51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 19. März 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Veronika Schreitter zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 16. März 2021 wird das Aufgabenblatt um Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Veronika Schreitter bespricht mit euch die Aufgaben im virtuellen Olympiade-Kurs am 19. März 2021 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Dokument um ausgewählte Lösungsvorschläge und Quellenangaben.

Schreibe uns gerne, wenn du an unserem virtuellen Olympiade-Kurs teilnehmen möchtest. Du bist jederzeit herzlich willkommen.

Aufgaben

Aufgabe 1. Auf einem Kreis liegen n Punkte, $n > 1$. Sie sollen so mit $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ bezeichnet werden, dass der Streckenzug $P_1P_2P_3...P_n$ überschneidungsfrei ist. Auf wie viele Arten ist dies möglich?

Aufgabe 2. Um einen runden Tisch sitzen n Personen. Die Anzahl derjenigen Personen, die das gleiche Geschlecht haben wie die Personen zu ihrer Rechten, ist gleich der Anzahl der Personen, für die das nicht gilt.
Man beweise, dass n durch 4 teilbar ist.

Aufgabe 3. Die Bewohner eines Planeten haben eine Sprache, die nur die Buchstaben A und O besitzt. Zur Vermeidung von Fehlern unterscheiden sich irgend zwei Wörter gleicher Burchstabenanzahl an mindestens drei Stellen (z.B. unterscheiden sich $AAOAO$ und $AOAAA$ an der zweiten, dritten und fünften Stelle).
Zeige, dass es nicht mehr als $\frac{2^n}{n+1}$ Wörter mit n Buchstaben gibt.

Aufgabe 4. In der Ebene sei ein konvexes 1982-Eck gegeben. Es werden alle Dreiecke betrachtet, deren Ecken zugleich Eckpunkte dieses Vielecks sind. Ein Punkt P der Ebene liege auf keiner der Seiten dieser Dreiecke.
Man beweise, dass die Anzahl der betrachteten Dreiecke, die P im Innern enthalten, gerade ist.

Aufgabe 5. M sei eine Menge mit n Elementen, P sei die Menge aller echten und unechten Teilmengen von M. (P nennt man übrigens Potenzmenge von M.)
Wie groß ist die Anzahl der Paare (A, B), wenn $A \in P$ und $B \in P$ und A echte oder unechte Teilmenge von B ist?

Aufgabe 6. Es sei $M = \{1, 2, 3, ..., 10000\}$.
Man beweise, dass man 16 Teilmengen von M mit folgender Eigenschaft finden kann: Für jede Zahl z aus M gibt es acht dieser Teilmengen, deren Schnittmenge $\{z\}$ ist.

Aufgabe 7. Es sei n eine positive ganze Zahl und $M_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Eine Teilmenge T von M_n heiße *fett*, wenn kein Element von T kleiner ist als die Anzahl der Elemente von T. Die Anzahl der fetten Teilmengen von M_n werde mit $f(n)$ bezeichnet. Man entwickle ein Verfahren, mit dem sich $f(n)$ für jedes n bestimmen lässt, und berechne damit $f(16)$.

Aufgabe 8. P sei eine Menge von n Primzahlen. M sei eine Menge von mehr als n natürlichen Zahlen, die alle keine Quadratzahlen sind und von denen keine einen Primfaktor hat, der nicht in P enthalten ist.
Man beweise, dass es stets eine nicht-leere Teilmenge T von M gibt, bei der das Produkt aller ihrer Elemente eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 9. Auf einem Bücherbord stehen nebeneinander n Bücher ($n \geq 3$) von lauter unterschiedlichen Autoren. Ein Bibliothekar betrachtet das erste und zweite Buch von links und vertauscht diese beiden genau dann, wenn sie nicht in der alphabetischen Reihenfolge ihrer Autoren stehen. Danach macht er das Gleiche mit dem zweiten und dritten Buch von links usw. Auf diese Weise geht er die Buchreihe insgesamt dreimal von links nach rechts durch.
Bei wie vielen verschiedenen Ausgangsanordnungen der Bücher sind diese dann alphabetisch sortiert?

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Vergib die Bezeichnungen $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ der Reihe nach und stelle jedesmal fest, wie viele Möglichkeiten du für die Auswahl des Punktes hast.

Aufgabe 2. Zeige: Es gibt gleich viele Männer, die rechts neben einer Frau sitzen, wie Frauen, die rechts neben einem Mann sitzen.

Aufgabe 3. Teile jedem vorhandenen Wort eine Menge an Wörtern zu, die es wegen diesem Wort nicht geben kann.

Aufgabe 4. Betrachte Vierecke, deren Eckpunkte zugleich Eckpunkte des 1982-Ecks sind.

Aufgabe 5. Zeichne A und B in einem Mengendiagramm auf. Wie viele verschiedene Bereiche gibt es?

Aufgabe 6. Konstruiere die Mengen, indem du für jedes z auswählst, welche acht Mengen z als Schnitt haben sollen.

Aufgabe 7. Eine fette Teilmenge von M_{n+1}, die das Element $n+1$ nicht enthält, ist auch eine fette Teilmenge von M_n. Finde etwas ähnliches heraus für die restlichen fetten Teilmengen von M_{n+1}.

Aufgabe 8. Teile alle möglichen Teilmengen T von M in geeignete Kategorien ein und wende den Schubfachschluss an.

Aufgabe 9. Zeige: Die Bücher werden genau dann alphabetisch sortiert, wenn jedes Buch höchstens drei Plätze weiter rechts steht, als es stehen sollte.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Veronika Schreitter, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.
Es gibt $n \cdot 2^{n-2}$ Möglichkeiten.
Offensichtlich gibt es n Möglichkeiten, welchen Punkt man mit P_1 bezeichnet. Mit P_2 muss man dann allerdings einen der beiden Nachbarpunkte von P_1 bezeichnen: Ansonsten würde die Kante P_1P_2 die verbleibenden Punkte in zwei Gruppen teilen und der Kantenzug könnte nur Punkte einer dieser beiden Gruppen enthalten, da er sich sonst überschneiden müsste. Ebenso hat man für die Bezeichnungen P_3 bis P_{n-1} jeweils nur 2 Auswahlmöglichkeiten, da der neue Punkt immer direkt neben den schon bezeichneten Punkten liegen muss, damit der Kantenzug nie die noch nicht bezeichneten Punkte in zwei Gruppen teilt. Für P_n ist schließlich nur noch ein Punkt übrig. Das ergibt insgesamt $n \cdot 2^{n-2}$ Möglichkeiten für die Bezeichnung der Punkte.

Aufgabe 2.
Wir bezeichnen mit mf die Anzahl an Paaren von nebeneinandersitzenden Personen, bei denen im Uhrzeigersinn die erste Person ein Mann und die zweite eine Frau ist. Analog verwenden wir die Bezeichnungen fm, mm und ff.
Offensichtlich gibt es n Paare nebeneinandersitzender Personen, also $mf+fm+mm+ff=n$. Laut Angabe gilt außerdem $mf+fm=mm+ff$. Weiters stellen wir fest: Jede Frau kommt in genau zwei Paaren vor, und zwar einmal links und einmal rechts. Also muss gelten $fm+ff=mf+ff$ (also Anzahl Paare mit einer Frau links = Anzahl Paare mit einer Frau rechts). Also gilt $mf=fm$ und damit erhalten wir insgesamt $n=4mf$, also muss n durch 4 teilbar sein.

Aufgabe 3.
Sei x die Anzahl an in der Sprache vorhandenen Wörtern mit n Buchstaben. Jedem dieser Wörter ordnen wir diejenigen Wörter zu, die sich an genau einer Stelle von diesem Wort unterscheiden. Das heißt: Jedem der vorhandenen Wörter ordnen wir n theoretisch mögliche, aber nicht vorhandene Wörter zu. Es kann nicht passieren, dass ein Wort zwei vorhandenen Wörtern zugeteilt wird: Dann könnten sich diese beiden Wörter an höchstens zwei Stellen unterscheiden, was nicht erlaubt ist. Also sind alle zugeteilten Wörter unterschiedlich. Wir wissen außerdem, dass ingesamt 2^n Wörter in dieser Sprache möglich sind (An jeder der n Stellen hat man zwei Möglichkeiten, A oder O). Also gilt: $x(n+1) \leq 2^n$, da die vorhandenen Wörter und die ihnen zugeteilten Wörter in der Menge aller möglichen Wörter enthalten sind. Daraus folgt die gewünschte Aussage.

Aufgabe 4.
Betrachten wir ein Viereck, dessen Ecken zugleich Ecken des 1982-Ecks sind. Eine Diagonale dieses Vierecks teilt das Viereck in zwei Dreiecke. Falls P im Inneren des Vierecks ist, muss P in genau einem dieser beiden Dreiecke liegen. Also gilt für die vier verschiedenen Dreiecke, die aus den Ecken des Vierecks gebildet werden können, dass entweder keines oder zwei von ihnen den Punkt P enthalten. Wenn wir das jetzt für alle möglichen Vierecke machen und aufsummieren, erhalten wir eine gerade Anzahl an Dreiecken, in denen P enthalten ist. Allerdings wurde dabei jedes Dreieck mehrfach gezählt, da es ja in mehreren Vierecken enthalten ist: Für jedes Dreieck kann man 1979 verschiedene Punkte auswählen, um es auf ein Viereck zu ergänzen. Also wurde jedes Dreieck, das P enthält, 1979-mal gezählt. Da wir eine gerade Zahl erhalten haben, muss es also eine gerade Anzahl an Dreiecken geben, die P enthalten.

Aufgabe 5.
Es gibt 3^n solche Paare.
Wir überlegen einfach, wie viele Möglichkeiten es gibt, ein solches Paar (A, B) zu bilden: Jedes Element aus M kann entweder in A sein (und damit automatisch auch in B), oder in B, aber nicht in A, oder weder in A noch in B. Also gibt es für jedes Element aus M drei Möglichkeiten, die frei wählbar sind. Das ergibt insgesamt 3^n Möglichkeiten.

Aufgabe 6.
Wir nennen die Mengen, die wir konstruieren, $M_1, ..., M_{16}$ und wählen für jedes z genau acht dieser Mengen aus, die z enthalten sollen. Wenn wir für jedes z andere acht Mengen wählen können, ist der Durchschnitt dieser acht Mengen dann genau z. Man überzeugt sich leicht, dass $\binom{16}{8} \geq 10000$, also kann man tatsächlich für jedes z andere acht Mengen wählen.

Aufgabe 7.
Es gilt $f(1) = 2, f(2) = 3$ und $f(n+1) = f(n) + f(n-1)$. Damit errechnet man $f(16) = 2584$.
Offensichtlich gilt $f(1) = 2$ und $f(2) = 3$, da $\{1\}$ genau $\{\}$ (die leere Menge) und $\{1\}$ als fette Teilmengen hat und $\{1, 2\}$ genau $\{\}, \{1\}$ und $\{2\}$ als fette Teilmengen hat.
Zeigen wir nun die angegebene Rekursion: Jede fette Teilmenge von M_{n+1}, die das Element $n+1$ nicht enthält, ist auch eine fette Teilmenge von M_n, und umgekehrt. Betrachten wir nun eine fette Teilmenge von M_{n+1}, die das Element $n+1$ enthält. So eine fette Menge kann das Element 1 nicht enthalten, da man dann schon zwei Elemente hätte, was größer als 1 ist. Wenn man jetzt das Element $n+1$ aus der fetten Menge entfernen würde und von allen anderen Elementen 1 subtrahiert, erhält man eine fette Teilmenge von M_{n-1}. Umgekehrt kann man zu jedem Element einer fetten Teilmenge von M_{n-1} 1 addieren und das Element $n+1$ hinzufügen, um eine fette Teilmenge von M_{n+1}, die $n+1$ enthält, zu erhalten. Die Anzahl der fetten Teilmengen von M_{n+1} entspricht also der Anzahl an fetten Teilmengen von M_n plus der Anzahl an fetten Teilmengen von M_{n-1}. Also gilt $f(n+1) = f(n) + f(n-1)$.

Aufgabe 8.
Wir nennen zwei Teilmengen T_1 und T_2 von M zueinander *ähnlich*, falls für die Produkte R_1 und R_2 der Elemente von T_1 bzw T_2 gilt: Alle Primfaktoren, die in R_1 in gerader Vielfachheit vorkommen, kommen auch in R_2 in gerader Vielfachheit vor, und umgekehrt. Dadurch teilen sich alle möglichen Teilmengen von M in 2^n Gruppen zueinander ähnlicher Teilmengen auf: Die Produkte haben nämlich n Primfaktoren (manche vielleicht mit Vielfachheit 0), deren Vielfachheit jeweils gerade oder ungerade sein kann. Nun gibt es aber mindestens 2^{n+1} Teilmengen von M, da M mehr als n Elemente hat. Also kann man laut Schubfachschluss zwei unterschiedliche Teilmengen von M finden, die zueinander ähnlich sind. Wir nennen diese wieder T_1 und T_2 mit Produkten R_1 und R_2. Dann ist $R_1 \cdot R_2$ eine Quadratzahl, da jeder Primfaktor in gerader Vielfachheit in $R_1 \cdot R_2$ vorkommt. Wenn wir nun nur diejenigen Elemente von T_1 und T_2 miteinander multiplizieren, die nicht in beiden Mengen vorkommen, müssen wir immer noch eine Quadratzahl erhalten, da wir dadurch in $R_1 \cdot R_2$ nur Quadratzahlen weglassen. Also haben wir Elemente von M gefunden, deren Produkt eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 9.
Es gibt $4^{n-3} \cdot 6$ solche Anordnungen.
Wir zeigen zuerst: Die Bücher werden genau dann alphabetisch sortiert, wenn jedes Buch höchstens drei Plätze weiter rechts steht, als es stehen sollte. Offensichtlich kann jedes Buch beim Sortiervorgang höchstens drei Plätze weiter nach links rücken, also ist die Bedingung sicherlich notwendig. Umgekehrt rückt ein Buch, das weiter rechts steht, als es stehen sollte, sicherlich einen Platz nach links, wenn der Bibliothekar die Reihe einmal durchgeht: Betrachten wir ein solches Buch. Dann muss es unter den Büchern, die weiter links stehen als unser Buch, mindestens ein Buch geben, dass in der Sortierung weiter nach hinten gehört als unser Buch. Betrachten wir nun unter den Büchern, die weiter links stehen als unser Buch, dasjenige, das in der Sortierung an die hintereste Stelle gehört. Der Bibliothekar wird dieses Buch immer wieder mit seinem rechten Nachbarn vertauschen, da dieser immer weiter nach vorne gehört als dieses Buch. So wandert dieses Buch weiter nach rechts und wird schließlich mit unserem Buch vertauscht werden, dass also tatsächlich einen Schritt nach links rückt. Somit ist nach den drei Durchgängen des Bibliothekars kein Buch mehr weiter rechts, als es sein sollte. Dadurch kann auch kein Buch weiter links sein, als es sein sollte, und die Bücher sind sortiert.
Berechnen wir nun die Anzahl an Ausgangssituationen, für die diese Bedingung zutrifft: Wir beginnen von rechts und stellen fest, wie viele Bücher an den jeweiligen Stellen stehen können: An der letzten Stelle kann nur eines der letzten 4 Bücher stehen, da alle anderen dann mehr als drei Plätze zu weit rechts wären. An der vorletzten Stellen kann nur eines der letzten 5 Bücher stehen. Da von diesen eines schon der letzten Stelle zugeordnet wurde, gibt es auch hierfür 4 Möglichkeiten. So gibt es für jede Stelle bis zur vierten Stelle immer 4 Möglichkeiten. Bei der 3., 2. und 1. Stelle von links bleiben schließlich nur noch $3, 2$ und 1 Möglichkeiten übrig. Somit ergeben sich insgesamt $4^{n-3} \cdot 6$ mögliche Anfangsanordnungen.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Quellen der Aufgaben

Aufgabe 1.
siehe [2, 1986], bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team

Aufgabe 2.
siehe [2, 1972/73], bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team

Aufgabe 3.
siehe [2, 1970/71], bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team

Aufgabe 4.
siehe [2, 1982], bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team

Aufgabe 5.
siehe [2, 1973/74], bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team

Aufgabe 6.
siehe [2, 1998], bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team

Aufgabe 7.
siehe [2, 1987], bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team

Aufgabe 8.
siehe [2, 1980], bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team

Aufgabe 9.
siehe [1, 2008], bearbeitet von Veronika Schreitter und vom MmF-Team

Literatur

[1] 50 Jahre Bundeswettbewerb Mathematik. `https://www.mathe-wettbewerbe.de/bwm/aufgaben`. (aufgerufen am 22.03.2021).

[2] Eckard Specht Hans-Heinrich Langmann, Erhard Quaisser. *Bundeswettbewerb Mathematik. Die schönsten Aufgaben.* Springer Spektrum, 2016.