51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 12. Februar 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Nina Mitrovic zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 09. März 2021 wird das Aufgabenblatt um Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Nina Mitrovic bespricht mit euch die Aufgaben im virtuellen Olympiade-Kurs am 12. Februar 2020 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Dokument um ausgewählte Lösungsvorschläge und Quellenangaben.

Schreibe uns gerne, wenn du an unserem virtuellen Olympiade-Kurs teilnehmen möchtest. Du bist jederzeit herzlich willkommen.

Aufgaben

Aufgabe 1. Finde alle natürlichen Lösungen von :

$$x^2 - xy + y^2 = 1$$

Aufgabe 2. Finde alle Lösungen vom linearen Gleichungsystem:

$$x + y + z = 0$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = -90$$

Aufgabe 3. Finde alle ganzen Zahlen x, y für die gilt:

$$y^4 + x^{2010} = 2y^2 - 1$$

Aufgabe 4. Finde alle ganzen Zahlen x, y sodass:

$$x^{2010} = y^{2010} + 2010$$

Aufgabe 5. Löse die Gleichung:

$$3 \cdot 4^x + (3x - 10) \cdot 2^x + 3 - x = 0$$

Aufgabe 6. Finde alle ganzen Lösungen von:

$$a(a - b) = b$$

Aufgabe 7. Wie viele Paare von ganzen Zahlen (x, y) gibt es, sodass:

$$(x + y + 2012)^2 = x^2 + y^2 + 2012^2$$

Aufgabe 8. Finde alle natürlichen n sodass:

$$5^n + 2^{n+1}3^n = 9^n + 4^n$$

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Große Abschätzung.

Aufgabe 2.

Aufgabe 3. Bilde ein Quadrat.

Aufgabe 4. Differenz zweier Quadrate.

Aufgabe 5. Setze $t = 2^x$.

Aufgabe 6. Faktorisieren.

Aufgabe 7. Ausmultiplizieren.

Aufgabe 8. $\bmod 5$.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.
Da $x^2 - xy + y^2 = (x-y)^2 + xy$, muss die Rechte Seite gleich 1 sein. Das ist möglich nur wenn $x = y \in \{0, 1\}$ oder $|x - y| = 1$, sonst wäre das Quadrat grösser als 1.

Aufgabe 2.
Setze $z = -x - y$ in die zweite Gleichung: $x^3 + y^3 - (x + y)^3 = 90$. Daraus folgt $xy(x + y) = 30$ und daher ist $xyz = -30$. Da x, y und z ganzzahlig sind, müssen sie also die Teiler von 30 sein, dh wie müssen nur noch die Fälle überprüfen: $\{\{30, 1, 1\}, \{15, 2, 1\}, \{5, 3, 2\} \{5, 1, 6\}\}$ (weil beide Gleichungen symmetrisch sind)

Aufgabe 3.
Wir bringen alle Terme auf die rechte Seite und bekommen den äquivalenten Ausdrück: $(y^2 - 1)^2 + x^{2010} = 0$. Da die Quadrate grösser als 0 sind ausser für $|y| = 1$ und $x = 0$ sind die gesuchten Lösungen: $(0, -1)$ und $(0, 1)$

Aufgabe 4.
Wir bringen y^{2010} auf die rechte Seite und formen die Ausdrück so um:

$$(x^{1005} + y^{1005})(x^{1005} - y^{1005}) = 2010$$

. Da die linke Seite gerade ist, muss es auch die rechte sein. Daraus folgt dass x und y die gleiche Parität haben. Aber dann wäre die rechte Seite durch 4 teilbar und die linke nicht. Wir schliessen, dass es solche Zahlen nicht gibt.

Aufgabe 5.
Wir setzten $t = 2^x$ in die Gleichung ein und sie wird zu: $3t^2 + (3x - 10)t + 3 - x = 0$. Mit bekannter Formel für Quadratische Gleichungen bekommen wir: $t_1 = \frac{1}{3}$ und $t_2 = \frac{-6x+18}{6} = -x + 3$. Dann ist entweder $x_1 = -log(3)$ oder $2^x = -x + 3$. Man überlegt sich graphisch dass $x_2 = 1$.

Aufgabe 6.
Formen wir die Gleichung so um: $a^2 = b(1 + a)$, aber a und $a + 1$ sind teilerfremd. Daraus folgt dass entweder $a + 1 = 1$ oder $a + 1 = -1$ und wir kriegen die Paare $(0, 0)$ und $(-2, -4)$

Aufgabe 7.
Nach dem Quadrieren und kürzen bekommen wir $(x + 2012)(y + 2012) = 2012^2$. Wir betrachten die Primfaktorzerlegung von $2012 = 2^4 503^2$ und schliessen dass 2012 $(4 + 1)(2 + 1) = 15$ positive Teiler hat. Daher gibt es insgesamt 30 Möglichkeiten $x + 2012$ und $y + 2012$ auszuwählen.

Aufgabe 8.
Wir formen die Gleichung um: $5^n = (3^n - 2^n)^2$. Die rechte Seite ist ein Quadrat und daher muss es auch die linke sein dh n muss gerade sein. Wir faktorisieren die Gleichung weiter: $5^k = (3^k - 2^k)(3^k + 2^k)$ mit $n = 2k$. Es können nicht beide Zahlen durch 5 teilbar sein, da ihre Differenz 2^{k+1} ist. Die einzige Möglichkeit ist also $3^k - 2^k = 1$ und $3^k + 2^k = 5^k$, dh $k = 1$. Und die einzige Lösung unserer Gleichung ist $n = 2k = 2$.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Quellen der Aufgaben

Aufgabe 1.
siehe [1], erstellt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.
siehe [1], erstellt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.
siehe [1], erstellt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.
siehe [1], erstellt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.
aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 6.
siehe [1], erstellt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 7.
siehe [1], erstellt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 8.
siehe [1], erstellt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Literatur

[1] Kroatischer Regionalwettbewerb Natjecanja iz matematike u RH. `http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm`. (aufgerufen am 06.04.2021).