51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 26. März 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Greilhuber zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 23. März 2021 wird das Aufgabenblatt um Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Greilhuber bespricht mit euch die Aufgaben im virtuellen Olympiade-Kurs am 26. März 2021 von 16:20–18:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Dokument um ausgewählte Lösungsvorschläge und Quellenangaben.

Schreibe uns gerne, wenn du an unserem virtuellen Olympiade-Kurs teilnehmen möchtest. Du bist jederzeit herzlich willkommen.

Aufgaben

Aufgabe 1. Man löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x+y+z &= a \\ x^2+y^2+z^2 &= b^2 \\ xy &= z^2 \end{aligned}$$

in den reellen Zahlen, wobei a und b Konstanten seien. Man bestimme, für welche $a, b \in \mathbb{R}$ die Lösungen (x, y, z) Tripel paarweise verschiedener positiver reeller Zahlen sind.

Aufgabe 2. Man betrachte das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax_1^2+bx_1+c &= x_2 \\ ax_2^2+bx_2+c &= x_3 \\ &\dots \\ ax_{n-1}^2+bx_{n-1}+c &= x_n \\ ax_n^2+bx_n+c &= x_1 \end{aligned}$$

in den Unbekannten $x_1, x_2, \dots, x_n$, wobei a, b, c reelle Zahlen mit $a \neq 0$ seien.
Sei $\Delta = (b-1)^2 - 4ac$. Zeige dass das dieses System

1. keine Lösung hat, wenn $\Delta < 0$.
2. genau eine Lösung hat, wenn $\Delta = 0$.
3. mehr als eine Lösung hat, wenn $\Delta > 0$.

Aufgabe 3. Man bestimme alle Quadrupel reellen Zahlen (x_1, x_2, x_3, x_4), sodass jede dieser Zahlen, summiert mit dem Produkt der anderen drei, 2 ergibt.

Aufgabe 4. Bestimme alle Tripel (a, b, c) reeller Zahlen, sodass $ab + bc + ca = 1$ und

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b$$

gilt.