51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 29. Jänner 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Greilhuber zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 26. Jänner 2020 wird das Aufgabenblatt um Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Greilhuber bespricht mit euch die Aufgaben im virtuellen Olympiade-Kurs am 29. Jänner 2020 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Dokument um ausgewählte Lösungsvorschläge und Quellenangaben.

Schreibe uns gerne, wenn du an unserem virtuellen Olympiade-Kurs teilnehmen möchtest. Du bist jederzeit herzlich willkommen.

Aufgaben

Aufgabe 1. Sei ABC ein Dreieck, und M der Mittelpunkt der Seite BC.
Man zeige, dass $\sin(\angle BAM) : \sin(\angle MAC) = |AC| : |AB|$ gilt. Die Gerade AM schneide den Umkreis des Dreiecks ABC ein zweites Mal in D. Zeige, dass $|AB| \cdot |BD| = |AC| \cdot |CD|$ gilt.

Aufgabe 2. Sei ABC ein Dreieck mit Umkreis k. Die Tangenten an k durch B und C schneiden einander in T, und die Gerade AT schneide k ein zweites Mal in D.
Man zeige, dass $|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BD|$ gilt. Nun sei N der Mittelpunkt der Strecke AD. Man zeige, dass die Dreiecke ABN und CAN sowie BDN und DCN jeweils zueinander ähnlich sind.

Aufgabe 3. Man zeige die Summensätze für den Sinus und Cosinus,

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta),$$

für $0 \leq \alpha, \beta \leq 90°$.

Aufgabe 4. Sei ABC ein Dreieck. Man zeige, dass alle vier Normalprojektionen von A auf die Innen- und Außenwinkelsymmetralen durch die Punkte B und C auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Aufgabe 5. Sei $ABCD$ ein Quadrat. Nun werden die Seiten AB, BC, CD und DA in ihren Anfangspunkten A, B, C bzw. D um jeweils $15°$ nach innen gedreht. Man zeige, dass das von ihnen eingeschlossene, kleinere Quadrat den Inkreis des großen Quadrats als Umkreis hat.

Aufgabe 6. Ein Punkt T liege außerhalb eines Kreises k. Die Tangenten an k durch T berühren k in P und Q, und eine weitere Gerade durch T schneide k in A und B. Der Mittelpunkt von AB sei mit M bezeichnet. Man zeige, dass die Winkel $\angle AMP$ und $\angle QMA$ gleich sind.

Aufgabe 7. *Augapfelsatz.* Gegeben seien zwei Kreise k_1 und k_2 mit disjunktem Inneren. Die beiden Tangenten durch den Mittelpunkt von k_1 und k_2 schneiden k_1 in A_1 und B_1, und die Tangenten durch den Mittelpunkt von k_2 und k_1 schneiden k_2 in A_2 und B_2. Man zeige, dass $|A_1B_1| = |A_2B_2|$.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Wieder Sinussatz.

Aufgabe 2. Ein längeres Beispiel, bei dem zuerst bewiesen werden sollte, dass AD gespiegelt an der Winkelsymmetrale durch A eine Schwerlinie von ABC ist. Die Gerade AD und die analog definierten Geraden durch B und C werden Symmedianen genannt.

Aufgabe 3. Sinus-Flächenformel im bekannten Einheitskreis-Bild benutzen.

Aufgabe 4. Man berechne den Abstand der vier Punkte zur Geraden BC trigonometrisch.

Aufgabe 5. Man berechne das Seitenverhältnis der beiden Quadrate.

Aufgabe 6. Nahe verwandt mit der Konfiguration aus Aufgabe 2.

Aufgabe 7. Verhältnisse aufstellen.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.
Der erste Teil der Aufgabe, $\sin(\angle BAM) : \sin(\angle MAC) = |AC| : |AB|$, wurde bereits im Zuge des Beweises für Teil (1) von Aufgabe 7 des Übungsblattes am 15. Jänner gezeigt.
Da $\angle BAM$ ein Peripheriewinkel über der Sehne BD im Umkreis des Dreiecks ABC ist, gilt $2R \cdot \sin(\angle BAM) = |BD|$, wobei R den Radius des Umkreises bezeichne. (Der einfachste Weg, das zu sehen, ist, einen Punkt X so am Umkreis einzuzeichnen, dass BX ein Durchmesser ist - dann ist BDX ein rechtwinkliges Dreieck mit Innenwinkel $\angle BAM$, Hypotenuse BX und Gegenkathete BD). Analog gilt $2R \cdot \sin(\angle MAC) = |CD|$. Gleichsetzen ergibt $|AB| : |AC| = \sin(\angle MAC) : \sin(\angle BAM) = |DC| : |BD|$, woraus durch elementares Umformen die zweite Behauptung folgt.

Aufgabe 2.
Wir benutzen die Aussage aus Beispiel 6 vom Übungsblatt vom 15. Jänner, und erhalten $|DT| : |TB| = |DB| : |BA|$ sowie $|DT| : |TC| = |DC| : |CA|$, und da $|TB| = |TC|$, folgt $|DB| : |BA| = |DC| : |CA|$, womit die erste Aussage gezeigt ist.
Nun spiegeln wir D an der Streckensymmetrale von BC und erhalten einen weiteren Punkt D' am Umkreis. Für diesen Punkt gilt $|AB| \cdot |BD'| = |AC| \cdot |CD'|$. Da das Verhältnis $|BD'| : |D'C|$ zusammen mit der Tatsache, dass D' genauso wie D auf dem Umkreisbogen BC liegt, der A nicht enthält, den Punkt D' schon eindeutig bestimmt, muss D' nach Beispiel 8 der zweite Schnittpunkt der Schwerlinie durch A mit dem Umkreis sein.
Die Bedingung $|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BD|$ ist symmetrisch bezüglich Vertauschung von AD und BC, und damit muss es sich bei der Linie BC auch um die Spiegelung der Schwerlinie BN des Dreiecks ABD an der Winkelsymmetrale von $\angle DBA$ handeln. Wir folgern

$$\angle NBA = \angle DBC = \angle DAC = \angle NAC, \qquad \angle ACN = \angle BCD = \angle BAD = \angle BAN,$$

womit die Dreieck BAN und ACN ähnlich sind, da sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

Aufgabe 3.
Es sei O der Mittelpunkt des Einheitskreises k, und C der Schnittpunkt der positiven x-Achse mit k. Der Punkt A liege so auf k, dass $\angle COA = \alpha$, und der Punkt B liege so auf k, dass $\angle BOC = \beta$, also insgesamt $\angle BOA = \alpha + \beta$ gilt.
Nach der Sinus-Flächenformel ist der Flächeninhalt des Dreiecks AOB durch $[AOB] = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| \cdot \sin(\angle BOA) = \frac{1}{2} 1 \cdot 1 \cdot \sin(\angle BOA) = \frac{1}{2}\sin(\alpha + \beta)$ gegeben. Es muss also dieser Flächeninhalt berechnet werden. Dazu bezeichnen wir die Höhenfußpunkte von A und B auf OC mit E bzw. F, und den Schnittpunkt von AB mit X. Nach dem Strahlensatz gilt $|XE| : |XA| = |XF| : |XB|$, und damit folgt $[AXF] = \frac{1}{2}|XE| \cdot |XB| \cdot \sin(\angle EXB) = \frac{1}{2}|XF| \cdot |XA| \cdot \sin(\angle FXA) = [XEB]$. Die Dreiecke AXF und XEB sind also flächengleich. Die Höhen $|EA|$ und $|FB|$ sind durch $\sin(\alpha)$ bzw. $\sin(\beta)$ gegeben, und die Streckenlängen $|OF|$ bzw. $|OE|$ durch $\cos(\beta)$ bzw. $\cos(\alpha)$. Mit der gewöhnlichen Flächeninhaltsformel erhalten wir $[EOB] = \frac{1}{2}|OE| \cdot |FB| = \frac{1}{2}\cos(\alpha)\sin(\beta)$ und $[AOF] = \frac{1}{2}|OF| \cdot |EA| = \frac{1}{2}\cos(\beta)\sin(\alpha)$. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= 2[AOB] = 2\left([AOX] + [XOB]\right) \\ &= 2\left([AOF] - [AXF] + [EOB] + [XEB]\right) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\beta)\sin(\alpha).\end{aligned}$$

Aufgabe 4.

Es seien D und E die Höhenfußpunkte von A auf die Innen- bzw. Außenwinkelsymmetrale von $\beta := \angle CBA$, und X und Y die Höhenfußpunkte von D bzw. E auf BC. Wir berechnen nun den Normalabstand dieser Punkte zur Geraden BC. Da die Dreiecke BDA und BXD rechtwinklig sind, gilt $|BD| = \cos(\frac{\beta}{2})|BA|$ und $|XD| = \sin(\frac{\beta}{2})|BD| = \sin(\frac{\beta}{2})\sin(\frac{\beta}{2})|BA|$. Mit dem Summensatz für den Sinus erhalten wir $|XD| = \frac{1}{2}\sin(\beta)|BA|$, was genau der halben Höhe von A auf BC entspricht. Weil $\angle DBE = \angle ADB = \angle BEA = 90°$ gilt, ist $BDAE$ ein Rechteck, und damit $\angle EDB = \angle DBA = \angle CBD$. Nach dem Z-Winkel-Satz ist die Gerade DE daher parallel zu BC, und somit auch der Normalabstand von E auf BC genau die halbe Höhe von A auf BC. Durch Austauschen der Punkte B und C im vorhergehenden Argument erhalten wir, dass auch die Höhenfußpunkte von A auf die zwei Winkelsymmetralen durch C denselben Normalabstand zur Geraden BC haben, und damit liegen alle vier Punkte auf einer gemeinsamen Geraden.

Aufgabe 5.

Offensichtlich haben der Inkreis des Quadrats $ABCD$ und der Umkreis des kleineren Quadrats, welches wir mit $PQRS$ bezeichnen wollen, denselben Mittelpunkt. Damit muss nur gezeigt werden, dass ihr Radius gleich ist. Bezeichnen wir das Verhältnis der Seitenlängen der beiden Quadrate mit λ, sowie Umkreis- und Inkreisradius von $ABCD$ mit R bzw. r. Der Umkreis von $PQRS$ hat Radius λR, und damit ist noch zu zeigen, dass $\lambda = r : R$ gilt. Im rechtwinkligen Dreieck ABP ist $|AB|$ die Hypotenuse, und $|AP|$ die Ankathete des Winkels $\angle BAP$, also gilt $|AP| = \cos(15°)|AB|$. Aus Symmetriegründen gilt $|AS| = |BP| = \sin(15°)|AB|$, und wir erhalten $\lambda = |SP| : |AB| = \cos(15°) - \sin(15°)$. Das Verhältnis $r : R$ von In- und Umkreisradius eines Quadrates ist $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(45°) = \cos(45°)$. Mit der Summenformel für den Sinus erhalten wir $\lambda\cos(45°) = \sin(45°)\cos(15°) - \cos(45°)\sin(15°) = \sin(45° - 15°) = \sin(30°) = \frac{1}{2}$. Es gilt daher $\lambda = \frac{1}{2\cos(45°)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = r : R$.

Aufgabe 6.

Die Konfiguration in diesem Beispiel ist tatsächlich ident mit der in Aufgabe 2, nur, wie oft in der Geometrie, aus einem etwas anderem Blickwinkel betrachtet. Nach den Umbenennungen $A \leftrightarrow A$, $Q \leftrightarrow B$, $P \leftrightarrow C$, $T \leftrightarrow T$ und $M \leftrightarrow N$ sind wir genau in der Situation von Aufgabe 2, wo bewiesen wurde, dass die Dreiecke ABN und CAN ähnlich sind, und damit insbesondere die Winkel $\angle CNA$ und $\angle ANB$ gleich sind - aber diese sind einfach die umbenannten Winkel $\angle PMA$ und $\angle AMQ$.

Aufgabe 7.

Wir bezeichnen die Mittelpunkte der Kreise k_1 und k_2 mit O_1 bzw. O_2, und die Mittelpunkte der Strecken A_1B_1 und A_2B_2 mit M_1 bzw. M_2. Die Berührpunkte der Tangenten O_1A_1 und O_2A_2 mit den Kreisen k_2 bzw. k_1 seien mit C_1 bzw. C_2 bezeichnet. Weil die rechtwinkligen Dreiecke $O_1M_1A_1$ und $O_1C_2O_2$ ähnlich sind, gilt $|O_1A_1| : |M_1A_1| = |O_1O_2| : |C_2O_2|$, d.h. $\frac{1}{2}|A_1B_1| = \frac{r_1r_2}{d}$, wenn wir die Radien von k_1 und k_2 mit r_1 und r_2 und die Streckenlänge O_1O_2 mit d bezeichnen. Der Ausdruck $\frac{r_1r_2}{d}$ ist aber symmetrisch in Vertauschung von k_1 und k_2, also gilt auch $|A_2B_2| = \frac{r_1r_2}{d}$.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Quellen der Aufgaben

Aufgabe 1.
Allgemein bekannt, bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team.

Aufgabe 2.
A. Akopyan, Geometry in Figures, Problems 4.4.6 and 4.4.7. [1], bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team.

Aufgabe 3.
Allgemein bekannt, bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team.

Aufgabe 4.
A. Akopyan, Geometry in Figures, Problem 4.3.17. [1], bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team.

Aufgabe 5.
A. Akopyan, Geometry in Figures, Problem 5.3.6. [1], bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team.

Aufgabe 6.
A. Akopyan, Geometry in Figures, Problem 5.4.24. [1], bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team.

Aufgabe 7.
A. Akopyan, Geometry in Figures, Problems 6.2.1. [1], bearbeitet von Josef Greilhuber und vom MmF-Team.

Literatur

[1] Arseniy Akopyan. *Geometry in Figures.* IST Austria, 2017. second edition.