51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 19. Februar 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Nina Mitrovic zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 16. Februar 2021 wird das Aufgabenblatt um Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Nina Mitrovic bespricht mit euch die Aufgaben im virtuellen Olympiade-Kurs am 19. Februar 2020 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Dokument um ausgewählte Lösungsvorschläge und Quellenangaben.

Schreibe uns gerne, wenn du an unserem virtuellen Olympiade-Kurs teilnehmen möchtest. Du bist jederzeit herzlich willkommen.

Aufgaben

Aufgabe 1. Eine quadratische Tafel Schokolade besteht aus $n \times n$ einzelnen Schokoladenstücken. A und B beißen abwechselnd von der Tafel ab, nach folgender Regel:
Man wählt ein noch vorhandenes Stück aus und beißt es ab, inklusive aller noch vorhandenen Stücke, die weiter rechts oben als dieses Stück stehen (auch die, die in der gleichen Zeile weiter rechts oder in der gleichen Spalte weiter oben stehen). Man beißt also alle noch vorhandenen Stücke ab, die von dem Rechteck, dass das ausgewählte Stück und das rechte obere Eck der gesamten Schokoladentafel als gegenüberliegende Ecken hat, überdeckt werden.
Das ganz linke untere Stück der Schokoladentafel ist vergiftet. A beginnt. Wer überlebt?

Aufgabe 2. Auf dem Tisch stehen zwei Schalen; in der einen liegen p, in der anderen q Spielsteine. Zwei Spieler A und B ziehen abwechselnd, wobei A beginnt. Wer am Zug ist

– nimmt aus einer der Schalen einen Stein weg

– oder nimmt aus beiden Schalen je einen Stein weg

– oder legt einen Stein aus einer der Schalen in die andere.

Gewonnen hat, wer den letzten Stein wegnimmt. Unter welchen Bedingungen kann A, unter welchen Bedingungen kann B den Gewinn erzwingen?

Aufgabe 3. Ein Rechteck mit Seitenlängen a und b wird in $a \cdot b$ Einheitsquadrate aufgeteilt (a, b sind positive ganze Zahlen, beide gerade).
Anja und Bernd färben nun abwechselnd jeweils ein Quadrat, das aus einem oder mehreren bislang noch ungefärbten Einheitsquadraten dieses Rechtecks besteht. Wer nicht mehr färben kann, hat verloren.
Anja beginnt. Bestimme alle Paare (a, b), für die sie den Gewinn erzwingen kann.

Aufgabe 4. Zu Beginn eines Spiels liegen in drei Kisten $2008, 2009$ bzw. 2010 Spielsteine. Anja und Bernd führen Spielzüge abwechselnd nach folgender Regel durch:

– Wer am Zug ist, wählt zwei Kisten aus, entleert sie und verteilt danach die Spielsteine aus der dritten Kiste neu auf die drei Kisten, wobei keine Kiste leer bleiben darf.

– Wer keinen vollständigen Spielzug mehr ausführen kann, hat verloren.

Wer kann den Gewinn erzwingen, wenn Anja anfängt?

Aufgabe 5. Es sei n eine positive ganze Zahl und $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Zwei Personen A und B spielen in folgender Weise: A schreibt eine Ziffer aus M auf, B hängt eine Ziffer aus M an, und so wird abwechselnd je eine Ziffer aus M angehängt, bis die $2n$-stellige Dezimaldarstellung einer Zahl entstanden ist. Ist diese Zahl durch 9 teilbar, so gewinnt B, andernfalls gewinnt A.
Für welche n kann A, für welche n kann B den Gewinn erzwingen?

Aufgabe 6. Gegeben sind 9999 Stäbe mit den Längen $1, 2, \ldots, 9998, 9999$.
Die Spieler Anja und Bernd entfernen abwechselnd je einen der Stäbe, wobei Anja beginnt. Das Spiel endet, wen nur noch drei Stäbe übrig bleiben. Lässt sich aus diesen ein nicht entartetes Dreieck bilden, so hat Anja gewonnen, andernfalls Bernd.
Wer kann den Gewinn erzwingen?

Aufgabe 7. Zwei Personen A und B machen folgendes Spiel: Sie nehmen aus der Menge $\{0, 1, 2, 3, ..., 1024\}$ abwechselnd $512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1$ Zahlen weg, wobei A zuerst 512 Zahlen wegnimmt, B dann 256 Zahlen usw.
Es bleiben zwei Zahlen a, b stehen ($a < b$). B zahlt an A den Betrag $(b - a)$. A möchte möglichst viel gewinnen, B möglichst wenig verlieren.
Welchen Gewinn erzielt A, wenn jeder Spieler seiner Zielsetzung entsprechend optimal spielt?

Aufgabe 8. Aufgabe 1, mit folgender Änderung: Die Schokoladentafel ist nicht unbedingt quadratisch, sondern besteht aus $m \times n$ Schokoladenstücken. Wer hat dann eine Gewinnstrategie (also eine Überlebensstrategie)?

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Symmetrie

Aufgabe 2. Paritäten

Aufgabe 3. Symmetrie

Aufgabe 4. Gewinn- und Verlustpositionen

Aufgabe 5. Gewinn- und Verlustpositionen

Aufgabe 6. Bernd kann erzwingen, dass zwei der übrigbleibenden Stäbe relativ kurz sind und einer relativ lang. Finde heraus, wie Bernd das machen kann und zeige dann, dass diese Stäbe die Dreiecksungleichung nicht mehr erfüllen können.

Aufgabe 7. Eine mögliche optimale Strategie von A besteht darin, die Abstände zwischen allen Zahlen möglichst gleichmäßig (und groß) zu halten. Eine mögliche optimale Strategie von B besteht darin, die Zahlen auf Gruppen aufeinanderfolgender Zahlen aufzuteilen und dafür zu sorgen, dass am Ende zwei Zahlen derselben Gruppe übrigbleiben.

Aufgabe 8. Es wurde noch keine allgemeine Gewinnstrategie gefunden. Allerdings kann man durch einen Widerspruchsbeweis zeigen, wer eine Gewinnstrategie haben muss, durch ein Argument der folgenden Form: Hätte dieser Spieler eine Gewinnstrategie, könnte der andere Spieler ... machen und hätte dadurch eine Gewinnstrategie.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.
A überlebt (außer, $n = 1$).
A wählt beim ersten Mal Abbeißen das Stück aus, dass direkt rechts oben vom vergifteten Stück liegt. Dann sind nur noch die erste Spalte und die letzte Zeile der Schokoladentafel übrig. Wenn B nun die obersten x Stücke der ersten Spalte abbeißt, beißt A die rechtesten x Stücke der letzten Zeile ab und umgekehrt. Durch die Symmetrie kann also A immer ohne vergiftet zu werden einen Bissen machen, wenn B das davor getan hat. Also wird B schlussendlich vergiftet werden.

Aufgabe 2.
Wenn p und q beide gerade sind, hat B eine Gewinnstrategie, sonst A.
Wenn p und q beide gerade sind, kann B folgendermaßen vorgehen: Wenn A aus beiden Schalen einen Stein wegnimmt oder einen Stein von einer in die andere Schale legt, nimmt B aus beiden Schalen einen Stein weg. Wenn A nur aus einer Schale einen Stein wegnimmt, nimmt B aus derselben Schale einen Stein weg. Dadurch hat A jedesmal wieder eine gerade Anzahl an Steinen in jeder Schale, wenn er dran ist. Dadurch ist auch garantiert, dass B seinen Zug immer durchführen kann: In den Schalen, aus denen B Steine entfernt, sind immer eine ungerade Anzahl an Steinen und damit mindestens ein Stein. Somit kann B immer einen weiteren Zug machen. Da B nie einen Stein von einer Schale in die andere legt, sondern immer mindestens einen Stein entfernt, endet das Spiel auch sicher und somit gewinnt B.
Wenn p und q nicht beide gerade sind, kann A im ersten Zug ein oder zwei Steine entfernen, sodass danach in jeder Schale eine gerade Anzahl an Steinen ist. Nun kann A genau die Gewinnstrategie anwenden, die wir gerade für B beschrieben haben.

Aufgabe 3.
Anja kann für jedes Paar (a, b) gewinnen.
Sei o.B.d.A $a \leq b$. Dann entfernt Anja in ihrem ersten Zug ein $a \times a$ Quadrat genau in der Mitte des Rechtecks. Dann bleibt links und rechts jeweils ein $a \times \frac{b-a}{2}$-Rechteck übrig (für $a = b$ hat Anja an dieser Stelle schon gewonnen). Bernd muss sich jetzt in jedem Zug eines dieser beiden Rechtecke aussuchen und darin ein Quadrat färben. Anja kann Bernds Zug immer genauso im anderen Rechteck durchführen. Dadurch kann sie immer ziehen und wird gewinnen.

Aufgabe 4.
Anja kann den Gewinn erzwingen.
Wir gehen erstmal sukzessive die Gewinn- und Verlustpositionen durch:
Wenn man am Zug ist und in jeder Kiste sind 1 oder 2 Spielsteine, so hat man verloren, da man keinen Zug mehr machen kann. Wenn man am Zug ist und in mindestens einer Kiste sind $3, 4, 5$ oder 6 Spielsteine, so hat man gewonnen, da man die Steine in dieser Kiste so auf die anderen Kisten aufteilen kann, dass in jeder Kiste 1 oder 2 Spielsteine sind. Wenn man am Zug ist und in jeder Kiste sind $1, 2, 7$ oder 8 Spielsteine, so hat man verloren, da man beim Aufteilen von 7 oder 8 Spielsteinen in mindestens eine Kiste $3, 4, 5$ oder 6 Spielsteine geben muss. Wenn man am Zug ist und in mindestens einer Kiste sind $9, 10, 11$ oder 12 Steine, hat man gewonnen, da man die Steine in dieser Kiste so auf die anderen Kisten aufteilen kann, dass in jeder Kiste $1, 2, 7$ oder 8 Spielsteine sind. Wenn man am Zug ist und in jeder Kiste sind $1, 2, 7, 8, 13$ oder 14 Spielsteine, hat man verloren, da man 13 oder 14 Spielsteine nicht auf drei Kisten mit $1, 2, 7$ oder 8 Spielsteinen aufteilen kann und daher eine Kiste mit $3, 4, 5, 6, 9, 10, 11$ oder 12 Steinen übrigbleibt.
Nachdem wir schön langsam das System erraten, können wir es allgemein formulieren:

Anja sorgt dafür, dass immer wenn Bernd dran ist, die Anzahl an Spielsteinen in jeder Kiste kongruent zu 1 oder 2 mod 6 ist. Man überzeugt sich leicht, dass dadurch nun, egal wie Bernd die Spielsteine aufteilt, für Anja nun in mindestens einer Kiste die Anzahl an Spielsteinen kongruent zu $3, 4, 5$ oder 6 ist. Sie kann nun diese Kiste so neu aufteilen, dass Bernd wieder nur Kisten mit zu 1 oder 2 kongruenten Anzahlen vorfindet (z.B. kann sie eine Kiste mit $x \equiv 4$ Steinen auf zwei Kisten mit jeweils einem Stein und einer Kiste mit $x - 2 \equiv 2$ Steinen aufteilen). Da positive Zahlen, die kongruent zu $3, 4, 5$ oder 6 mod 6 sind, größergleich 3 sein müssen, kann Anja ihren Zug immer durchführen. Also wird schlussendlich Bernd verlieren, da Anja am Anfang z.B. eine Kiste mit $2010 \equiv 6$ Steinen hat.

Aufgabe 5.
B kann genau dann den Gewinn erzwingen, wenn n durch 9 teilbar ist. Andernfalls kann A den Gewinn erzwingen.
Offensichtlich müssen wir nur die Ziffernsumme der gebildeten Zahl modulo 9 betrachten. Mit "Ziffernsumme" ist also im folgenden immer "Ziffernsumme modulo 9" gemeint. Wir fangen von hinten an: Wenn die Ziffernsumme der Zahl vor B's letztem Zug $3, 4, 5, 6, 7$ oder 8 ist, kann B gewinnen, indem er seine letzte Zahl aus M entsprechend wählt. A gewinnt also genau dann, wenn er dafür sorgt, dass die Ziffernsumme vor B's letztem Zug $0, 1$ oder 2 ist. A kann das genau dann erreichen, wenn die Ziffernsumme vor seinem eigenen letzten Zug nicht 2 ist, den alle anderen Ziffernsummen kann er durch Auswahl eines geeigneten Elements aus M auf $0, 1$ oder 2 bringen. Daher gilt: B kann genau dann erzwingen, dass die Ziffernsumme am Ende 0 ist, wenn er erzwingen kann, dass die Ziffernsumme nach $2(n-1)$ Zügen 2 ist. Andernfalls kann A verhindern, dass die Ziffernsumme am Ende 0 ist. Ganz analog stellen wir fest: B kann genau dann erzwingen, dass die Ziffernsumme nach $2(n-1)$ Zügen 2 ist, wenn er erzwingen kann, dass die Ziffernsumme nach $2(n-2)$ Zügen 4 ist. Und so geht es weiter: B gewinnt genau dann, wenn er erzwingen kann, dass die Ziffernsumme nach $2n$ Zügen 0, nach $2(n-1)$ Zügen 2, nach $2(n-2)$ Zügen 4, nach $2(n-3)$ Zügen 6, nach $2(n-4)$ Zügen 8, nach $2(n-5)$ Zügen 1, nach $2(n-6)$ Zügen 3, nach $2(n-7)$ Zügen 5, nach $2(n-8)$ Zügen 7, nach $2(n-9)$ Zügen 0 ist. Aber hier wiederholt sich das Muster.
Offensichtlich ist die Ziffernsumme am Anfang, also nach $n \cdot 0$ Zügen, 0. Daher kann B genau dann den Sieg erzwingen, wenn n durch 9 teilbar ist.

Aufgabe 6.
Bernd kann den Gewinn erzwingen.
Bernd teilt die Stäbe in zwei Gruppen auf: Die kurze Gruppe mit den Stäben der Längen 1 bis 5000 und die lange Gruppe mit den Stäben der Längen 5001 bis 9999. Nach einem Zug von Anja wird Bernd immer einen Stab aus der anderen Gruppe entfernen, als aus der, aus der Anja gerade einen Stab entfernt hat. Dadurch werden aus jeder Gruppe gleich viele Stäbe entfernt und da in der kurzen Gruppe ein Stab mehr ist, werden zwei Stäbe aus der kurzen und ein Stab aus der langen Gruppe übrigbleiben.
Außerdem geht Bernd nach folgender Regel vor: Wenn er einen Stab aus der kurzen Gruppe entfernen muss, entfernt er den längsten Stab aus dieser Gruppe. Wenn er einen Stab aus der langen Gruppe entfernen muss, entfernt er den kürzesten Stab aus dieser Gruppe. Seien $a < b < c$ die Längen der übrigbleibenden Stäbe. Durch das Vorgehen von Bernd sind a und b kürzer als die Stäbe, die Bernd entfernt hat, und c ist länger als die Stäbe, die Bernd entfernt hat. Da Bernd insgesamt 4998 Stäbe entfernt hat, gilt also $c - b \geq 4999$. Daraus folgt $c - a - b \geq 4999 - a \geq 0$ (da a in der kurzen Gruppe ist und nicht 5000 sein kann, da b größer als a und auch in der kurzen Gruppe ist). Also gilt $c \geq a + b$ und damit ist die Dreiecksungleichung nicht erfüllt (außer für $c = a + b$, was aber ein entartetes Dreieck ergibt).

Aufgabe 7.
A erzielt einen Gewinn von 32.
A kann erzwingen, dass sein Gewinn mindesten 32 ist: Er kann in seinem ersten Zug die Zahlen $\{1, 3, 5, ..., 1021, 1023\}$ wegnehmen und genauso in jedem weiteren Zug genau jede zweite noch verbliebene Zahl. Nach seinem ersten Zug ist daher die Differenz zwischen zwei beliebigen Zahlen mindestens 2, nach seinem zweiten Zug ist die Differenz zweier beliebiger Zahlen mindestens 4, etc. Da A 5 Züge hat, muss damit die Differenz der beiden letzten Zahlen mindestens $2^5 = 32$ sein.
B kann erzwingen, dass A's Gewinn höchstens 32 ist: Er teilt die Zahlen in 32 Gruppen aufeinanderfolgender Zahlen auf: Die erste Gruppe beinhaltet 33 Zahlen, nämlich die Zahlen $0 - 32$, die anderen 31 Gruppen beinhalten immer die nächsten 32 aufeinanderfolgenden Zahlen. B will nun erreichen, dass die beiden Zahlen am Ende aus der gleichen Gruppe stammen. Dadurch ist ihre Differenz offensichtlich höchstens 32. Nach A's erstem Zug sind noch 513 Zahlen übrig. Diese sind irgendwie auf die 32 Gruppen aufgeteilt. Daher müssen in den 16 Gruppen, in denen die wenigsten Zahlen übrig sind, weniger als $\frac{513}{2}$, also höchsten 256 Zahlen sein. B kann also alle Zahlen aus diesen 16 Gruppen entfernen (wobei vielleicht manche der Gruppen schon direkt nach dem Zug von A komplett leer waren). Wenn er noch weitere Zahlen entfernen muss, kann er diese beliebig wählen. Nach A's nächstem Zug sind insgesamt 129 Zahlen übrig. B hat dafür gesorgt, dass 16 Gruppen schon fix leer sind. Die 129 Zahlen sind also auf die anderen 16 Gruppen verteilt. Dadurch lassen sich wieder 8 Gruppen finden, die zusammen höchstens 64 Steine enthalten und die B daher in seinem Zug leeren kann. Nach diesem Schema geht es weiter: B kann im dritten Zug 4 weitere Gruppen leeren, im zweiten Zug 2 und im letzten Zug 1. Damit hat B insgesamt 15 Gruppen geleert, also müssen die verbleibenden zwei Steine in derselben Gruppe sein.

Aufgabe 8.
A hat eine Gewinnstrategie. (Falls es keine 1×1-Tafel ist.)
Es wurde noch keine allgemeine Gewinnstrategie gefunden. Allerdings muss es bei dieser Art von komplett durchbestimmten Spielen eine Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler geben. Wir können per Widerspruchsbeweis zeigen, dass B keine Gewinnstrategie hat:
Nehmen wir an, Spieler B hat eine Gewinnstrategie. Spieler A kann jetzt als ersten Zug nur das ganz rechts obere Feld der Schokoladentafel abbeißen. Nehmen wir an, dass B laut seiner Gewinnstrategie jetzt das Feld mit den Koordinaten (a, b) abbeißen muss, um sicher zu gewinnen. Dann hätte aber A auch als ersten Zug selbst das Feld (a, b) abbeißen können. Dann wäre die Situation für A genau dieselbe gewesen, wie sie jetzt für B ist, da A beim Abbeißen von Feld (a, b) sicher auch das rechte obere Stück mit entfernt hätte. Demnach hätte A eine Gewinnstrategie, bei der er am Anfang Feld (a, b) abbeißt. Das ist ein Widerspruch dazu, dass B eine Gewinnstrategie hat.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Quellen der Aufgaben

Aufgabe 1.
siehe [3, Chomp], erstellt von Nina Mitrovic und Veronika Schreittter, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 2.
siehe [1, 1992], erstellt von Nina Mitrovic und Veronika Schreittter, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 3.
siehe [2, 2015], erstellt von Nina Mitrovic und Veronika Schreittter, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.
siehe [4, 2009], erstellt von Nina Mitrovic und Veronika Schreittter, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 5.
siehe [4, 1984], erstellt von Nina Mitrovic und Veronika Schreittter, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 6.
siehe [4, 1984], erstellt von Nina Mitrovic und Veronika Schreittter, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.
siehe [4, 1984], erstellt von Nina Mitrovic und Veronika Schreittter, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 8.
siehe [3, Chomp], erstellt von Nina Mitrovic und Veronika Schreittter, bearbeitet vom MmF-Team.

Literatur

[1] 50 Jahre Bundeswettbewerb Mathematik. `https://www.mathe-wettbewerbe.de/bwm/aufgaben`. (aufgerufen am 23.02.2021).

[2] Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene Teil 1, 2015. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/96`. (aufgerufen am 23.02.2021).

[3] Chomp. `https://de.wikipedia.org/wiki/Chomp`. (aufgerufen am 23.02.2021).

[4] Eckard Specht Hans-Heinrich Langmann, Erhard Quaisser. *Bundeswettbewerb Mathematik. Die schönsten Aufgaben.* Springer Spektrum, 2016.