51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 12. Februar 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Nina Mitrovic zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 09. Februar 2021 wird das Aufgabenblatt um Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Nina Mitrovic bespricht mit euch die Aufgaben im virtuellen Olympiade-Kurs am 12. Februar 2020 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Dokument um ausgewählte Lösungsvorschläge und Quellenangaben.

Schreibe uns gerne, wenn du an unserem virtuellen Olympiade-Kurs teilnehmen möchtest. Du bist jederzeit herzlich willkommen.

Aufgaben

Aufgabe 1. Sei $ABCD$ ein Rechteck und k ein Kreis mit dem Mittelpunkt in der Mitte des Rechtecks. Der Kreis k schneidet die Seite AB in den Punkten K und L und die Seite CD in den Punkten M und N. Es gilt noch $LN \perp AC$. Wie ist das Verhältnis der Seiten des Rechtecks, wenn der Mittelpunkt der Seite AN auf dem Kreis liegt?

Aufgabe 2. Sei U der Umfang und F der Flächeninhalt eines Rechtecks.
Beweise:

$$U \geq \frac{24F}{U+F+1}$$

Aufgabe 3. Sei S der Inkreismittelpunkt eines Dreiecks ABC und die Winkelsymmetrale von $\angle BAC$ schneidet die Seite BC im Punkt D. Beweise, dass $|AS| : |SD| = 2 : 1$ genau dann gilt, wenn $|CA| + |AB| = 2 \cdot |BC|$

Aufgabe 4. Gegeben ist ein Dreieck ABC. Die Symmetrale in A schneidet die Seite BC in A', die Symmetrale in B schneidet die Seite AC in B' und die Symmetrale in C schneidet die Seite AB in C'. Sei S der Inkreismittelpunkt des Dreiecks. Zusätzlich gilt: $|AS| : |SA'| = 3 : 2$, $|BS| : |SB'| = 4 : 3$ und $|AB| = 12$. Bestimme die Länge der verbleibenden Seiten des Dreiecks.

Aufgabe 5. Über den Seiten eines Dreiecks ABC mit Flächeninhalt P befinden sich Rhomben $ABED$, $BCGF$ und $CAIH$ so, dass $\angle ABE = \angle BAC$, $\angle BCG = \angle CBA$ und $\angle CAI = \angle ACB$ gilt. Beweise, dass die Summe der Flächen der drei Rhomben größer oder gleich $6 \cdot P$ ist. Zeige, dass Gleichheit nur dann gilt, wenn das Deieck gleichseitig ist.

Aufgabe 6. Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Ein n-Eck A_1, A_2, $\ldots A_n$ besitzt einen Umkreis. Beweise, dass es drei Punkte $A, B, C \in \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ gibt, für die gilt:

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 \geq |A_1A_2|^2 + |A_2A_3|^2 + \ldots |A_nA_1|^2$$

Aufgabe 7. In einem gleichschenkligen Trapez $ABCD$ hat die Mittellinie $\perp AB, CD$ die Länge l und die Diagonalen stehen normal aufeinander. Bestimme die Fläche des Trapezes.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Finde einen Rhombus.

Aufgabe 2. AM,- GM-Ungleichung.

Aufgabe 3. Betrachte die Flächen der bestimmten Dreiecke.

Aufgabe 4. Punktpotenz für drei passende Dreiecke

Aufgabe 5. Sinussatz und AM-, GM-Ungleichung

Aufgabe 6. Kosinussatz

Aufgabe 7. Verlängere die Seite AB bis zu einem Punkt E, sodass $|BE| = |CD|$

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.
Sei S der Mittelpunkt und r der Radius des Kreises, und P der Mittelpunkt der Seite AN. Da $LN \perp AC$, ist das Dreieck ASN rechtwinklig. Daraus folgt, dass $|AP| = |PN| = |PS| = r = |NS|$ und daher ist NPS gleichseitig. Da PS die Mittellinie des Dreiecks ALN ist, muss auch ANL gleichseitig sein. Das Dreieck ADN ist rechteckig mit Hypotenuse der Länge $2r$ und $\angle NAD = 90 - \angle LAN = 30$. Daher gilt $DN = \frac{1}{2}|AN| = r$ und $|DA| = |DN|\sqrt{3} = r\sqrt{3}$.
Das viereck $ALCN$ ist ein Rhombus, und daher $|NC| = |AN| = 2r$. Es gilt also: $|DC| = |DN| + |NC| = r + 2r = 3r$ und das gesuche Verhältniss ist $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Aufgabe 2.
Seien a und b die Längen der Seiten. Dann gilt: $U = 2a + 2b$ und $F = ab$ und die gegebene Ungleichung ist äquivalent zu: $2(a+b)(2a+2b+ab+1) \geq 24ab$. Wegen AM-GM gilt: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ und $a+a+b+b+ab+1 \geq 6\sqrt{ab}$. Daraus folgt:

$$2(a+b)(2a+2b+ab+1) \geq 2 \cdot 2\sqrt{ab} \cdot 6\sqrt{ab} = 24ab$$

Somit ist die Ungleichung bewiesen.

Aufgabe 3.
Wir bezeichnen BC, CA, AB mit a, b, c. Wir wollen folgendes beweisen:
1. Wenn $|AS| : |SD| = 2 : 1$, dann gilt $b + c = 2a$ 2. Wenn $b + c = 2a$, dann gilt $|AS| : |SD| = 2 : 1$.
1. Dreiecke ASB und DSB haben gleiche Hčhen aus dem Punkt B. Da $|AS| : |SD| = 2 : 1$ gilt: $F(ASB) = 2F(BSD)$. Ähnlich zeigt man $F(ASC) = 2F(CSD)$. Daher gilt:

$$F(ASC) + F(ASB) = 2F(BSC)$$

und $\frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = 2\frac{ar}{2}$. Was äquivalent zu $b + c = 2a$ ist.
2.Es gilt $\frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = 2\frac{ar}{2}$ maw $F(ASC) + F(ASB) = 2F(BCS)$. Die äquivalente Gleichung dazu ist

$$P(ASC) + P(ASB) = 2(P(SDC) + P(SDB))$$

und auch

$$\frac{1}{2}|AS|h_c + \frac{1}{2}|AS|h_b = 2(\frac{1}{2}|DS|h_c + \frac{1}{2}|DS|h_b)$$

wobei h_c und h_b die Höchen aus B und C auf AD sind.
Weiter haben wir:

$$|AS| = (h_b + h_c)2|SD|(h_b + h_c)$$

, woraus die Behauptung sofort folgt.

Aufgabe 4.
Da BB' eine Symmetrale von $\angle ABA'$ ist, folgt: $|AB| : |A'B| = |AS| : |A'S| = 3 : 2$, daher gilt: $|A'B| = \frac{2c}{3}$
Ähnlich gilt für das Dreieck ABB': $|AB'| = \frac{3c}{4}$.
Für ACA' und BCB' haben wir noch: $|AC| : |A'C| = |AS| : |A'S| = 3 : 2$ und $|BC| : |B'C| = |BS| : |B'S| = 4 : 3$.
Diese Gleichungen ergeben das Gleichungsystem:

$$3a - 2c = 2b$$

$$4b - 3c = 3a$$

Und daher ist die Lösung $a = 28, b = 30$.

Aufgabe 5.
Seien die Flächen der Rhombusen P_a, P_b und P_c, und bezeichnen wir die Winkeln des Dreiecks mit α, β und γ.
Dann gilt: $P_a = a^2 sin\beta$, $P_b = b^2 sin\gamma$, $P_c = c^2 sin\alpha$
Wir benutzen den Sinussatz und bekommen:

$$P_a + P_b + P_c = \frac{a^2b + b^2c + c^2}{2R} = \frac{1}{2R}(a^2b + b^2c + c^2a)$$

Aus AM-GM Ungleichung kriegt man: $a^2b+b^2c+c^2a \geq 3abc$, wobei man genau dann die Gleichung erhält, wenn $a^2b = b^2c = c^2a$. Man überlegt sich leicht, dass diese Bedingung äquivalent zur Bedingung $a = b = c$ ist, und daraus folgt die Behauptung

Aufgabe 6.
Für $n = 3$ ist die Behauptung triviall.
Für $n \geq 4$ hat jedes n-eck mindestens einen Winkel ≥ 90. Sei $\angle XYZ$ dieser Winkel. Dann können wir die Punkte X und Z verbinden(den Winkel $\angle XYZ$ weglassen).
Wir behaupten, dass die Summe der Quadraten von Seiten des neuen $(n-1)$-ecks nicht kleiner ist, als die Summe der Quadraten von Seiten des alten n-ecks.
Es gilt wegen dem Kosinussatz(da der Winkel in Y nicht spitzwinklig ist):

$$|XZ|^2 = |XY|^2 + |YZ|^2 - 2|XY||YZ|cos(\angle XYZ) \geq |XY|^2 + |YZ|^2$$

.
Wir fahren mit dem Verfahren fort, dh wir entfernen in jedem Schritt einen Winkel bis wir ein Dreick ABC bekommen. Seine Punkten erfüllen die gegebene Ungleichung.

Aufgabe 7.
Bezeichnen wir $|AB| = a, |CD| = c, |BD| = d$ und die Höche des Dreicks mit v. Wegen den Voraussetzungen gilt: $l = \frac{a+c}{2}$, und da die Diagonalen gleich sind $|AC| = |BD| = d$.
Verlängern wir die Seite AB bis einem Punkt E, sodass $|BE| = |DC|$.
Dann ist $BECD$ paralellogram und es gilt $|CE| = |DB|$ und $CE||DB$, daher muss $|CE| = d$.
Das Dreieck AEC ist ein gleichseitig rechteckiges Dreieck, und daher ist v gleich der Hälfte der Länge von der Hypotenuze. Also $v = \frac{1}{2}|AE| = \frac{a+c}{2} = l$ und endlich:

$$F(ABCD) = \frac{a+c}{2} \cdot v = l^2$$

Quellenangaben zu den Aufgaben

Quellen der Aufgaben

Aufgabe 1.
aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.
aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.
aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.
aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.
aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 6.
aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.
aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Literatur

[1] Kroatischer Regionalwettbewerb Natjecanja iz matematike u RH. http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm. (aufgerufen am 23.02.2021).