52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 22. Jänner 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Veronika Schreitter zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 19. Jänner 2021 wird das Aufgabenblatt um Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Veronika Schreitter bespricht mit euch die Aufgaben im virtuellen Olympiade-Kurs am 22. Jänner 2021 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Dokument um ausgewählte Lösungsvorschläge und Quellenangaben.

Schreibe uns gerne, wenn du an unserem virtuellen Olympiade-Kurs teilnehmen möchtest. Du bist jederzeit herzlich willkommen.

Aufgaben

Aufgabe 1. Eine große Anzahl an Kreisscheiben ist in einem Kreis angeordnet, sodass sich benachbarte Scheiben immer überlappen (und nicht benachbarte Scheiben sich nie überlappen). Wir nennen eine Scheibe oben, wenn sie auf ihren beiden Nachbarn liegt, und unten, wenn unter ihren beiden Nachbarn liegt. Zeige, dass es immer gleich viele obere und untere Scheiben gibt, egal wie viele Scheiben im Kreis sind und wie sie sich überlappen.

Aufgabe 2. Gegeben sei ein $n \times n-$Schachbrett mit $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Wie viele Möglichkeiten gibt es, $2n-2$ identische Steine auf dem Schachbrett zu platzieren (jeden auf einem anderen Feld), sodass sich keine zwei Steine auf derselben Diagonalen des Schachbretts befinden? Zwei Steine befinden sich auf derselben Diagonalen des Schachbretts, wenn die Verbindungslinie der Mittelpunkte ihrer Felder parallel zu einer Diagonalen des $n \times n-$Quadrates ist.

Aufgabe 3. Ein Grundstück hat die Form eines $8 \times 8-$Quadrats, dessen Seiten in Nord-Süd- bzw. Ost-West-Richtung orientiert sind. Es ist in 64 quadratische $1 \times 1-$Parzellen zerlegt. In jeder dieser Parzellen kann höchstens ein Haus stehen, jedes Haus belegt genau eine Parzelle. Ein Haus „erhält kein Sonnenlicht“, wenn die drei Nachbarparzellen im Osten, Süden und Westen mit Häusern verbaut sind.
Man bestimme die maximale Anzahl von Häusern, die gebaut werden können, sodass keines davon kein Sonnenlicht erhält.
Anmerkung: Die Häuser am östlichen, südlichen und westlichen Rand des Grundstücks erhalten immer Sonnenlicht.

Aufgabe 4. Gegeben sei ein konvexes $n-$Eck mit einer Triangulierung, das heißt einer Zerlegung in lauter Dreiecke durch einander nicht schneidende Diagonalen.
Man zeige: Man kann mit den Ziffern der Zahl 2007 die n Eckpunkte so markieren, dass jedes Viereck aus 2 (längs einer Kante) benachbarten Dreiecken 9 als Summe der Zahlen auf seinen 4 Eckpunkten hat.

Aufgabe 5. Wir betrachten Zerlegungen eines regelmäßigen $n-$Ecks in $n-2$ Dreiecke durch $n-3$ Diagonalen, die sich innerhalb des $n-$Ecks nicht schneiden. Eine zweifärbige Triangulierung ist eine solche Zerlegung eines $n-$Ecks, in der jedes Dreieck schwarz oder weiß ist, sodass je zwei Dreiecke mit einer gemeinsamen Seiten verschiedene Fraben haben. Wir nennen eine positive ganze Zahl $n \geq 2$ triangulierbar, wenn jedes regelmäßige $n-$Eck eine zweifärbige Triangulierung besitzt, wobei für jeden Eckpunkt A des $n-$Ecks gilt: Die Anzahl der schwarzen Dreiecke, bei denen A ein Eckpunkt ist, ist größer als die Anzahl der weißen Dreiecke, bei denen A ein Eckpunkt ist.
Man bestimme alle triangulierbaren Zahlen.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Was passiert, wenn wir eine Scheibe aus dem Kreis entfernen, die weder oben noch unten ist?

Aufgabe 2: Wähle zuerst aus, auf welche Diagonalen Steine kommen und lege dann der Reihe nach auf jede Diagonale einen Stein.

Aufgabe 3: Eine etwas leichtere Formulierung der Angabe wäre vielleicht: Wir betrachten ein Rechteck mit 7 Zeilen und 6 Spalten. Wie viele Tetrominos (Figuren aus vier angrenzenden Einheitsquadraten), die die Form eines auf dem Kopf stehenden T haben, braucht man, um das Rechteck zu überdecken? Dabei dürfen die Tetrominos überlappen und am Rand über das Rechteck stehen.

Aufgabe 4: Verwende vollständige Induktion.

Aufgabe 5: Zähle, wie viele Eckpunkte die schwarzen und weißen Dreiecke jeweils insgesamt haben müssen.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Veronika Schreitter, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Wir ordnen jeder Kreisscheibe eine Zahl zu: Die Ausgangszahl ist 0. Dann wird 1 addiert, falls die Kreisscheibe über der im Uhrzeigersinn nächsten Kreisscheibe liegt, und 1 subtrahiert, falls die Kreisscheibe unter der im Uhrzeigersinn nächsten Kreisscheibe liegt. Dann wird genauso nochmal 1 addiert oder subtrahiert, je nachdem, ob die Kreisscheibe über oder unter der gegen den Uhrzeigersinn nächsten Kreisscheibe liegt. Dadurch haben obere Kreisscheiben die Zahl 2, untere Kreisscheiben die Zahl -2 und alle anderen Kreisscheiben die Zahl 0. Gleichzeitig muss aber die Summe der Zahlen 0 sein, da für jede Überlappungsfläche zu einer Kreisscheibe 1 addiert wird und von der anderen Kreisscheibe 1 subtrahiert wird. Also muss es gleich viele obere wie untere Kreisscheiben geben.
Anmerkung: Alternativ kann man auch folgendermaßen argumentieren: Man kann eine Kreisscheibe, die weder oben noch unten ist, aus dem Kreis entfernen und die beiden Nachbarn so überlappen, dass die Nachbarn immer noch obere Kreisscheiben bzw. untere Kreisscheiben sind, wenn sie das vorher waren. Wenn man das oft genug macht, bleibt ein Kreis aus nur oberen und unteren Kreisscheiben übrig, die sich daher abwechseln müssen.

Aufgabe 2.

Antwort: Es gibt 2^n Möglichkeiten.
Betrachten wir alle Diagonalen, die parallel zu einer bestimmten Diagonale des $n \times n-$Quadrates sind. Es gibt $2n-1$ solche Diagonalen. Die beiden äußersten bestehen jeweils aus einem Feld, die beiden nächstinneren aus jeweils zwei Feldern usw., bis schließlich die innerste Diagonale aus n Feldern besteht. Da wir $2n-2$ Steine auf dem Schachbrett verteilen sollen, darf also nur eine dieser Diagonalen frei bleiben. Wir sehen, dass die beiden äußersten Diagonalen, die jeweils nur aus einem Feld bestehen, durch eine Diagonale in die andere Richtung verbunden sind. Eine dieser beiden äußersten Diagonalen muss also frei bleiben.
Wir legen jetzt zuerst einen Stein auf das Feld von einer dieser beiden äußersten Diagonalen. Dabei haben wir zwei Möglichkeiten, welche der beiden wir wählen. Nun betrachten wir die beiden nächstinneren Diagonalen, die aus jeweils drei Feldern bestehen. Durch die Diagonale in die andere Richtung blockiert der erste Stein die mittleren Felder dieser beiden Diagonalen. Wir haben also nur jeweils 2 Feldern in diesen beiden Diagonalen übrig und wir sehen, dass es nur zwei Möglichkeiten gibt, wie wir zwei Steine auf diese beiden Diagonalen legen, sodass sich diese nicht wieder durch Diagonalen in die andere Richtung blockieren. Genauso geht es jetzt immer weiter. Von den beiden nächstinneren Diagonalen sind immer nur die beiden äußersten Felder nicht blockiert, wodurch wir zwei Möglichkeiten haben, wie wir die nächsten zwei Steine auf diese beiden Diagonalen legen. Schließlich werden auch bei der innersten Diagonale nur die beiden äußersten Felder frei sein und wir haben zwei Möglichkeiten, auf welches dieser Felder wir den letzten Stein legen.
Also hatten wir insgesamt $n-$mal zwei Möglichkeiten, wie wir die nächsten Steine legen. Das ergibt insgesamt 2^n Möglichkeiten.

Aufgabe 3.

Es können höchstens 50 Häuser gebaut werden.
Wenn wir in der dritten und sechsten Spalte (wobei Spalten in Nord-Süd-Richtung gehen) des Grundstücks jeweils nur in die südlichste Parzelle ein Haus bauen und ansonsten in jede Parzelle

ein Haus bauen, erhalten wir eine gültige Konfiguration mit 50 Häusern.
Wir teilen nun jede Zeile außer der südlichsten in der Mitte in zwei Teile. Dadurch erhalten wir 14 $1 \times 4-$Rechtecke, die das gesamte Grundstück außer der südlichsten Zeile überdecken. Wir können nun jedem Rechteck eine unverbaute Parzelle zuordnen, sodass jede unverbaute Parzelle nur einem Rechteck zugeordnet ist. Daraus folgt dann, dass es mindestens 14 unverbaute Parzellen gibt. Unsere Zuordnungsvorschrift ist die folgende:
Wenn das Rechteck eine unverbaute Parzelle enthält, weisen wir ihm die westlichste unverbaute Parzelle im Rechteck zu. Wenn das Rechteck keine unverbaute Parzelle enthält, weisen wir ihm die östlichste unverbaute Parzelle im Rechteck darunter zu (bzw. in den 4 südlich angrenzenden Parzellen, falls unter dem Rechteck kein weiteres Rechteck ist).
Wir sehen jetzt: Wenn wir einem Rechteck eine unverbaute Parzelle zuweisen, die nicht in diesem Rechteck liegt, muss es im Rechteck darunter mindestens zwei unverbaute Parzellen geben (da sonst im oberen Rechteck die beiden mittleren Häuser nicht beide Sonnenlicht erhalten). Von diesen unverbauten Parzellen wird die östlichste dem oberen Rechteck und die westlichste dem unteren Rechteck zugeordnet. Also kann es nicht passieren, dass zwei Parzellen demselben Rechteck zugeordnet werden.
Anmerkung: Alternativ kann man auch zeigen, dass mindestens 14 Parzellen unverbaut bleiben, indem man zeilenweise von Süden nach Norden vorgeht und zeigt, dass in den ersten $k+1$ Zeilen mindestens $2k$ Parzellen unverbaut bleiben müssen.

Aufgabe 4.

Wir beweisen sogar eine etwas allgemeinere Aussage: Man kann die Eckpunkte so mit den Buchstaben a, b, c und d markieren, dass die Ecken jedes Vierecks aus 2 benachbarten Dreiecken mit 4 verschiedenen Buchstaben markiert sind. Wählen wir dann z.B. $a = b = 0, c = 2, d = 7$, so folgt die gewünschte Aussage.
Wie gehen mittels vollständiger Induktion vor. Für $n \leq 3$ gibt es nichts zu zeigen, da kein Viereck existiert. Für $n = 4$ können wir einfach die 4 Eckpunkte des gegebenen Vierecks mit 4 verschiedenen Buchstaben markieren. Sei nun die Aussage für konvexe $n-1-$Ecke bewiesen. Wir betrachten ein konvexes $n-$Eck mit einer beliebigen Triangulierung.
Lemma: Es existiert ein Eckpunkt des $n-$Ecks, von dem in der Triangulierung keine Diagonale ausgeht.
Beweis: Sei k die minimale Anzahl an Eckpunkten, die in der gegebenen Triangulierung zwischen 2 durch eine Diagonale verbundenen Eckpunkten liegen. Also gibt es eine Diagonale, die 2 Eckpunkte verbindet, zwischen denen k weitere Eckpunkte liegen. Das bedeutet, dass diese Diagonale das $n-$Eck in ein $k+2-$Eck und ein $n-k-$Eck aufteilt. Im $k+2-$Eck können aber jetzt keine weiteren Diagonalen sein, weil diese Punkte verbinden müssten, zwischen denen weniger als k weitere Eckpunkte liegen. Also muss das $k+2-$Eck ein Dreieck sein, also gilt $k = 1$ und es gibt eine Diagonale, die 2 Punkte verbindet, zwischen denen nur ein weiterer Punkt liegt. Von diesen Punkt dazwischen kann also keine Diagonale ausgehen.
Wir können nun den gefundenen Eckpunkt vom $n-$Eck entfernen und erhalten ein $n-1-$Eck. In diesem können wir laut Induktionsvoraussetzung eine gültige Markierung der Eckpunkte finden. Nun fügen wir den entfernten Punkt wieder hinzu. Er ist nur in einem Viereck, das aus 2 benachbarten Dreiecken besteht, enthalten. Die anderen 3 Punkte in diesem Viereck sind auch in einem anderen Viereck enthalten (da das Dreieck aus diesen 3 Punkten an irgendein anderes Dreieck grenzen muss, da $n-1 \geq 4$) und sind daher mit 3 verschiedenen Buchstaben markiert. Also kann man den vierten Punkt mit dem fehlenden Buchstaben markieren und erhält eine gültige Markierung des $n-$Ecks.

Aufgabe 5.

Die triangulierbaren Zahlen sind genau die durch 3 teilbaren Zahlen.
Wir stellen zuerst fest: Da für einen Eckpunkt A die Dreiecke, bei denen A ein Eckpunkt ist, abwechselnd schwarz und weiß sein müssen, muss in jedem Eckpunkt die Anzahl schwarzer Dreiecke um genau 1 größer sein als die Anzahl weißer Dreiecke. Außerdem muss jedes Dreieck, das eine Seite des $n-$Ecks als Seite hat, schwarz sein.
Wenn n durch drei teilbar ist, können wir per Induktion eine gültige Triangulierung konstruieren: Für $n = 3$ färben wir einfach das gesamte Dreieck schwarz. Wenn wir nun ein gültige Triangulierung für n gefunden haben, können wir folgendermaßen eine gültige Triangulierung für $n + 3$ finden: Seien A und E zwei benachbarte Eckpunkte des $n-$Ecks. Dann können wir dazwischen drei weitere Punkte B, C, D in dieser Reihenfolge einfügen. Im ursprünglichen $n-$Eck behalten wir die vorherige Triangulierung und Färbung bei. Außerdem verbinden wir die Punkte A und C sowie C und E. Die Dreiecke ABC und CDE färben wir schwarz und das Dreieck ACE weiß. Damit erhalten wir eine gültige Triangulierung im $n + 3-$Eck.
Wenn n nicht durch 3 teilbar ist, nennen wir S die Anzahl an schwarzen Dreiecken und W die Anzahl an weißen Dreiecken. Dann ist $3S$ die Gesamtanzahl von Ecken von schwarzen Dreiecken (wobei gleiche Eckpunkte mehrfach gezählt werden) und $3W$ die Gesamtanzahl von Ecken von weißen Dreiecken. Jeder Eckpunkt zählt jetzt aber einmal öfters zu den Eckpunkten von schwarzen Dreiecken als zu den Eckpunkten von weißen Dreiecken, also gilt $3S - 3W = n$. Daraus folgt, dass n durch 3 teilbar sein muss, falls eine gültige Triangulierung existiert.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Quellen der Aufgaben

Aufgabe 1.

Mathematical Duel 2019 C–T–3 [Kategorie C, Teamwettbewerb Aufgabe 3] (Robert Geretschläger), übersetzt und bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team.
Hinweis: Gesammelte Aufgaben zwischen 2009–2017 siehe [1].

Aufgabe 2.

siehe [2, Individual Aufgabe 2], übersetzt und bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team

Aufgabe 3.

siehe [4, Teambewerb Aufgabe 3], übersetzt und bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team

Aufgabe 4.

siehe [5, BWF 2007, Aufgabe 5], bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team

Aufgabe 5.

siehe [3, Individual Aufgabe 2], bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team

Literatur

[1] Mathematical Duel: Gesammelte Aufgaben 2009-2017. `http://mathematicalduel.eu/index.php/problems/archive`. (aufgerufen am 25.01.2021).

[2] Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (MEMO) 2008. `https://kag.upol.cz/memo/texty/2sj_r_eng.pdf`. (aufgerufen am 25.01.2021).

[3] Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (MEMO) 2014. `https://www.math.aau.at/OeMO/Downloads/datei/180`. ÖMO-Account notwendig (aufgerufen am 25.01.2021).

[4] Mitteleuropäische Mathematik Olympiade (MEMO) 2016. `https://www.math.aau.at/MEMO2016/?page_id=20`. (aufgerufen am 25.01.2021).

[5] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2000–2008: Aufgaben und Lösungen.* Nova MD, 2018. Auflage 1.3.