leftrightarrow& 2\left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2x^2 + 2h^2 + 2\sqrt{\dots}\sqrt{\dots} > 4\left(\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2\right) \\
\Leftrightarrow& 2\sqrt{\dots}\sqrt{\dots} > 2\left(\left(\frac{c}{2}\right)^2 - x^2 + h^2\right) \;\Leftrightarrow\; \left(\left(\frac{c}{2} - x\right)^2 + h^2\right)\left(\left(\frac{c}{2} + x\right)^2 + h^2\right) > \left(\left(\frac{c}{2}\right)^2 - x^2 + h^2\right)^2 \\
\Leftrightarrow& \left(\left(\frac{c}{2}\right)^2 - cx + x^2 + h^2\right)\left(\left(\frac{c}{2}\right)^2 + cx + x^2 + h^2\right) > \left(\left(\frac{c}{2}\right)^2 - x^2 + h^2\right)^2 \\
\Leftrightarrow& \left(\left(\frac{c}{2}\right)^2 + x^2 + h^2\right)^2 - c^2x^2 > \left(\left(\frac{c}{2}\right)^2 - x^2 + h^2\right)^2 \\
\Leftrightarrow& \left(\left(\frac{c}{2}\right)^2 + x^2 + h^2\right)^2 - \left(\left(\frac{c}{2}\right)^2 - x^2 + h^2\right) > c^2x^2 \\
\Leftrightarrow& 4\left(\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2\right)x^2 > c^2x^2 \;\Leftrightarrow\; (c^2 + 4h^2)x^2 > c^2x^2,
\end{aligned}
$$

womit die zu zeigende Ungleichung auf eine äquivalente und offensichtlich wahre zurückgeführt wurde. Das ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, das Dreieck hätte minimalen Umfang. Damit muss das Dreieck mit minimalem Umfang gleichseitig sein.

Aufgabe 2.

Wie bei Aufgabe 1 gibt es ein solches Dreieck, da der Umfang *stetig* von der Lage der Punkte P, Q und R abhängt, und die Menge der möglichen Punktetripel (P, Q, R) *abgeschlossen* und *beschränkt* ist, sofern wir zulassen, dass die Punkte mit den Eckpunkten von ABC zusammenfallen.
Wir zeigen nun, dass PQR genau dann den minimalen Umfang hat, wenn P, Q und R die Höhenfußpunkte von A, B bzw. C auf die jeweils gegenüberliegenden Seiten sind. Zunächst spiegeln wir den Punkt P an AB und AC, und bezeichnen die beiden Bildpunkte mit P_B bzw. P_C. Dann gilt $|PQ| = |P_CQ|$ und $|PR| = |RP_B|$, und damit $|PQ|+|QR|+|RP| = |P_CQ|+|QR|+|RP_B|$. Nach der Dreiecksungleichung gilt aber $|P_CQ| + |QR| + |RP_B| \geq |P_CP_B|$, mit Gleichheit genau dann, wenn P_C, Q, R und P_B in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen. Weil ABC spitzwinklig ist, ist das möglich, und damit müssen Q, R bereits auf der Geraden P_CP_B liegen, da wir ja das Dreieck PQR mit dem minimalen Umfang betrachten. Es gilt also nun, den Punkt P so zu wählen, dass die Länge $|P_CP_B|$ minimal wird. Betrachte nun das Dreieck P_CAP_B. Es ist gleichschenklig, da $|P_CA| = |PA| = |P_BA|$ nach Konstruktion gilt, mit Scheitelwinkel $\angle P_BAP_C = 2\angle BAP + 2\angle PAC = 2\alpha$, und damit bis auf Ähnlichkeit bestimmt! Das Verhältnis $|P_CP_B| : |P_CA| = |P_CP_B| : |PA|$ ist somit unabhängig von der Wahl des Punktes P. Daher ist $|P_CP_B|$ genau dann minimal, wenn es der Abstand $|AP|$ ist, also wenn P der Höhenfußpunkt von A auf BC ist. Durch zyklisches Vertauschen der Punkte im vorangehenden Argument erhält man natürlich, dass Q der Höhenfußpunkt von B auf AC ist, und dass R der Höhenfußpunkt von C auf AB ist.

Aufgabe 3.

Wir setzen auf den Seiten AB und AC jeweils gleichseitige Dreiecke nach außen auf, deren dritte Eckpunkte wir mit B' bzw. C' bezeichnen, sodass B' das Bild des Punktes B unter Drehung um $60°$ in A *im Uhrzeigersinn* und C' das Bild unter Drehung um $60°$ in A *gegen den Uhrzeigersinn* ist. Es sei nun P ein beliebiger Punkt im Inneren des Dreiecks ABC. Drehen wir P um $60°$ gegen den Uhrzeigersinn, erhalten wir einen Punkt P', sodass $AP'P$ ein gleichseitiges Dreieck ist, da ja $|AP| = |AP'|$ gilt, und $\angle P'AP = 60°$. Wegen $|P'P| = |AP|$ und $|B'P'| = |BP|$ ist die Länge des Streckenzugs $|CP|+|PP'|+|P'B'|$ von C nach B' genau die Summe $|AP|+|BP|+|CP|$. Damit ist die Summe nach der Dreiecksungleichung nach unten durch die Länge $|CB'|$ beschränkt, die nicht von der Wahl des Punktes P abhängt. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn C, P, P' und B' in genau dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen.
Wir zeigen nun, dass das dann der Fall ist, wenn wir P als den Schnittpunkt F der Geraden BC' und CB' wählen, welcher im Inneren von ABC liegt, weil jeder Innenwinkel kleiner als $120°$ ist. Da durch Drehung um $60°$ in A im Uhrzeigersinn B in B' und C' in C übergeht, wird BC' auf $B'C$ abgebildet. Der Punkt P' liegt daher auf $B'C$, weil sein Urbild P auf BC' gelegen ist! Damit liegen C, P, P' und B' auf einer Geraden. Weil $\angle PAC < \angle PAC + 60° = \angle P'AC \leq \angle BAC + 60° = \angle B'AC \leq 120° + 60° = 180°$ gilt, liegen C, P, P' und B' auch genau in dieser Reihenfolge auf der Strecke CB', womit gezeigt wurde, dass $|FA|+|FB|+|FC|$ genau das erreichbare Minimum $|CB'|$ annimmt.

Aufgabe 4.

Die Eckpunkte des Quadrats, die wir mit $ABCD$ bezeichnen, teilen den Kreis in vier Viertelkreisbögen ein. Weil die Seitenlängen des Dreiecks länger als die des Quadrats sind, liegen niemals zwei Dreieckseckpunkte auf demselben Viertelkreisbogen. O.B.d.A. nehmen wir an, dass die Eckpunkte P, Q und R des Dreiecks auf den Viertelkreisbögen CD, DA bzw. BC liegen. Der zu untersuchende Flächeninhalt des Siebenecks $ABRCPDQ$ ist dann durch die Summe der Flächeninhalte des Quadrats $ABCD$ und der Dreiecke BRC, CPD und DQA gegeben, und wird daher maximal

bzw. minimal genau dann, wenn es die Summe der Dreiecksflächen ist. Weil die Grundlinien der Dreiecke BC, CD und DA gleich lang sind, ist die Summe ihrer Flächeninhalte direkt proportional zur Summe ihrer Höhen.
Wir zeigen nun, dass der Abstand h_P von P zu DC genau dann maximal bzw. minimal wird, wenn die Summe der Abstände $h_Q + h_R$ der Abstände von Q bzw. R zu AD bzw. BC ihr Maximum bzw. Minimum annimmt. Betrachtet man die Länge h der Normalprojektion von QR auf die Gerade AB, so erkennen wir $h - AB = h_Q + h_R$. Da $|QR|$ konstant ist, wird die Länge h wird minimal, wenn QR den größtmöglichen Winkel zu AB einschließt, was unter unseren Annahmen an die Lage der Punkte genau dann passiert, wenn $Q = A$ oder $R = B$ eintritt. Glücklicherweise ist dann auch der Punkt P so nahe an einem der Eckpunkte D, C wie möglich, und damit auch der Abstand h_P minimal. Ganz ähnlich wird die Länge h, und damit die Summe $h_Q + h_R$, maximal, wenn QR parallel zu AB ist, was zur Folge hat, dass A in der Mitte des Kreisbogens DC liegt, und somit auch h_P maximal wird.
Zusammengefasst wird der kleinstmögliche Flächeninhalt des Siebenecks erreicht, wenn ein Eckpunkt des Dreiecks mit einem des Quadrats zusammenfällt, und der größtmögliche, wenn einer der Dreieckseckpunkte auf der Streckensymmetrale einer der Quadratseiten liegt.

Aufgabe 5.

Es sei F_A der Höhenfußpunkt von A auf BC. Dann bilden ABF_A und CAF_A jeweils rechtwinklige Dreiecke, mit rechtem Winkel in F_A. Der Innenwinkel des Dreiecks ABF_A in B ist entweder β oder $180° - \beta$, je nachdem, ob β stumpf ist. Nach der Definition des Sinus über rechtwinklige Dreiecke ist nun h_A, die Länge der Höhe in A auf BC, gegeben durch $\sin(\beta) \cdot c$ oder $\sin(180° - \beta) \cdot c$, aber letzterer Ausdruck ist ebenfalls $\sin(\beta) \cdot c$, da $\sin(x) = \sin(180° - x)$ gilt. Im Dreieck CAF_A berechnen wir auf dieselbe Weise $h_A = \sin(\gamma) \cdot b$, und erhalten

$$\sin(\beta) \cdot c = h_A = \sin(\gamma) \cdot b \qquad \Rightarrow \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}.$$

Durch die gewohnte zyklische Vertauschung der Eckpunkte erhalten wir analog $\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{a}$, und damit insgesamt den Sinussatz.
Für den Cosinussatz bezeichnen wir die (gerichteten) Längen BF_A und F_AC mit x bzw. y, sodass $x + y = BC = a$ gilt. Nach Pythagoras gilt $c^2 = x^2 + h_A^2$ und $h_A^2 = b^2 - y^2$, also $c^2 = b^2 + x^2 - y^2 = b^2 + (x - y)(x + y) = b^2 + a(a - 2y)$. Da aber $y = b\cos(\gamma)$ gilt (man überzeuge sich davon, dass das Vorzeichen auch für stumpfes γ stimmt), folgt $c^2 = b^2 + a^2 - 2ay = b^2 + a^2 - 2ab\cos(\gamma)$, und damit der Cosinussatz.

Aufgabe 6.

Nach dem Sinussatz im Dreieck BTC gilt $|BT| : |TC| = \sin(\angle BCT) : \sin(\angle TBC)$. Wegen $\angle TBC = 180° - \angle CBA$ und $\sin(x) = \sin(180° - x)$ sowie dem Tangentenwinkelsatz $\angle BCT = \angle BAC$ können wir weiter $\sin(\angle BCT) : \sin(\angle TBC) = \sin(\angle BAC) : \sin(\angle CBA)$ schreiben. Nach dem Sinussatz im Dreieck ABC folgt $\sin(\angle BAC) : \sin(\angle CBA) = |BC| : |CA|$, und damit insgesamt $|BT| : |TC| = |BC| : |CA|$.

Aufgabe 7.

Zunächst bestimmen wir das Verhältnis $\sin(\angle BAM) : \sin(\angle MAC)$: Nach dem Sinussatz gilt $\sin(\angle BAM) : \sin(\angle AMB) = |BM| : |AB|$ und $\sin(\angle MAC) : \sin(\angle CMA) = |CM| : |CA|$, aber weil $|BM| = |CM|$ und $\sin(\angle AMB) = \sin(\angle CMA)$, folgt $\sin(\angle BAM) : \sin(\angle MAC) = |CA| : |AB|$. Mit dem

Peripheriewinkelsatz über den Sehnen BD bzw. DC erhalten wir nun $\angle BAM = \angle BCD$ und $\angle MAC = \angle DBC$. Eine Anwendung des Sinussatzes im Dreieck BDC ergibt nun $|BD| : |DC| = \sin(\angle BCD) : \sin(\angle DBC) = \sin(\angle BAM) : \sin(\angle MAC) = |CA| : |AB|$, womit (1) bewiesen ist.
Für Verhältnis (2) benutzen wir den Sinussatz in den Dreiecken ABT und ATC, um $|BT| : |BA| = \sin(\angle BAT) : \sin(\angle ATB)$ und $|TC| : |AC| = \sin(\angle TAC) : \sin(\angle CTA)$ zu erhalten. Daraus folgt, weil $\angle BAT = \angle TAC$ und, wie vorhin, $\sin(\angle ATB) = \sin(\angle CTA)$ gilt, durch Gleichsetzen und elementares Umformen die Aussage $|BT| : |TC| = |BA| : |AC|$.
Da AE das Spiegelbild der Geraden AM an der Winkelsymmetralen ist, gilt $\angle BAE = \angle MAC$ und $\angle EAC = \angle BAM$, und damit $\sin(\angle BAE) : \sin(\angle EAC) = \sin(\angle MAC) : \sin(\angle BAM) = |BA| : |AC|$, wie im Zuge des Beweises von (1) gezeigt wurde. Mit dem Sinussatz in den Dreiecken ABE und AEC erhalten wir, ähnlich wie vorher, $|BE| : |BA| = \sin(\angle BAE) : \sin(\angle AEB)$ und $|AC| : |EC| = \sin(\angle CEA) : \sin(\angle EAC)$. Multiplizieren der beiden Gleichungen ergibt

$$\frac{|BE|}{|EC|} \cdot \frac{|AC|}{|BA|} = \frac{\sin(\angle BAE)}{\sin(\angle EAC)} \cdot \frac{\sin(\angle CEA)}{\sin(\angle AEB)} = \frac{\sin(\angle BAE)}{\sin(\angle EAC)} = \frac{|BA|}{|AC|} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|BE|}{|EC|} = \left(\frac{|BA|}{|AC|}\right)^2 .$$

Quellenangaben zu den Aufgaben

Quellen der Aufgaben

Aufgabe 1.

Allgemein bekannt, bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team

Aufgabe 2.

Allgemein bekannt, bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team

Aufgabe 3.

Allgemein bekannt, bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team

Aufgabe 4.

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene 2012 (nachzulesen in [1]), bearbeitet vom Josef Greilhuber und von MmF-Team.

Aufgabe 5.

Allgemein bekannt, bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team

Aufgabe 6.

Allgemein bekannt, bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team.

Aufgabe 7.

Allgemein bekannt, bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team.

Literatur

[1] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2009–2018: Aufgaben und Lösungen.* Nova MD, 2019.